PSI* 23 - 24

DM N°6 - Pour le 02 février 2024

Exercice 1 : Justesse d'un piano (X-ENS Extrait)

Nous étudions les vibrations d'une corde métallique, cylindrique, tendue entre deux points fixes. Cette corde est caractérisée par :

- Sa longueur L et son rayon r ;
- Sa masse volumique ρ (ou sa masse linéique $\mu = \pi\, r^2\rho$) et son module d'Young E ;
- Sa tension N

La corde d'un piano est initialement fortement tendue. Nous pouvons alors considérer que l'élongation due aux vibrations ne modifie pas sa tension. Dans ce cadre, rappelons que l'équation d'évolution s'écrit :

$$\frac{\partial^2 Y}{\partial t^2} - c^2\frac{\partial^2 Y}{\partial x^2} + A\frac{\partial^4 Y}{\partial x^4} = 0 \quad \text{où, dans ce cas,} \quad A = \frac{r^2 E}{4\rho} \tag{12}$$

Le terme supplémentaire par rapport à l'équation de D'Alembert tient compte de la raideur de la corde, caractérisée par le module d'Young, E.

IV.A Anharmonicité d'une corde réelle.

Nous recherchons les solutions de cette équation sous la forme :

$$Y(x,t) = \mathrm{Re}[\underline{Y}] \quad \text{avec} \quad \underline{Y} = f(x)\,\exp(i\omega t) \quad \text{et} \quad f \in \mathbb{C} \tag{13}$$

32. Établir l'équation différentielle vérifiée par la fonction f. On posera $D = A/c^2$ et $k = \omega/c$.

33. La fonction f est de la forme :

$$f(x) = F_1\,\sin(K_I x) + F_2\,\cos(K_I x) + F_3\,\sinh(K_R x) + F_4\,\cosh(K_R x) \tag{14}$$

où les constantes F_i sont complexes et les constantes K_I et K_R réelles positives.
Expliciter K_I et K_R en fonction des paramètres D et k.

Le système de fixation des cordes permet d'imposer les conditions aux limites :

$$f(0) = f(L) = 0 \quad \text{et} \quad f''(0) = f''(L) = 0 \tag{15}$$

35. Préciser la fonction f ainsi que la série des paramètres K_I autorisés .

36. À chaque valeur de K_I correspond un mode de fréquence ν_n ($n = 1$ pour le mode de fréquence la plus faible). Établir que :

$$\nu_n = n\,\nu_0\sqrt{1 + Bn^2} \tag{16}$$

où ν_0 est la fréquence du fondamental pour $B = 0$ (corde vibrante "classique").
Préciser l'expression du terme d'anharmonicité B, d'abord en fonction de r, E, N et L, puis en fonction de r, E, L, ρ et ν_0.

37. Comment réduire l'anharmonicité du son ? Vers quel système la corde de piano tend-elle alors, et pourquoi ?

> Pour la suite on indique que l'écart de deux notes de la gamme tempérée séparée par un demi-ton ont un rapport de fréquence égal à $2^{1/12}$; d'autre part, Le rapport minimum de fréquence sensible par l'oreille humaine aux fréquences usuelles (vers 500 – 2500 Hz) est de l'ordre de 1,006.

Les deux exemples de piano que nous allons considérer sont des cas extrêmes et simplifiés. La structure réelle des cordes de piano de concert est plus complexe (âme en cuivre, entourée d'acier torsadé).

38. La corde du la2 (220 Hz) d'un piano droit mesure $67,7$ cm et son diamètre est égal à $0,96$ mm ($B = 3,5 \times 10^{-4}$).
Calculer la fréquence de la dixième harmonique (encore très présente dans le timbre d'un piano). Placer ce résultat entre la fréquence de l'harmonique parfaite et le demi-ton supérieur ($\sqrt[12]{2} = 1,059$). Commenter ce résultat.

39. La corde du la2 d'un piano à queue, réalisée dans le même acier, mesure $170,1$ cm, pour un diamètre de $0,79$ mm. Dans quel rapport B est-il réduit ? Quelle en est la conséquence ?

40. Un piano dispose de 88 notes. Pour estimer la force totale exercée sur le cadre, nous considérons que pour chaque note il y a trois cordes et que toutes les cordes subissent la tension correspondant au la2.
Avec les données précédentes, estimer la force totale exercée par les cordes dans un piano droit et dans un piano à queue ($\rho = 8000\,\mathrm{kg \cdot m^{-3}}$).

Exercice 2 : Vibrations de cymbales (Central PC extrait)

Les cymbales sont des plateaux circulaires en métal que l'on frappe pour obtenir un son. Contrairement aux lames de clavier étudiées dans les questions précédentes, elles ne produisent pas un son de hauteur bien définie. Bien qu'une cymbale possède une forme incurvée, nous les assimilerons à de fines plaques planes circulaires de rayon R et d'épaisseur b contenues au repos dans le plan (Oxz). Dans ce cadre, les vibrations transversales consécutives à l'excitation de la surface par un choc obéissent à une équation voisine de celle de la question I.B.3

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + \frac{c_l^2 b^2}{12(1-\sigma^2)}\left(\frac{\partial^4 y}{\partial x^4} + \frac{\partial^4 y}{\partial z^4} + 2\frac{\partial^4 y}{\partial x^2 \partial z^2}\right) = 0 \text{ avec } \sigma = 0,34 .$$

y(x, z, t) est la déformation verticale de la cymbale

I.D.1) On envisage la propagation d'une onde plane progressive du type

$$y(x, z, t) = y_0 \exp\{ i[\omega t - \boldsymbol{k} \cdot (x\boldsymbol{u}_x + z\boldsymbol{u}_z)]\} .$$

k est le vecteur d'onde de coordonnées (k_x, k_z)

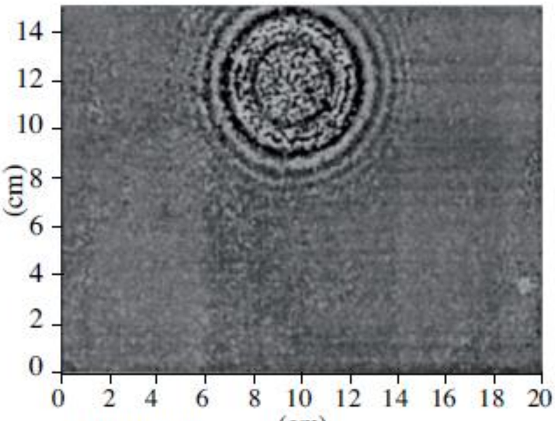

Figure 4a

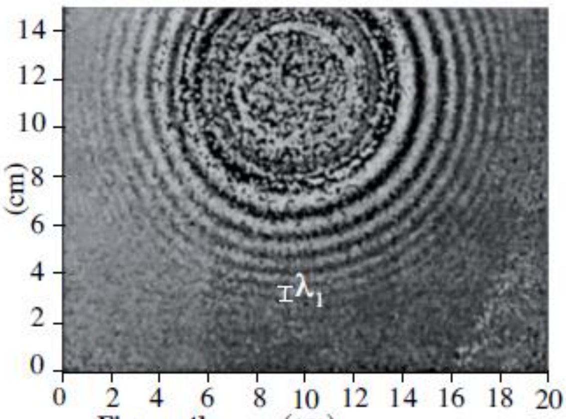

Figure 4b

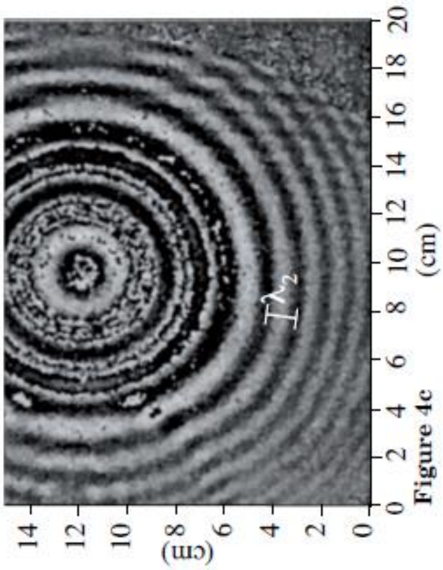

Figure 4c

Figure 4a - 4b - 4c - État vibratoire d'une cymbale à trois instants suivant une excitation ponctuelle :

$t = 30\mu s, t = 60\mu s, t = 120\mu s$

On rappelle que la vitesse de phase d'une onde PPM est définie par $v_\varphi = \frac{\omega}{k}$.

Établir la relation entre ω et $k = |\mathbf{k}|$. En déduire l'expression de la fréquence f en fonction de la longueur d'onde λ.

I.D.2) Exprimer la vitesse de phase v_φ en fonction de la longueur d'onde λ. La propagation est-elle dispersive ?

I.D.3) La figure 4 représente l'état vibratoire d'une cymbale de bronze à divers instants suivant une excitation ponctuelle. L'observation confirme-t-elle la réponse de la question précédente ? Expliquer.

I.D.4) On a signalé sur la figure 4 des déformations de longueurs d'onde respectives $\lambda_1 = 6\ \text{mm}$ et $\lambda_2 = 12\ \text{mm}$. En exploitant les images, déterminer $v_\varphi(\lambda_1)$ et $v_\varphi(\lambda_2)$. Comparer quantitativement ces deux valeurs et confronter le résultat à la prédiction théorique de la question I.D.2. Sachant que la cymbale est en bronze, déterminer son épaisseur b.

Pour le bronze, on donne $c_l = \sqrt{\frac{E}{\rho}}$, où E est le module d'Young du matériau, $E = 1.1\ 10^{11}$ Pa, et

ρ sa masse volumique, $\rho = 8.7\ 10^{3}\ \text{kg.m}^{-3}$.