Nombres complexes

0

Les notes suivantes s'adressent essentiellement aux futurs étudiants de première année de CPGE n'ayant pas suivi l'enseignement de maths expertes en terminale, mais pourront être lues avec profit par tous, y compris ceux qui sont déjà familiers des nombres complexes.

Les complexes feront de nouveau l'objet d'un chapitre en première année, mais puisqu'ils seront dès le début d'année utilisés dans d'autres disciplines (en physique notamment), mieux vaut avoir dès la rentrée une certaine aisance avec les calculs en complexes.

0.1 L'ensemble des nombres complexes

0.1.1 Définition, calculs sous forme algébrique

Les nombres réels[1] présentent une certaine disymétrie : les carrés sont toujours des nombres positifs.
En particulier, un réel strictement positif a possède toujours deux racines carrées[2], à savoir $\sqrt{a}$ et $-\sqrt{a}$, alors qu'un réel strictement négatif ne possède aucune racine carrée.

[1] Ceux que vous manipulez depuis toujours.

[2] Un nombre dont le carré vaut a.

Pour pallier à ceci, imaginons un nombre, que nous noterons i, tel que $i^2 = -1$.
Un tel nombre est purement imaginaire, et ne peut pas être un nombre réel : inutile de le chercher sur votre règle, ou de lui donner une signification géométrique quelconque, ce n'est ni une longueur, ni une aire.
À partir de ce nombre imaginaire i, il est possible de «créer» d'autres nombres, comme $i + i = 2i$, $-5i$, $\frac{i}{2}$ ou encore $1 - 2i$.

La définition précise de l'ensemble $\mathbf{C}$ des nombres complexes est hors-programme en sup, et nous nous contenterons **d'admettre** qu'il existe un ensemble noté $\mathbf{C}$, dont tous les éléments s'écrivent de manière unique sous la forme $a + ib$, $(a, b) \in \mathbf{R}^2$, sur lequel sont définies deux opérations $+$ et $\times$, satisfaisant aux mêmes règles de calcul que dans $\mathbf{R}$ et vérifiant $i^2 = -1$.

Ainsi, si $z = a + ib$ et $z' = a' + ib'$ sont deux éléments de $\mathbf{C}$, on a

- $z + z' = (a + a') + i(b + b')$
- $z \times z' = (a + ib)(a' + ib') = aa' + i(ab' + a'b) + \underbrace{i^2}_{=-1} bb' = (aa' - bb') + i(ab' + a'b)$.

Il est également possible de diviser par un nombre complexe[3], avec la même précaution que dans $\mathbf{R}$: on ne divise pas par 0.
On note $\mathbf{C}^*$ l'ensemble des complexes non nuls.

[3] Voir plus loin pour les détails.

Exemples 0.1 Premiers calculs

- $1 + (-1 - i) = -i$ et $2 + 3(4 + i) = 2 + 12 + 3i = 14 + 3i$.
- $2 + \frac{1}{2}(2 + i) = 2 + \frac{1}{2} \times 2 + \frac{i}{2} = 3 + \frac{i}{2}$.
- $(1 + i) \times (5 - i) = 5 - i + 5i - i^2 = 5 + 4i - (-1) = 6 + 4i$.
- $(1 + 2i)^2 = (1 + 2i)(1 + 2i) = 1 + 2i + 2i + (2i)^2 = 1 + 4i + 4i^2 = 1 + 4i - 4 = -3 + 4i$.

Notons tout de suite que les identités remarquables usuelles restent valables dans $\mathbf{C}$, si z et z' sont deux nombres complexes, alors

$$(z + z')^2 = z^2 + 2zz' + z'^2,\ (z - z')^2 = z^2 - 2zz' + z'^2 \text{ et } (z + z')(z - z') = z^2 - z'^2.$$

Ainsi, le calcul précédent s'écrit plus simplement

$$(1+2i)^2 = 1^2 + 2\times 1\times(2i) + (2i)^2 = 1 + 4i - 4 = -3 + 4i.$$

▶ Les puissances de i sont aisées à calculer :

$i^2 = -1$, $i^3 = (i^2)\times i = -i$, $i^4 = i^3\times i = -i^2 = 1$ puis $i^5 = i^4\times i = 1\times i = i$, $i^6 = i^4\times i^2 = -1, \dots$

▶ $i\times(-i) = -i^2 = 1$, si bien qu'en divisant par i les deux membres de l'égalité, on obtient $\dfrac{1}{i} = -i$.

Remarquons tout de suite que $z + z' = z' + z$ et $zz' = z'z$ (on dit alors que l'addition et la multiplication sont commutatives), ce qui découle du fait que la l'addition et la multiplication de réels sont des opérations commutatives.

L'écriture $z = a + ib$, avec $(a, b) \in \mathbf{R}^2$ est appelée **forme algébrique** du complexe z.
L'unicité de l'écriture sous forme algébrique signifie que $a + ib = a' + ib'$ si et seulement si on a à la fois $\begin{cases} a = a' \\ b = b' \end{cases}$.

> **Autrement dit**
> Une égalité entre deux complexes signifie qu'on a deux égalités entre réels.

Définition 0.2 – Si $z = a + ib \in \mathbf{C}$, avec $a, b \in \mathbf{R}$ alors on appelle :

- **partie réelle de** z le nombre réel a, que l'on note $\mathrm{Re}(z)$
- **partie imaginaire de** z le nombre réel b, que l'on note $\mathrm{Im}(z)$

On a donc $z = \mathrm{Re}(z) + i\,\mathrm{Im}(z)$.

Un nombre complexe est donc entièrement caractérisé par la donnée de sa partie réelle et de sa partie imaginaire.
Si $\mathrm{Im}(z) = 0$, alors on confond le complexe z et le réel $\mathrm{Re}(z)$, de sorte qu'on considère que $\mathbf{R} \subset \mathbf{C}$.
Un complexe z est donc un réel si et seulement si $\mathrm{Im}(z) = 0$ c'est-à-dire $z = \mathrm{Re}(z)$. Un complexe dont la partie réelle est nulle est appelé **imaginaire pur**.
On note $i\mathbf{R}$ l'ensemble des imaginaires purs, c'est-à-dire l'ensemble des ib, $b \in \mathbf{R}$.

Proposition 0.3 : *Si z, z' sont deux nombres complexes, alors on a*

$$\mathrm{Re}(z+z') = \mathrm{Re}(z) + \mathrm{Re}(z') \text{ et } \mathrm{Im}(z+z') = \mathrm{Im}(z) + \mathrm{Im}(z').$$

> **Danger !**
> La partie réelle (resp. imaginaire) d'un produit n'est pas le produit des parties réelles (resp. imaginaires).

Démonstration. Si $z = a + ib$ et $z' = a' + ib'$, avec a, a', b, b' des nombres réels, alors

$$z + z' = a + ib + a' + ib' = \underbrace{a + a'}_{\in\mathbf{R}} + i\underbrace{(b + b')}_{\in\mathbf{R}}$$

et donc par unicité de la partie réelle et de la partie imaginaire,

$$\mathrm{Re}(z+z') = a + a' = \mathrm{Re}(z) + \mathrm{Re}(z') \text{ et } \mathrm{Im}(z+z') = b + b' = \mathrm{Im}(z) + \mathrm{Im}(z').$$

□

Si $z = a + ib$, avec a, b réels, est un nombre complexe non nul[4] alors z possède un inverse car si on note $z^{-1} = \dfrac{a}{a^2+b^2} - i\dfrac{b}{a^2+b^2}$, alors

$$zz^{-1} = (a+ib)\left(\frac{a}{a^2+b^2} - i\frac{b}{a^2+b^2}\right) = \frac{a^2}{a^2+b^2} + \frac{b^2}{a^2+b^2} + i\left(-\frac{ab}{a^2+b^2} + \frac{ab}{a^2+b^2}\right) = 1.$$

[4] C'est-à-dire tel que $a \neq 0$ **ou** $b \neq 0$.

Ceci implique notamment que, à l'instar de ce qui se passe dans $\mathbf{R}$, si z et z' sont deux complexes tels que $zz' = 0$, alors $z = 0$ ou $z' = 0$.
En effet, supposons que $zz' = 0$, et que z soit non nul. Alors en multipliant $zz' = 0$ par z^{-1}, il vient

$$z^{-1}zz' = 0 \text{ donc } 1\cdot z' = 0 \text{ et ainsi } z' = 0.$$

> **Autrement dit**
> Un produit de facteurs est nul si et seulement si l'un des facteurs est nul.

Ceci nous permet également de définir la division de deux complexes en posant, pour $z' \neq 0$, $\dfrac{z}{z'} = z(z')^{-1}$.
On notera en général $\dfrac{1}{z}$ plutôt que z^{-1}.

Exemple 0.4

En utilisant les formules données ci-dessus, on obtient

$$\frac{1}{1+i} = \frac{1}{1^2+1^2} - i\frac{1}{1^2+1^2} = \frac{1}{2}(1-i).$$

Et en effet, on a bien

$$(1+i)\frac{1-i}{2} = \frac{1}{2}(1-i)(1+i) = \frac{1}{2}(1-i^2) = \frac{1}{2}(1+1) = 1.$$

En pratique, il ne sera pas nécessaire de connaître ces formules pour calculer l'inverse d'un nombre complexe (voir le corollaire 0.13 ci-dessous).

Comme pour les nombres réels, on a $\dfrac{1}{\frac{z}{z'}} = \dfrac{z'}{z}$, autrement dit, diviser par une fraction, c'est multiplier par son inverse.

Exemple 0.5

$$\frac{1+i}{\frac{2}{i}} = (1+i)\frac{i}{2} = \frac{i-1}{2}.$$

Enfin, les règles de calcul usuelles avec les fractions restent valables pour les quotients de nombres complexes :

- pour multiplier deux fractions, on multiplie numérateur et dénominateur :

$$\frac{z_1}{z_2} \times \frac{z_3}{z_4} = \frac{z_1 z_3}{z_2 z_4}.$$

- pour ajouter deux fractions, on commence par une mise au même dénominateur :

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad}{bd} + \frac{bc}{bd} = \frac{ad+bc}{bd}.$$

Attention !
On n'ajoute surtout pas les numérateurs et les dénominateurs : la formule

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{a+c}{b+d}$$

est aussi fausse pour les complexes qu'elle l'est pour les réels.

Exemples 0.6

- $\dfrac{6+3i}{1+i} \times \dfrac{6-3i}{i} = \dfrac{(6+3i)(6-3i)}{i(1+i)} = \dfrac{36-9i^2}{i+i^2} = \dfrac{45}{-1+i}$.
- $\dfrac{1+2i}{4-i} + \dfrac{3}{2+i} = \dfrac{(1+2i)(2+i)+3(4-i)}{(4-i)(2+i)} = \dfrac{2+4i+i+2i^2+12-3i}{8+2i-i^2} = \dfrac{12+2i}{9+2i}$.

⚠ On n'écrira pas d'inégalités entre nombres complexes, il n'y a pas de notion naturelle de supérieur/inférieur sur les complexes.
Donc les inégalités $2+i \leqslant -3+2i$ et $-3 \leqslant 2+i$ ne sont ni vraies ni fausses, elles n'ont tout simplement **aucun sens**.
On n'utilisera donc des inégalités que pour les nombres réels, comme vous le faisiez jusqu'à présent.

0.1.2 Représentation géométrique des nombres complexes

Tout comme un point dans le plan, un nombre complexe est caractérisé par la donnée de deux nombres réels : pour un point il s'agit de l'abscisse et de l'ordonnée, pour un complexe il s'agit de la partie réelle et de la partie imaginaire.
Ceci permet de faire correspondre à chaque point du plan un unique nombre complexe.

Définition 0.7 – Considérons un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ du plan. Alors tout point M est caractérisé de manière unique par ses coordonnées (x, y).
Si M a pour coordonnées (x, y), on dit que le complexe $z = x + iy$ est **l'affixe de** M.
On dit également que M est l'**image** du complexe $z = x + iy$.
De même, si $\vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j}$ est un vecteur du plan, on dit que le complexe $z = x + iy$ est l'affixe de $\vec{u}$.

Les réels sont donc les complexes dont l'image est située sur l'axe des abscisses, et les imaginaires purs ceux dont l'image est situé sur l'axe des ordonnées.

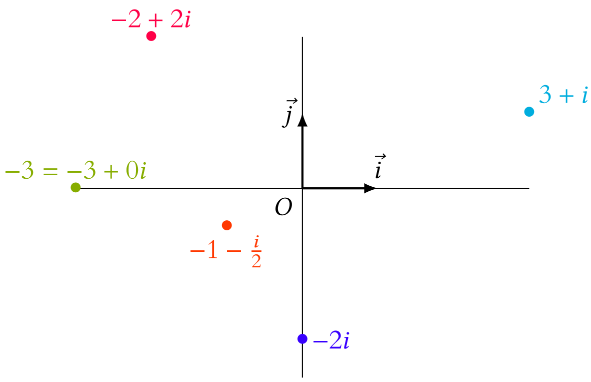


FIGURE 0.1 – L'image de quelques complexes dans le plan.

0.1.3 Conjugué d'un nombre complexe

Définition 0.8 – Si $z = a + ib$ est un complexe, avec a, b réels, alors le complexe $\overline{z} = a - ib$ est appelé **nombre conjugué**[5] de z.
Autrement dit, $\overline{z} = \mathrm{Re}(z) - i\,\mathrm{Im}(z)$.

[5] Ou plus simple conjugué.

Géométriquement, l'image de $\overline{z}$ est le symétrique du point d'affixe z par la symétrie par rapport à l'axe des abscisses.

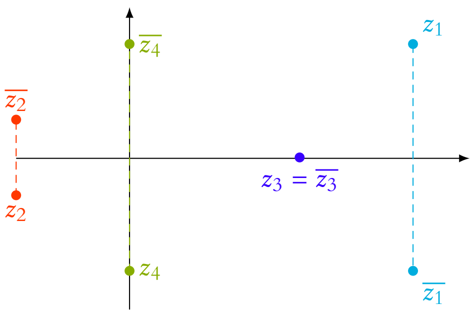


FIGURE 0.2 – Quelques complexes et leurs conjugués (on confond ici un complexe et son image dans le plan).

Remarques. ► Un complexe z est réel si et seulement si $z = \overline{z}$.
► De même, $z \in i\mathbb{R} \Leftrightarrow \overline{z} = -z$.
► Notons tout de suite que pour tout $z \in \mathbb{C}$, $\overline{\overline{z}} = z$.
En effet, si $z = a + ib$, alors $\overline{z} = a - ib$ et donc $\overline{\overline{z}} = \overline{a - ib} = a - i(-b) = a + ib$.

Géométriquement
Un point est invariant par la symétrie par rapport à l'axe des abscisses si et seulement si il est sur cet axe.

Proposition 0.9 : *Si z et z' sont deux complexes, alors*

$$\overline{z+z'} = \overline{z} + \overline{z'} \text{ et } \overline{zz'} = \overline{z}\,\overline{z'}.$$

De plus, si $z \neq 0$, alors $\overline{\left(\frac{1}{z}\right)} = \frac{1}{\overline{z}}$ *et plus généralement,* $\overline{\left(\frac{z'}{z}\right)} = \frac{\overline{z'}}{\overline{z}}$.

Démonstration. Notons $z = a + ib$ et $z' = a' + ib'$ sous forme algébrique[6]. Alors

$$\overline{z+z'} = \overline{(a+a') + i(b+b')} = (a+a') - i(b+b') = (a-ib) + (a'-ib') = \overline{z} + \overline{z'}.$$

De même,

$$\overline{z}\,\overline{z'} = (a-ib)(a'-ib') = (aa'-bb') - i(ab'+a'b) = \overline{(aa'-bb') + i(a'b+ab')} = \overline{zz'}.$$

Et si $z \neq 0$, en utilisant le point précédent, on a

$$\overline{\frac{1}{z}}\,\overline{z} = \overline{\frac{1}{z}z} = \overline{1} = 1.$$

Et donc $\frac{1}{\overline{z}} = \overline{\left(\frac{1}{z}\right)}$.
Enfin, en combinant les deux formules précédentes,

$$\overline{\left(\frac{z'}{z}\right)} = \overline{z'\frac{1}{z}} = \overline{z'}\,\overline{\left(\frac{1}{z}\right)} = \overline{z'}\frac{1}{\overline{z}} = \frac{\overline{z'}}{\overline{z}}.$$

□

[6] Donc avec a, b, a', b' des réels.

Proposition 0.10 : *Si $z \in \mathbf{C}$, alors $z + \overline{z} = 2\,\mathrm{Re}(z)$ et $z - \overline{z} = 2i\,\mathrm{Im}(z)$.*

Démonstration. Si $z = a + ib$ est la forme algébrique de z, $\overline{z} = a - ib$ de sorte que $z + \overline{z} = (a+ib) + (a-ib) = 2a = 2\,\mathrm{Re}(z)$.
Et $z - \overline{z} = (a+ib) - (a-ib) = 2ib = 2i\,\mathrm{Im}(z)$. □

0.1.4 Module d'un nombre complexe

Définition 0.11 – Si $z = a + ib \in \mathbf{C}$, avec a, b réels, on appelle **module de** z le réel positif défini par $|z| = \sqrt{a^2+b^2} = \sqrt{\mathrm{Re}(z)^2 + \mathrm{Im}(z)^2}$.

Géométriquement, $|z|$ n'est autre que la longueur du segment joignant l'origine O au point d'affixe z.

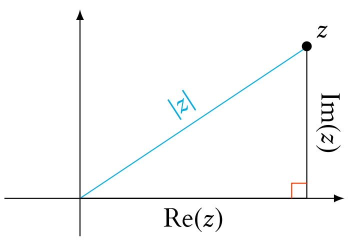


FIGURE 0.3 – Le module d'un complexe. Merci Pythagore !

Remarque
Ceci justifie qu'on utilise la même notation pour le module et la valeur absolue, puisque dans le cas d'un réel, ces deux notations désignent la même quantité.

En particulier, si z est un réel, alors $|z| = \sqrt{\mathrm{Re}(z)^2} = \sqrt{z^2}$ est égal à la valeur absolue de z.

Proposition 0.12 : *Si $z \in \mathbf{C}$, alors $z\overline{z} = |z|^2$.*

Démonstration. C'est un simple calcul, si $z = a + ib$, alors,

$$z\overline{z} = (a+ib)(a-ib) = a^2 - \underbrace{i^2}_{=-1} b^2 = a^2 + b^2 = |z|^2.$$

□

Corollaire 0.13 – *Si $z \in \mathbf{C}^*$, alors* $\dfrac{1}{z} = \dfrac{\overline{z}}{|z|^2}$.

Cette formule s'écrit encore, si $z = a + ib$, sous la forme $\dfrac{1}{z} = \dfrac{1}{a+ib} = \dfrac{a-ib}{a^2+b^2}$.

Exemples 0.14

- $\dfrac{1}{i} = \dfrac{1}{i}\dfrac{-i}{-i} = \dfrac{-i}{-i^2} = -i$.
- $\dfrac{1}{3-2i} = \dfrac{3+2i}{(3-2i)(3+2i)} = \dfrac{3+2i}{9-(2i)^2} = \dfrac{3+2i}{9+4} = \dfrac{1}{13}(3+2i)$.
- La forme algébrique du quotient de deux nombres complexes peut toujours se calculer en multipliant numérateur et dénominateur par le conjugué du dénominateur. Ainsi, on a

$$\frac{2-i}{1-i} = \frac{(2-i)(1+i)}{(1-i)(1+i)} = \frac{2-i+2i-i^2}{1^2-i^2} = \frac{3+i}{2}.$$

Et de même,

$$\begin{aligned}\frac{5-4i}{\frac{1}{2}+2i} &= \frac{(5-4i)\left(\frac{1}{2}-2i\right)}{\left(\frac{1}{2}+2i\right)\left(\frac{1}{2}-2i\right)} = \frac{\frac{5}{2}-10i-2i+8i^2}{\frac{1}{4}-4i^2} = \frac{-\frac{11}{2}-12i}{\frac{17}{4}}\\ &= \left(-\frac{11}{2}-12i\right)\frac{4}{17} = \frac{-22-48i}{17}.\end{aligned}$$

Proposition 0.15 (Propriétés du module) :

1. *Pour tout $z \in \mathbf{C}$, $|\operatorname{Re}(z)| \leqslant |z|$ et $|\operatorname{Im}(z)| \leqslant |z|$*
2. *Si $z \in \mathbf{C}$, alors $|\overline{z}| = |z|$. De plus, on a $z = 0$ si et seulement si $|z| = 0$.*
3. *Si z, z' sont deux complexes, alors $|zz'| = |z| \cdot |z'|$ et si $z' \neq 0$, $\left|\dfrac{z}{z'}\right| = \dfrac{|z|}{|z'|}$.*

   En particulier, $|-z| = |z|$ et $\left|\dfrac{1}{z}\right| = \dfrac{1}{|z|}$.

Démonstration.

1. Soit $z \in \mathbf{C}$, $z = a + ib$, avec $(a, b) \in \mathbf{R}^2$.
   Alors $|\operatorname{Re}(z)|^2 = |a|^2 = a^2 \leqslant a^2 + b^2 \leqslant |z|^2$.
   Et donc par croissance de la racine carrée, $|\operatorname{Re}(z)| \leqslant |z|$.
   De même, $|\operatorname{Im}(z)| = |b| \leqslant \sqrt{a^2+b^2} \leqslant |z|$.

   Cas d'égalité On a alors $|\operatorname{Re}(z)| = |z|$ si et seulement si $b = 0$, soit si et seulement si $z \in \mathbf{R}$.
2. Si $z = a + ib$, alors $\overline{z} = a - ib$, de sorte que $|\overline{z}| = \sqrt{a^2+(-b)^2} = \sqrt{a^2+b^2} = |z|$.
   De plus, on a $|z| = 0 \Leftrightarrow \sqrt{a^2+b^2} = 0 \Leftrightarrow a^2 + b^2 = 0$.
   Or, une somme de nombres positifs est nulle si et seulement si tous ces nombres sont nuls, donc

   $$|z| = 0 \Leftrightarrow a^2 + b^2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 = 0 \\ b^2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 0 \\ b = 0 \end{cases} \Leftrightarrow z = 0.$$

   Géométriquement Le seul point à distance nulle de l'origine est l'origine.
3. On a

   $$|zz'|^2 = zz'\overline{zz'} = zz'\overline{z}\overline{z'} = z\overline{z}z'\overline{z'} = |z|^2|z'|^2.$$

   Mais des modules sont toujours positifs, donc en passant à la racine,

   $$|zz'| = |z| \cdot |z'|.$$

En particulier, pour $z \neq 0$, il vient $\left|\frac{1}{z}\right||z| = \left|z\frac{1}{z}\right| = |1| = 1$.

Et donc $\frac{1}{|z|} = \left|\frac{1}{z}\right|$.

On en déduit que si $z' \neq 0$,

$$\left|\frac{z}{z'}\right| = \left|z\frac{1}{z'}\right| = \left|\frac{1}{z'}\right||z| = \frac{1}{|z'|}|z| = \frac{|z|}{|z'|}.$$

□

En revanche, les choses se passent moins bien pour la somme, et le module d'une somme n'est que rarement la somme des modules. Par exemple, $|1+i| = \sqrt{2}| \neq |1| + |i|$.
Plus précisément, on dispose de l'inégalité suivante.

Théorème 0.16 (Inégalité triangulaire) : *Si z_1, z_2 sont deux nombres complexes, alors*

$$|z_1 + z_2| \leqslant |z_1| + |z_2|.$$

Cette inégalité est une égalité si et seulement si $z_1 = 0$ ou s'il existe $\lambda \in \mathbf{R}_+$ tel que $z_2 = \lambda z_1$.

Cas d'égalité
Le cas d'égalité signifie que les vecteurs d'affixes z_1 et z_2 sont colinéaires et de même sens.

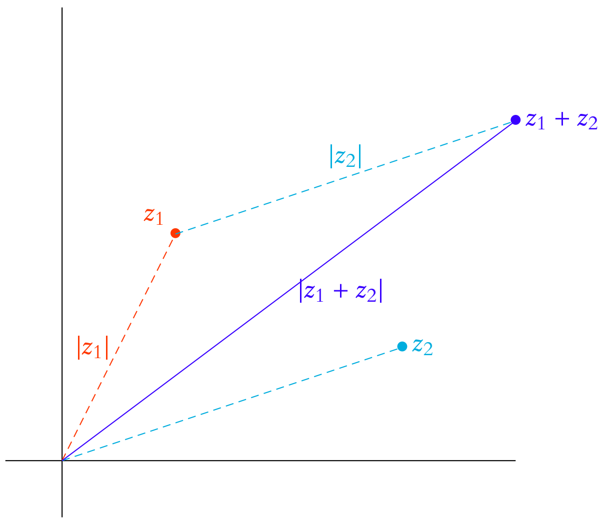


Figure 0.4 – L'inégalité triangulaire : dans un triangle, la longueur d'un côté est plus petite que la somme des longueurs des deux autres côtés.

Démonstration. On a

$$\begin{aligned}
|z_1+z_2|^2 &= (z_1+z_2)\overline{(z_1+z_2)} = (z_1+z_2)\left(\overline{z_1}+\overline{z_2}\right)\\
&= |z_1|^2 + z_1\overline{z_2} + \overline{z_1}z_2 + |_2|^2\\
&= |z_1|^2 + \overline{\overline{z_1}z_2} + \overline{z_1}z_2 + |z_2|^2\\
&= |z_1|^2 + 2\,\mathrm{Re}\left(\overline{z_1}z_2\right) + |z_2|^2\\
&\leqslant |z_1|^2 + 2\left|\mathrm{Re}\left(\overline{z_1}z_2\right)\right| + |z_2|^2\\
&\leqslant |z_1|^2 + 2\left|\overline{z_1}z_2\right| + |z_2|^2\\
&\leqslant |z_1|^2 + 2|z_1||z_2| + |z_2|^2\\
&\leqslant \left(|z_1|+|z_2|\right)^2.
\end{aligned}$$

Donc $|z_1+z_2| \leqslant |z_1| + |z_2|$.
De plus il y a égalité si et seulement si chacune des inégalités ci-dessus est une égalité, soit si et seulement si $\left|\mathrm{Re}\left(\overline{z_1}z_2\right)\right| = \mathrm{Re}\left(\overline{z_1}z_2\right)$ et $\left|\mathrm{Re}\left(\overline{z_1}z_2\right)\right| = \left|\overline{z_1}z_2\right|$.
La première condition équivaut au fait que $\mathrm{Re}\left(\overline{z_1}z_2\right)$ soit positif, et la seconde au fait que

$\overline{z_1}z_2$ soit réel.
Donc au final, il y a égalité si et seulement si $\overline{z_1}z_2 \in \mathbf{R}_+$.
Si $z_1 = 0$, alors il y a égalité.
Si $z_1 \neq 0$, si il y a égalité dans l'inégalité triangulaire, alors il existe $\lambda \in \mathbf{R}_+$ tel que $\overline{z_1}z_2 = \lambda$ et donc $z_2 = \lambda\frac{1}{\overline{z_1}} = \underbrace{\frac{\lambda}{|z_1|^2}}_{\geqslant 0} z_1$.
Et inversement, si $z_2 = \lambda z_1$ avec $\lambda \in \mathbf{R}_+$, alors $z_1 + z_2 = (1+\lambda)z_1$ et donc $|z_1 + z_2| = (1+\lambda)|z_1| = |z_1| + \lambda|z_1| = |z_1| + |z_2|$, donc l'inégalité triangulaire est une égalité.
Au final, il y a bien égalité si et seulement si $z_1 = 0$ ou s'il existe $\lambda \in \mathbf{R}_+$ tel que $z_2 = \lambda z_1$. □

Corollaire 0.17 – *Quels que soient les complexes z et z', on a $\big||z| - |z'|\big| \leqslant |z + z'|$.*

Terminologie
Cette inégalité s'appelle l'inégalité triangulaire renversée.

Démonstration. La preuve est la même que dans le cas réel. □

Notons qu'en utilisant à la fois l'inégalité triangulaire et l'inégalité triangulaire renversée, et en changeant z' en son opposé, on arrive à

$$\big||z| - |z'|\big| \leqslant |z \pm z'| \leqslant |z| + |z'|.$$

Le corollaire suivant est une généralisation de l'inégalité triangulaire à une somme de n nombres complexes. Sa preuve peut être omise en première lecture, notamment si vous n'êtes pas à l'aise avec le symbole $\sum$.

Corollaire 0.18 – *Si $z_1, \dots, z_n$ sont des complexes, alors $\left|\sum_{i=1}^n z_i\right| \leqslant \sum_{i=1}^n |z_i|$.*

Démonstration. La preuve se fait par récurrence sur $n \in \mathbf{N}^*$, comme pour le cas réel. Si $n = 1$ c'est évident, et si $n = 2$, c'est le théorème précédent.
Supposons donc que pour tous complexes $z_1, \dots, z_n$, $\left|\sum_{i=1}^n z_i\right| \leqslant \sum_{i=1}^n |z_i|$ et soient $z_1, \dots, z_{n+1}$ $n+1$ nombres complexes. Alors

$$\begin{aligned}
\left|\sum_{i=1}^{n+1} z_i\right| &= \left|\sum_{i=1}^{n} z_i + z_{n+1}\right| \\
&\leqslant \left|\sum_{i=1}^{n} z_i\right| + |z_{n+1}| && \text{C'est le théorème précédent.} \\
&\leqslant \sum_{i=1}^{n} |z_i| + |z_{n+1}| && \text{Hypothèse de récurrence.} \\
&\leqslant \sum_{i=1}^{n+1} |z_i|.
\end{aligned}$$

Donc par le principe de récurrence, pour tout $n \in \mathbf{N}^*$ et pour tous complexes $z_1, \dots, z_n$, $\left|\sum_{i=1}^n z_i\right| \leqslant \sum_{i=1}^n |z_i|$. □

Donnons enfin une interprétation géométrique du module de $|z_1 - z_2|$ où z_1 et z_2 sont deux complexes.
Notons $z_1 = x_1 + iy_1$ et $z_2 = x_2 + iy_2$ les formes algébriques de z_1 et z_2, donc avec x_1, x_2, y_1, y_2 réels.
Soient alors $A_1(x_1, y_1)$ et $A_2(x_2, y_2)$ les points d'affixes respectives z_1 et z_1.

La distance entre A_1 et A_2 est donc $A_1A_2 = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$.
Or, on a également

$$|z_1 - z_2| = |(x_1 - x_2) + i(y_1 - y_2)| = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}.$$

Donc $|z_1 - z_2|$ est la distance entre les points d'affixes z_1 et z_2.

0.2 FORME EXPONENTIELLE D'UN NOMBRE COMPLEXE

Souvenons-nous qu'il est possible d'identifier les nombres complexes aux points du plan. Le plus simple pour caractériser un point du plan est de se donner son abscisse et son ordonnée, ce qui en termes de nombres complexes, correspond à la partie réelle et la partie imaginaire. C'est ce que nous avons appelé la forme algébrique d'un complexe. Elle est particulièrement adaptée aux calculs de sommes, mais les calculs de produits ou de quotients sont plus désagréables.

Mais il existe un autre moyen de repérer un point M du plan : il suffit de se donner sa distance à l'origine, ainsi que l'angle $(\vec{i}, \overrightarrow{OM})$.
En effet, si $OM = r$, alors M est sur le cercle $\mathscr{C}_r$ de centre O et de rayon r, et si on note $\theta = (\vec{i}, \overrightarrow{OM})$, alors M est le seul point de $\mathscr{C}_r$ pour lequel $(\vec{i}, \overrightarrow{OM}) = \theta$.

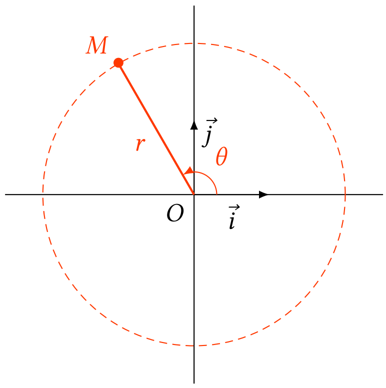


FIGURE 0.5 – Un point du plan est repéré par un rayon et un angle.

Puisque dans cette partie nous allons être amenés à manipuler des angles, profitons-en pour introduire une notation que vous avez peut-être déjà manipulée au lycée.
Vous savez qu'un angle est bien défini «à 2π près», au sens où $\theta, \theta + 2\pi$ et $\theta - 4\pi$ définissent les mêmes angles.
Si θ_1 et θ_2 sont deux réels, on notera alors $\theta_1 \equiv \theta_2 \ [2\pi]$ s'il existe un entier relatif $k \in \mathbf{Z}$ tel que $\theta_1 = \theta_2 + 2k\pi$. Autrement dit, si θ_1 et θ_2 définissent les mêmes angles.
Par exemple, $\frac{\pi}{2} \equiv \frac{5\pi}{2} \ [2\pi]$ et $-\frac{2\pi}{3} \equiv \frac{10\pi}{3} \ [2\pi]$.

Terminologie
On dit que z_1 et z_2 sont congrus **modulo** 2π.

0.2.1 L'ensemble des nombres complexes de module 1

Définition 0.19 – On note $\mathbf{U}$ l'ensemble des nombres complexes de module 1 :

$$\mathbf{U} = \{z \in \mathbf{C}, |z| = 1\}.$$

Autrement dit
$\mathbf{U}$ est l'ensemble des affixes des points du cercle trigonométrique.

Remarque. Si z est un complexe non nul, alors $\frac{z}{|z|} \in \mathbf{U}$.
En effet, $\left|\frac{z}{|z|}\right| = \frac{1}{|z|}|z| = 1$.

Exemples 0.20

▶ $1, i, -i$ et -1 sont dans $\mathbf{U}$.
Puisque $|1+i| = \sqrt{2}$, $1+i \notin \mathbf{U}$ mais $\dfrac{1}{\sqrt{2}}(1+i) \in \mathbf{U}$.

▶ Soit $z \in \mathbf{C} \setminus \{1\}$. Alors $\dfrac{z+1}{z-1} \in i\mathbf{R}$ si et seulement si $z \in \mathbf{U}$.
En effet, on a $\dfrac{z+1}{z-1} = \dfrac{(z+1)(\overline{z}-1)}{|z-1|^2} = \dfrac{|z|^2 - z + \overline{z} - 1}{|z-1|^2} = \dfrac{|z|^2-1}{|z-1|^2} - i\dfrac{2\,\mathrm{Im}(z)}{|z-1|^2}$.
Et donc ce nombre est imaginaire pur si et seulement si $|z|^2 - 1 = 0$, soit si et seulement si $|z| = 1$ c'est-à-dire lorsque $z \in \mathbf{U}$.

Proposition 0.21 : $1 \in \mathbf{U}$ *et pour tous* $z_1, z_2 \in \mathbf{U}$, $z_1 z_2 \in \mathbf{U}$ *et* $\dfrac{1}{z_1} \in \mathbf{U}$.

Démonstration. Cela découle directement des propriétés du module. □

Proposition 0.22 : *Si* $z \in \mathbf{C}$ *est non nul, alors* $z \in \mathbf{U}$ *si et seulement si* $\dfrac{1}{z} = \overline{z}$.

En particulier
L'inverse de i est son conjugué : $-i$.

Démonstration. Nous savons que $\dfrac{1}{z} = \dfrac{\overline{z}}{|z|^2}$ et donc $\dfrac{1}{z} = \overline{z} \Leftrightarrow |z|^2 = 1 \Leftrightarrow z \in \mathbf{U}$. □

0.2.2 Notation $e^{i\theta}$

Proposition 0.23 : *Soit* $z \in \mathbf{U}$. *Alors il existe* $\theta \in \mathbf{R}$ *tel que* $z = \cos\theta + i\sin\theta$.
Un tel réel θ *est appelé* ***un argument de*** z.

Terminologie
Il existe une infinité de tels réels θ, donc on veillera bien à dire **un** argument, et pas l'argument.

Démonstration. Soit $z = a + ib$ un élément de $\mathbf{U}$. Alors $|z|^2 = 1 \Leftrightarrow a^2 + b^2 = 1$.
Autrement dit, (a, b) appartient au cercle trigonométrique $\mathscr{C}$.
Mais alors il existe $\theta \in \mathbf{R}$, unique modulo 2π, tel que $(a, b) = (\cos\theta, \sin\theta)$.
Et donc $z = \cos\theta + i\sin\theta$. □

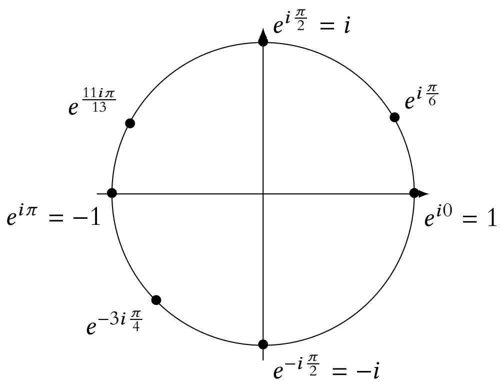
Définition 0.24 – Pour $\theta \in \mathbf{R}$, on note $e^{i\theta}$ le nombre complexe défini par

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta.$$

Remarques. ▶ Notons qu'en particulier, $e^{i0} = 1$. Et plus généralement, pour tout $k \in \mathbf{Z}$, $e^{2ik\pi} = 1$.
On a également $i = e^{i\frac{\pi}{2}}$ et $-1 = e^{i\pi}$.
Cette dernière formule s'écrit encore $e^{i\pi} + 1 = 0$.
▶ Avec cette notation, $\mathbf{U} = \{e^{i\theta},\ \theta \in \mathbf{R}\}$.

Graphiquement, le point M_θ d'affixe $e^{i\theta}$ est le point du cercle trigonométrique tel que $\left(\vec{i}, \overrightarrow{OM_\theta}\right) = \theta$.

⚠ Pour l'instant il ne s'agit que d'une notation, et a priori, rien ne justifie qu'il existe un quelconque rapport avec la fonction exponentielle que nous utilisons en analyse.
Il y a bien un lien entre les deux, mais il ne sera clarifié qu'en seconde année de prépa.
En particulier, vous noterez bien que je n'ai à aucun moment défini ce que serait le logarithme d'un nombre complexe,
Pour l'instant, contentons-nous de constater que $e^{i\theta}$ partage bien des propriétés avec l'exponentielle réelle dont nous avons l'habitude :



Proposition 0.25 : *Soient $\theta, \theta_1, \theta_2$ des réels. Alors*

1. $\left|e^{i\theta}\right| = 1$. *Et donc,* $e^{i\theta} \in \mathbf{U}$
2. $\forall k \in \mathbf{Z}$, $e^{i(\theta+2k\pi)} = e^{i\theta}$
3. $e^{i\theta_1} = e^{i\theta_2}$ *si et seulement si* $\theta_1 \equiv \theta_2 \ [2\pi]$
4. $e^{i\theta_1} e^{i\theta_2} = e^{i(\theta_1+\theta_2)}$
5. $\dfrac{1}{e^{i\theta}} = e^{-i\theta}$, *donc*[7] $\overline{e^{i\theta}} = e^{-i\theta}$.
6. $\dfrac{e^{i\theta_1}}{e^{i\theta_2}} = e^{i(\theta_1-\theta_2)}$.

[7] $e^{i\theta} \in \mathbf{U}$, donc son inverse est égal à son conjugué.

Démonstration. 1. On a

$$\left|e^{i\theta}\right| = \sqrt{\cos^2\theta + \sin^2\theta} = \sqrt{1} = 1.$$

2. Pour $k \in \mathbf{Z}$, on a, par 2π-périodicité des fonctions cos et sin

$$e^{i(\theta+2k\pi)} = \cos(\theta + 2k\pi) + i\sin(\theta + 2k\pi) = \cos(\theta) + i\sin(\theta) = e^{i\theta}.$$

3. Nous savons qu'à tout point du cercle trigonométrique correspond un unique $\theta \in]-\pi, \pi]$. Autrement dit, pour $\theta_1, \theta_2 \in]-\pi, \pi]$, on a $e^{i\theta_1} = e^{i\theta_2}$ si et seulement si $\theta_1 = \theta_2$.
Mais il existe un (unique) entier k_1 tel que $\theta_1 + 2k_1\pi \in]-\pi, \pi]$ et de même il existe un unique entier k_2 tel que $\theta_2 + 2k_2\pi \in]-\pi, \pi]$.
Si $e^{i\theta_1} = e^{i\theta_2}$, alors $e^{i\theta_1} = e^{i(\theta_1+2k_1\pi)} = e^{i(\theta_2+2k_2\pi)}$ de sorte que $\theta_1 + 2k_1\pi = \theta_2 + 2k_2\pi$ et donc $\theta_1 \equiv \theta_2 \ [2\pi]$.
La réciproque est évidente d'après le point précédent.

4. Il s'agit d'utiliser les formules de trigonométrie :

$$\begin{aligned} e^{i\theta_1} e^{i\theta_2} &= (\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2) \\ &= (\cos\theta_1\cos\theta_2 - \sin\theta_1\sin\theta_2) + i(\sin\theta_1\cos\theta_2 + \cos\theta_1\sin\theta_2) \\ &= \cos(\theta_1+\theta_2) + i\sin(\theta_1+\theta_2) = e^{i(\theta_1+\theta_2)}. \end{aligned}$$

Astuce
Si on utilise ici les formules d'addition pour prouver le résultat, c'est un bon moyen de les retrouver si on les oublie : $\cos(\theta_1 + \theta_2)$ est la partie réelle de $e^{i\theta_1} e^{i\theta_2}$.

5. On a $e^{i\theta} e^{-i\theta} = e^{i(\theta-\theta)} = 1$. Et donc $e^{-i\theta} = \dfrac{1}{e^{i\theta}}$.
Et puisque $e^{i\theta}$ est de module 1, son inverse est égal à son conjugué, de sorte que $\overline{e^{i\theta}} = \dfrac{1}{e^{i\theta}} = e^{-i\theta}$.

6. $\dfrac{e^{i\theta_1}}{e^{i\theta_2}} = e^{i\theta_1}\dfrac{1}{e^{i\theta_2}} = e^{i\theta_1}e^{-i\theta_2} = e^{i(\theta_1-\theta_2)}$.

□

0.2.3 Forme exponentielle d'un nombre complexe, argument(s)

Proposition 0.26 : *Soit $z \in \mathbf{C}$. Alors il existe $(r, \theta) \in \mathbf{R}_+ \times \mathbf{R}$ tel que*

$$z = r(\cos\theta + i\sin\theta) = re^{i\theta}.$$

On a alors $r = |z|$, et si $z \neq 0$, alors θ est unique modulo 2π, autrement dit si r_1, r_2 sont deux réels strictement positifs, et si θ_1, θ_2 sont deux réels tels que $z = r_1e^{i\theta_1} = r_2e^{i\theta_2}$, alors $r_1 = r_2 = |z|$ et $\theta_1 \equiv \theta_2 \quad [2\pi]$.

Démonstration. Si $z = 0$, alors pour tout $\theta \in \mathbf{R}$, $z = 0e^{i\theta}$.
Et si $z \neq 0$, alors $\frac{z}{|z|}$ est de module 1, donc dans $\mathbf{U}$.
Par conséquent, il existe θ tel que $\frac{z}{|z|} = e^{i\theta}$ donc $z = \underbrace{|z|}_{\in\mathbf{R}_+} e^{i\theta}$.
Si $z \in \mathbf{C}$ s'écrit $z = re^{i\theta}$, avec $r > 0$ et $\theta \in \mathbf{R}$, alors $|z| = |r| \underbrace{\left|e^{i\theta}\right|}_{=1} = r$.
Et donc pour $z \neq 0$, si $z = r_1e^{i\theta_1} = r_2e^{i\theta_2}$, alors $r_1 = r_2 = |z| \neq 0$, de sorte que $e^{i\theta_1} = e^{i\theta_2}$ et donc $\theta_1 \equiv \theta_2 \ [2\pi]$. □

L'écriture $z = re^{i\theta}$, avec $r \in \mathbf{R}_+$ est appelée **forme exponentielle** de z.
Notons que cette écriture est particulièrement bien adaptée au calcul de produits, puisque si $z_1 = r_1e^{i\theta_1}$ et $z_2 = r_2e^{i\theta_2}$, alors $z_1z_2 = r_1r_2e^{i(\theta_1+\theta_2)}$.

Méthode
Bien qu'il soit possible de calculer des produits/quotients de complexes sous forme algébrique, on privilégiera autant que possible la forme exponentielle.

⚠ Méfions tout de même d'une chose : r doit être positif, et pas seulement réel !
Par exemple, $z = -2e^{i\pi/6}$ n'est pas une forme exponentielle, car son module ne peut valoir -2.
En revanche, en notant que $-1 = e^{i\pi}$, alors $z = 2e^{7i\pi/6}$, qui est bien une écriture sous forme exponentielle, avec 2 pour module.

Remarque. Notons que si $z = re^{i\theta}$, alors $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$, cette écriture étant parfois appelée **forme trigonométrique** du complexe z.
On lui préférera toutefois la forme exponentielle, qui lui est équivalente et est plus facile à manipuler.

Définition 0.27 – Soit $z \in \mathbf{C}$. On appelle **argument** de z tout réel θ tel que $z = |z|e^{i\theta}$.
Si z est non nul, et possède θ comme argument, alors les arguments de z sont exactement les éléments de $\theta + 2\pi\mathbf{Z} = \{\theta + 2k\pi,\ k \in \mathbf{Z}\}$.
En revanche, $z \in \mathbf{C}^*$ possède un unique argument dans $]-\pi, \pi]$, qu'on appelle **argument principal de** z, et qu'on note $\arg(z)$.

Autrement dit
Deux arguments de z sont congrus modulo 2π.

Remarques. ▸ Géométriquement, si M est le point d'affixe $z \neq 0$, alors $\arg(z)$ est l'angle $\left(\vec{i}, \overrightarrow{OM}\right)$.

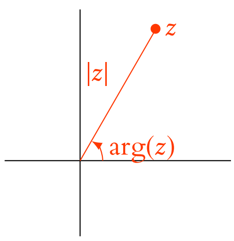


FIGURE 0.6 – Interprétation graphique de la forme exponentielle d'un complexe.

Puisque $|z|$ est la distance OM, définir un complexe par sa forme exponentielle $re^{i\theta}$, c'est définir M par sa distance à l'origine et l'angle $\left(\vec{i}, \overrightarrow{OM}\right)$.

Et de même, si $\vec{u}$ a pour affixe $z = re^{i\theta}$, alors $r = \|\vec{u}\|$ et $\theta \equiv \left(\vec{i}, \vec{u}\right) \quad [2\pi]$.

► Un complexe non nul z est un réel positif si et seulement si $\arg(z) = 0$ et c'est un réel négatif si et seulement si $\arg(z) = \pi$.
Enfin, $z \in i\mathbf{R}$ si et seulement si $\arg(z) = \pm\dfrac{\pi}{2} \quad [\pi]$.

Méthode

Déterminer un argument d'un complexe non nul z, c'est déterminer un $\theta \in \mathbf{R}$ tel que $z = |z|e^{i\theta}$, soit encore $\dfrac{z}{|z|} = e^{i\theta}$.
On commencera donc systématiquement par calculer $|z|$, puis par factoriser z par ce module de manière à obtenir un complexe de module 1, qui est donc de la forme $e^{i\theta}$, la valeur de θ restant à déterminer.

Exemples 0.28

► $-i = 0 - i = \cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) = e^{-i\frac{\pi}{2}}$.
Ceci est cohérent avec le fait que $-i = \dfrac{1}{i} = \dfrac{1}{e^{i\frac{\pi}{2}}} = \overline{e^{i\frac{\pi}{2}}} = e^{-i\frac{\pi}{2}}$.

► Soit $z = 1 + i$. Alors $|z| = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$.
Et alors

$$z = \sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}} + i\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}.$$

Donc $\dfrac{\pi}{4}$ est un argument de z, et même l'argument principal de z.

► Soit $z = \sqrt{3} - 3i$. Alors $|z| = \sqrt{(\sqrt{3})^2 + (-3)^2} = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$.
Et donc

$$z = 2\sqrt{3}\left(\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 2\sqrt{3}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right) = 2\sqrt{3}e^{-i\frac{\pi}{3}}.$$

Donc $-\dfrac{\pi}{3}$ est l'argument principal de z.
Notons que $\dfrac{5\pi}{3} = -\dfrac{\pi}{3} + 2\pi$ est également un argument de z.

Terminologie

Avez-vous bien saisi la subtilité ? <u>Un</u> argument et pas <u>l</u>'argument, mais si on parle d'argument principal, alors il y en a un seul, qu'on appelle donc <u>l</u>'argument principal.

Proposition 0.29 : *Soient z, z' deux complexes non nuls. Alors*

1. $\arg(zz') \equiv \arg(z) + \arg(z') \quad [2\pi]$
2. $\arg\left(\dfrac{1}{z}\right) = \arg\left(\overline{z}\right) \equiv -\arg(z) \quad [2\pi]$
3. $\forall n \in \mathbf{Z}$, $\arg\left(z^n\right) \equiv n\arg(z) \quad [2\pi]$

Démonstration.

1. Si $z = re^{i\theta}$ et $z' = r'e^{i\theta'}$, alors $zz' = rr'e^{i(\theta+\theta')}$, de sorte que $\theta+\theta' = \arg(z)+\arg(z')$ est un argument de zz'. Et donc est congru à $\arg(zz')$ modulo 2π.
2. Si $z = re^{i\theta}$, alors $\overline{z} = re^{-i\theta}$. Et donc $-\theta$ est un argument de $\overline{z}$. Notons que sauf si $\theta = \pi$, $-\arg(z)$ est dans $]-\pi, \pi]$ et donc est égal à $\arg\left(\overline{z}\right)$.
3. Si $n \geqslant 0$, la preuve se fait par récurrence en utilisant le point 1.
   Et si $n < 0$, il suffit de noter que $z^n = \left(\dfrac{1}{z}\right)^{-n}$, avec $-n \geqslant 0$. Et donc

$$\arg(z^n) \equiv -n\arg\frac{1}{z} \equiv n\arg(z) \quad [2\pi].$$

□

Égal ou congru ?

Si

$$\arg(z) + \arg(z') \in]-\pi, \pi]$$

alors c'est l'argument principal de zz', mais sinon il faut ajouter $\pm 2\pi$ à $\theta + \theta'$ pour tomber dans l'intervalle $]-\pi, \pi]$.

Revenons sur le cas d'égalité dans l'inégalité triangulaire : si $z_1 \neq 0$ alors nous avons prouvé que $|z_1 + z_2| = |z_1| + |z_2|$ si et seulement si il existe $\lambda \in \mathbf{R}_+$ tel que $z_2 = \lambda z_1$.
Mais alors, si $z_1 = re^{i\theta}$, il vient donc $z_2 = \underbrace{\lambda r}_{\in\mathbf{R}_+} e^{i\theta_1}$.

Et donc z_1 et z_2 ont même argument θ_1.
Et inversement, si z_1 et z_2 ont même argument θ, $z_1 = |z_1|e^{i\theta}$, $z_2 = |z_2|e^{i\theta}$ et donc en posant $\lambda = \dfrac{|z_2|}{|z_1|} \in \mathbf{R}_+$, on a $z_2 = \lambda z_1$, et donc il y a égalité dans l'inégalité triangulaire.
On retiendra donc que $|z_1+z_2| = |z_1|+|z_2|$ si et seulement si $z_1z_2 = 0$, ou si $\arg(z_1) = \arg(z_2)$.

0.2.4 Formules de Moivre et d'Euler

Proposition 0.30 (Formules d'Euler) : *Soit $\theta \in \mathbf{R}$. Alors*

$$\cos\theta = \frac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2} \quad \text{et} \quad \sin\theta = \frac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2i}.$$

Démonstration. C'est un simple calcul : $e^{i\theta}+e^{-i\theta} = e^{i\theta}+\overline{e^{i\theta}} = 2\,\mathrm{Re}\left(e^{i\theta}\right) = 2\cos\theta$ et de même

$$e^{i\theta}-e^{-i\theta} = e^{i\theta}-\overline{e^{i\theta}} = 2i\,\mathrm{Im}\left(e^{i\theta}\right) = 2i\sin\theta.$$

□

Exemples 0.31 Factorisation par l'angle moitié

Il est souvent judicieux de factoriser $e^{ia} \pm e^{ib}$ par $e^{i(a+b)/2}$.
Par exemple, on a

$$e^{ia}-e^{ib} = e^{i(a+b)/2}\left(e^{i(a-b)/2}-e^{i(b-a)/2}\right) = e^{i(a+b)/2}\left(e^{i(a-b)/2}-e^{-i(a-b)/2}\right) = 2i\sin\left(\frac{a-b}{2}\right)e^{i(a+b)/2}.$$

Ceci permet notamment d'obtenir à peu de frais le module et un argument de $e^{ia} \pm e^{ib}$.
Par exemple

$$e^{i\frac{\pi}{6}}+e^{i\frac{\pi}{4}} = e^{i\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{4}\right)}\left(e^{i\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{6}-\frac{\pi}{4}\right)}+e^{i\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{6}\right)}\right) = 2\cos\left(\frac{\pi}{24}\right)e^{i\frac{5\pi}{24}}.$$

Puisque $2\cos\left(\dfrac{\pi}{24}\right) > 0$, c'est bien un module, et on a donc $\left|e^{i\frac{\pi}{6}}+e^{i\frac{\pi}{4}}\right| = 2\cos\left(\frac{\pi}{24}\right)$ et $\arg\left(e^{i\frac{\pi}{6}}+e^{i\frac{\pi}{4}}\right) = \dfrac{5\pi}{24}$.

De même, on a

$$\begin{aligned} 1-e^{i\frac{\pi}{6}} &= e^{i0}-e^{i\frac{\pi}{6}} = e^{i\frac{\pi}{12}}\left(e^{-i\frac{\pi}{12}}-e^{i\frac{\pi}{12}}\right) = -2i\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)e^{i\frac{\pi}{12}} \\ &= 2\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)e^{-i\frac{\pi}{2}}e^{i\frac{\pi}{12}} = 2\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)e^{-i\frac{5\pi}{12}} \end{aligned}$$

Détails
$-i = e^{-i\frac{\pi}{2}}$.

si bien que $\left|1-e^{i\frac{\pi}{6}}\right| = 2\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)$ et $\arg\left(1-e^{i\frac{\pi}{6}}\right) = -\dfrac{5\pi}{12}$.
Cette astuce permet notamment de retrouver certaines formules de trigonométrie : si θ, θ' sont deux réels, alors $\cos\theta+\cos\theta'$ est la partie réelle de $e^{i\theta}+e^{i\theta'}$. Mais

$$e^{i\theta}+e^{i\theta'} = e^{i\frac{\theta+\theta'}{2}}\left(e^{\frac{i\theta-\theta'}{2}}+e^{-i\frac{\theta-\theta'}{2}}\right) = 2e^{i\frac{\theta+\theta'}{2}}\cos\frac{\theta-\theta'}{2}.$$

Mais la partie réelle du membre de droite est $2\cos\dfrac{\theta+\theta'}{2}\cos\dfrac{\theta-\theta'}{2}$ et donc

$$\cos\theta+\cos\theta' = 2\cos\frac{\theta+\theta'}{2}\cos\frac{\theta-\theta'}{2}.$$

Exemple 0.32 **Application à la trigonométrie : linéarisation**

Linéarisons $\sin^3(\theta)$, c'est-à-dire essayons de l'écrire comme somme de fonctions de la forme $\theta \mapsto \cos(k\theta)$ ou $\theta \mapsto \sin(k\theta)$. On a

$$\begin{aligned}
\sin^3\theta &= \left(\frac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2i}\right)^3 \\
&= \frac{1}{(2i)^3}\left(e^{i\theta}-e^{-i\theta}\right)^2\left(e^{i\theta}-e^{-i\theta}\right) \\
&= \frac{1}{-8i}\left(e^{2i\theta}-2\underbrace{e^{i\theta}e^{-i\theta}}_{=1}+e^{-2i\theta}\right)\left(e^{i\theta}-e^{-i\theta}\right) \\
&= \frac{1}{-8i}\left(e^{3i\theta}-3e^{i\theta}+3e^{-i\theta}-e^{-3i\theta}\right) \\
&= \frac{1}{-8i}\left(2i\sin(3\theta)-6i\sin(\theta)\right) \\
&= \frac{3}{4}\sin(\theta)-\frac{1}{4}\sin(3\theta).
\end{aligned}$$

Cette écriture est particulièrement intéressante lorsqu'on cherche à déterminer une primitive de $\theta \mapsto \sin^3\theta$. Une telle primitive est par exemple

$$\theta \mapsto -\frac{3}{4}\cos(\theta)+\frac{1}{12}\cos(3\theta).$$

Proposition 0.33 (Formule de Moivre) : *Soit $\theta \in \mathbf{R}$. Alors*

$$(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos(n\theta)+i\sin(n\theta).$$

Démonstration.

$$(\cos\theta+i\sin\theta)^n = \left(e^{i\theta}\right)^n = e^{in\theta} = \cos(n\theta)+i\sin(n\theta).$$

□

0.3 Équations du second degré à coefficients réels

Nous savons déjà que i est un nombre dont le carré vaut -1, autrement dit, une racine carrée de -1. Mais alors $(2i)^2 = 4i^2 = -4$, si bien que $2i$ est une racine carrée de -4.
Et de même, $(-2i)^2 = -4$, donc $-2i$ est également une racine carrée de -4.

Plus généralement, si a est un réel strictement négatif, alors il existe deux racines carrés de a dans $\mathbf{C}$, c'est-à-dire deux nombres complexes qui élevés au carré valent a.
Il s'agit de $i\sqrt{-a}$ et $-i\sqrt{-a}$.
Ce sont même les seuls, puisque si $z \in \mathbf{C}$, alors

$$z^2 = a \Leftrightarrow z^2 = (i\sqrt{-a})^2 \Leftrightarrow z^2-(i\sqrt{-a})^2 = 0 \Leftrightarrow (z-i\sqrt{-a})(z+i\sqrt{-a}) = 0 \Leftrightarrow z = i\sqrt{-a} \textbf{ ou } z = -i\sqrt{-a}.$$

Ainsi, tout nombre réel possède au moins une racine carrée complexe.
Ceci nous autorise alors à chercher également les solutions complexes à des équations polynomiales du second degré de la forme $ax^2+bx+c = 0$, avec $a, b, c \in \mathbf{R}$.
Si la méthode ne va pas du tout changer par rapport à ce que vous avec appris en première, la principale différence va venir du fait que même si le discriminant Δ est négatif, l'équation possédera toujours des solutions complexes.

Notation

Même si on a très envie de noter $i = \sqrt{-1}$, nous ne le ferons pas, et continuerons de réserver les notations $\sqrt{x}$ ou $x^{1/2}$ au seul cas où nous les connaissons déjà : le cas où x est un réel **positif**.

Théorème 0.34 : *Soient a, b, c trois réels avec $a \neq 0$ et soit $\Delta = b^2 - 4ac$.*

1. *Si $\Delta = 0$, alors l'équation $az^2 + bz + c = 0$, d'inconnue z possède une unique solution dans $\mathbf{C}$ qui est $z = -\dfrac{b}{2a}$.*
2. *Si $\Delta > 0$, alors l'équation $az^2 + bz + c = 0$ possède deux solutions réelles qui sont $z_1 = \dfrac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$ et $z_2 = \dfrac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$.*
3. *Si $\Delta < 0$, alors l'équation $az^2 + bz + c = 0$ possède deux solutions complexes qui sont $z_1 = \dfrac{-b + i\sqrt{-\Delta}}{2a}$ et $z_2 = \dfrac{-b - i\sqrt{-\Delta}}{2a}$.*

Terminologie

Δ est appelé le **discriminant** de l'équation.

Remarque

Ces solutions ont deux complexes conjugués, de partie imaginaire non nulle, et donc ne sont pas des réels. L'équation ne possède donc toujours pas de racine réelle.

Démonstration. Si $\Delta \geqslant 0$, notons $\delta = \sqrt{\Delta}$, et si $\Delta < 0$, notons $\delta = i\sqrt{-\Delta}$, de sorte qu'on a toujours $\delta^2 = \Delta$.
On a alors, pour tout $z \in \mathbf{C}$

$$\begin{aligned}
az^2 + bz + c &= a\left[z^2 + \frac{b}{a}z + \frac{c}{a}\right] \\
&= a\left[\left(z + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a}\right] \\
&= a\left[\left(z + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2}\right] \\
&= a\left[\left(z + \frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{\delta}{2a}\right)^2\right] \\
&= a\left(z + \frac{b}{2a} + \frac{\delta}{2a}\right)\left(z + \frac{b}{2a} - \frac{\delta}{2a}\right). \qquad (\star)
\end{aligned}$$

Méthode

Cette étape est la mise sous forme canonique d'un polynôme de degré 2, qu'il est bon de savoir refaire. Rappelons que la méthode est simple : il s'agit de «trouver» le bon λ de sorte que les termes en z^2 et en z soient ceux qui apparaissent en développant $(z + \lambda)^2$.

Identité remarquable.

Et donc

$$\begin{aligned}
az^2 + bz + c = 0 &\Leftrightarrow a\left(z + \frac{b}{2a} + \frac{\delta}{2a}\right)\left(z + \frac{b}{2a} - \frac{\delta}{2a}\right) = 0 \\
&\Leftrightarrow z + \frac{b}{2a} + \frac{\delta}{2a} = 0 \text{ ou } z = z + \frac{b}{2a} - \frac{\delta}{2a} \\
&\Leftrightarrow z = \frac{-b + \delta}{2a} \text{ ou } z = \frac{-b - \delta}{2a}.
\end{aligned}$$

Si $\Delta = 0$, alors ces deux nombres sont confondus, et sinon, ils sont distincts.
Dans les deux cas, les factorisations annoncées découlent directement de $(\star)$. □

Exemple 0.35

Résolvons l'équation $z^2 - 4z + 13 = 0$.
Son discriminant est $\Delta = (-4)^2 - 4 \times 13 = -36 < 0$.
Donc l'équation n'admet pas de solution réelle, mais possède deux solutions complexes conjuguées, qui sont

$$z_1 = \frac{4 + i\sqrt{-\Delta}}{2} = \frac{4 + i\sqrt{36}}{2} = 2 + 3i \text{ et } z_2 = 2 - 3i.$$

Astuce

Lorsque $\Delta < 0$, une fois que l'on a calculé une des racines, l'autre est le conjugué de la première.

Notons en particulier que l'équation $z^2 + 1 = 0$, dont le discriminant vaut $\Delta = -1 < 0$ possède i et $-i$ comme uniques racines.
Donc i et $-i$ sont les seuls nombres complexes dont le carré vaut -1.