EFFETS DE PEAU.

1) η en Pa s par $F = \eta S \frac{\partial v}{\partial x}$

ρ en kg m^{-3} par $\rho = \frac{m}{V}$ (...)

λ en W m^{-1} K^{-1} par $j = -\lambda \frac{\partial T}{\partial x}$

c en J kg^{-1} K^{-1} par $dH = mc\,dT$

2) $\frac{\lambda}{\rho c}$ et $\frac{\eta}{\rho}$ sont en m^{2}s^{-1} (ce sont des diffusivités) ; donc les 2 quantités sont des longueurs.

3) $\vec{j} = \gamma \vec{E}$ et $\vec{rot}\,\vec{B} = \mu_0 \vec{j} + \frac{1}{c^2}\frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$

d'où $\mu_0 \gamma \vec{E}$ et $\frac{1}{c^2}\frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$ ont la même unité et donc $\mu_0 \gamma$ est en m^{-2} s

$\frac{1}{\mu_0 \gamma}$ en m^2 s^{-1} est aussi une diffusivité.

En utilisant les résultats de 2 et 3, on voit que $\sqrt{\frac{2}{(\mu_0\gamma)\omega}}$ est une longueur possible (le "2" n'a pas d'importance, je le mets par analogie avec les expressions du 2).

4) Il suffit d'injecter les solutions dans l'équation...

5) $\vec{J} = \sigma_0 \vec{E}$ et comme $\vec{E} = -\vec{grad} V$ est uniforme, $\vec{E} = \frac{U}{L}\vec{e_z}$, d'où

$\vec{J} = \sigma_0 \frac{U}{L}\vec{e_z}$.

6) $I = \iint \vec{J}\cdot d\vec{S} = \sigma_0 \frac{U}{L} S = \sigma_0 \frac{U}{L}\pi R^2$,

d'où $R = \frac{L}{\pi R^2 \sigma_0}$ et $R_{lin} = \frac{1}{\pi R^2 \sigma_0}$

AN : 6,5 mΩ/m.

7) Comparons j et j_D :

$j \sim \gamma E$ et $j_D \sim \varepsilon_0 f E$ soit à comparer $\frac{\gamma}{\varepsilon_0}$ et f avec $f < 10^{12}$ Hz

et $\frac{\gamma}{\varepsilon_0} = 7{,}6\ 10^{18} \gg 10^{12}$ Hz. D'où le résultat

(8) On utilise les équations de Maxwell $\vec{rot}\,\frac{\vec{j}}{\sigma} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$ et $\vec{rot}\,\vec{B} = \mu_0 \vec{j}$; en prenant

$\vec{rot}(\vec{rot}\,\vec{j}) = \vec{grad}(\mathrm{div}\,\vec{j}) - \Delta\vec{j}$

et $\vec{rot}\,\vec{j} = -\sigma_0 \frac{\partial\vec{B}}{\partial t}$: $\vec{rot}\left(-\sigma\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}\right) = \vec{grad}(\mathrm{div}\,\vec{j}) - \Delta \vec{j}$,

soit $-\sigma_0 \frac{\partial}{\partial t}\mu_0\vec{j} = -\Delta\vec{j} + \vec{grad}(\mathrm{div}\,\vec{j})$.

Montrons que $\mathrm{div}\,\vec{j} = 0$:

$\mathrm{div}\,\vec{j} = \mathrm{div}\,\frac{\vec{E}}{\sigma_0} = \rho/\varepsilon_0$. Or $\frac{\partial\rho}{\partial t} + \mathrm{div}\,\vec{j} = 0$

soit $\frac{\partial\rho}{\partial t} + \frac{\sigma_0}{\varepsilon_0}\rho = 0$; la constante de temps qui fait tendre ρ vers 0 vaut 10^{-19} s (!), donc $\rho = 0$, $\forall t$. Il reste alors

$$\Delta\vec{j} = \mu_0\sigma_0\frac{\partial\vec{j}}{\partial t}.$$

(9) En projetant sur z :

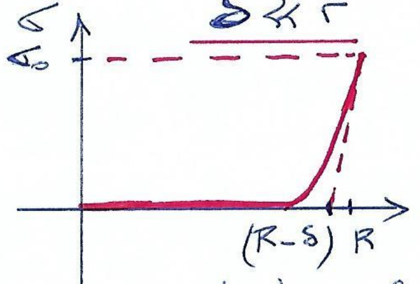
$$\Delta J_0(r) = \mu_0\sigma_0\, i\omega\, J_0(r)$$

soit $$\frac{d^2J_0(r)}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{dJ_0(r)}{dr} = i\omega\mu_0\sigma_0 J_0(r) = \frac{2i}{\delta^2}.$$

(10) $\delta = 2\ \mu m$ environ

$r = \sqrt{\frac{S}{\pi}} = 900\ \mu m$ environ donc, $\delta \ll r$

(11)



l'équaθ de la tangente est $\sigma_0\left[1 + \frac{r-R}{\delta}\right]$ qui vaut σ_0 en R et s'annule pour $r = R - \delta$.

(12) Le champ ne pénètre que sur l'épaisseur δ et donc σ n'est non nul (et vaut σ_0) que sur l'épaisseur δ : il faut donc remplacer un fil de rayon $R \gg \delta$ par un grand nombre de fils très fins de rayons $a \sim \delta$.

(13) La section vaut $2\pi r\,dr$ et la longueur L donc $dG = \sigma(r)\,\frac{2\pi r\,dr}{L}$

(14) On somme les conductances car les ≠ conducteurs élémentaires sont en //

$$G = \int_0^R \frac{2\pi r}{L} \sigma_0 e^{+\frac{r-R}{\delta}} dr$$ qui s'intègre par parties : $$G = \left[\left[r\delta e^{\frac{r-R}{\delta}} \right]_0^R - \int_0^R \delta e^{\frac{r-R}{\delta}} dr \right] \frac{2\pi\sigma_0}{L}$$

soit $$G = \frac{2\pi\sigma_0}{L}\left(\delta R - \delta^2 + \delta^2 e^{-R/\delta} \right)$$

Si $\delta \ll R$ il reste uniquement le terme δR, soit $G = \frac{2\pi R}{L}\delta . \sigma_0$ ou encore $G = \frac{\sigma_0 S}{L}$ avec $S = 2\pi R\delta$: le courant ne circule que sur l'épaisseur de peau δ.

15 Voir cours : $\frac{\partial T}{\partial t} = a \frac{\partial^2 T}{\partial z^2}$.

16 a est en $m^2 s^{-1}$ (cf. 2).

17 Fourier + superposition.

18 En injectant la forme proposée et en simplifiant par $e^{j\omega t}$

$$a \frac{d^2 \underline{f}}{dz^2} - i\omega \underline{f} = 0.$$

19 Avec 4 on identifie $\frac{i\omega}{a}$ et $2i\alpha^2$ soit $1/\alpha = \pm \sqrt{\frac{2a}{\omega}} = \pm\delta$

et les solutions sont

$$\underline{f}(z) = A e^{-((1+i)/\delta)z} + B e^{+((1+i)/\delta)z}.$$

Cependant la température ne peut tendre vers l'∞ donc physiquement on doit prendre $B = 0$.

$$\underline{f}(z) = A \exp\left[-\frac{1+i}{\delta} z \right].$$

20 $\delta = 7,4$ cm pour un jour
$\delta = 1,4$ m pour un an.

21 Il faut empêcher que la température ne baisse à moins de 0°C pour éviter le gel dans les canalisations. Donc il faut que la décroissance exponentielle soit efficace à 80 cm, ce qui est le cas puisque $\delta = 1,4$ m $\left(e^{-0,8/1,4} \simeq \frac{1}{2}\right)$

(22) Si le fluide est suffisamment visqueux, donc Re suffisamment faible, l'écoulement est laminaire et $\vec{v} = v\,\vec{e}_x$, puisque l'excitation $V_0\cos(\omega t)$ est suivant $\vec{e}_x$. La plaque est, de plus, infinie et $V_0 \cos \omega t$ est uniforme donc v ne dépend ni de x ni de y donc $\vec{v} = v(z)\,\vec{e}_x$

(B : bien sûr $v = f(t \ldots)$).

(23) $(\vec{v}\cdot\overrightarrow{\text{grad}})\vec{v} = \vec{0}$

En effet $v_y = v_z = 0$ et v_x ne dépend pas de x.

Projetons N.S.

$$\rho\frac{\partial v}{\partial t} = -\frac{\partial P}{\partial x} + \eta\frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \quad \text{sur } x.$$

$$\frac{\partial P}{\partial z} = \frac{\partial P}{\partial y} = 0 \quad \text{soit } P(x)\text{ ; donc}$$

$$-\rho\left(\frac{\partial v}{\partial t}\right)(z,t) + \eta\left(\frac{\partial^2 v}{\partial z^2}\right)(z,t) = -\frac{dP}{dx}$$

et ce $\forall (t, z, x)$. Les deux membres peuvent varier indépendamment et sont donc égaux à une même constante K qui est nulle d'après l'énoncé ($\frac{dP}{dx} = 0$ pouvant se justifier par invariance du système par translation suivant x).

ainsi $\nu_c = \eta/\rho$ et $\frac{\partial v}{\partial t} = \nu_c \frac{\partial^2 v}{\partial z^2}$

(24) C'est la même chose que précédemment :

$$\underline{f}(z) = A\exp\left(-(i+1)\frac{z}{\delta}\right) \text{ avec}$$

$\delta = \sqrt{\frac{2\nu_c}{\omega}}$. En écrivant la condition d'adhérence en $z=0$, il vient $A = v_0$.

et $\vec{v}(z,t) = v_0 \exp(-z/\delta)\cos(\omega t - z/\delta)\vec{e}_x$

atténuation ←   ← Propagation

(25) $\delta = 13$ mm   (26) 5,6 cm à 1 Hz et 1,8 cm à 10 Hz. Les ondes ne se propagent pas.