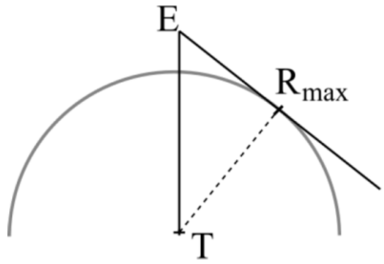
DM N°8 CORRIGE

☐ - **16.**



Soit R_{max} le point situé à la surface de la Terre, qui se situe à la plus grande distance possible de E. La droite portée par E et R_{max} est tangente à la Terre en R_{max}.

Le triangle ETR_{max} est rectangle en R_{max}. On en déduit à l'aide la relation de Pythagore :

$$(R_t+h)^2 = R_t^2 + (ER_{max})^2$$

$$(R_t+h)^2 - R_t^2 = (ER_{max})^2$$

$$ER_{max} = \left((R_t+h)^2 - R_t^2\right)^{0,5}$$

$$ER_{max} = R_t\left(\left(1+\frac{h}{R_t}\right)^2 - 1\right)^{0,5}$$

on effectue un développement limité en $\dfrac{h}{R_{max}}$:

$$ER_{max} \simeq R_t\left(\left(1+2\frac{h}{R_t}\right) - 1\right)^{0,5}$$

$$\boxed{ER_{max} \simeq \sqrt{2hR_t}}$$

L'application numérique donne $d_{max} = 48$ km. C'est bien inférieur à la distance de 3500 km.

☐ - **17.**

Dans le vide, le vecteur d'onde est :

$$\vec{k} = \frac{\omega}{c}\left(\cos\theta\vec{e_z} + \sin\theta\vec{e_x}\right).$$

Le champ électrique s'écrit :

$$\boxed{\underline{\vec{E}} = E_0\vec{e_y}\exp\left(j\left(\omega t - \vec{k}\cdot\overrightarrow{OM}\right)\right)}.$$

☐ - **18.** Le champ électrique transmis dans le plasma s'écrit :

$$\underline{\vec{E}}'(x,z,t) = E_0' \exp \mathrm{i}(\omega' t - \vec{k}'.\vec{r})\,\vec{e}_y = E_0' \exp \mathrm{i}\left(\omega' t - \left(k_x' x + k_y' y + k_z' z\right)\right)\vec{e}_y$$

La continuité du champ électrique à l'interface vide-ionosphère(en $z = H$) impose :

$$\omega t - \frac{\omega}{c}(x\sin\theta) = \omega' t - \left(k_x' x + k_y' y\right)$$

Pour tout (t, x, y). On en déduit :

$$\begin{cases} \omega' = \omega \\ k_x' = \dfrac{\omega}{c}\sin\theta \\ k_y' = 0 \end{cases}$$

NB : Plus rigoureusement, si l'on tient compte de la présence de l'onde réfléchie qui s'écrit $\vec{\underline{E}}_r(x,z,t) = E_r \exp i\left(\omega t - \frac{\omega}{c}(x\sin\theta - z\cos\theta)\right)\vec{e}_y$:

$$E_0 \exp i\left(\omega t - \frac{\omega}{c}(x\sin\theta + L\cos\theta)\right) + E_r \exp i\left(\omega t - \frac{\omega}{c}(x\sin\theta - L\cos\theta)\right)$$
$$= E_0' \exp i\left(\omega' t - (k_x' x + k_y' y + k_z' L)\right)$$

Donc, en divisant par $\omega t - \frac{\omega}{c}(x\sin\theta + L\cos\theta)$, on obtient :

$$E_0 + E_r \exp i\left(2\frac{\omega}{c}L\cos\theta\right)$$
$$= E_0' \exp i\left((\omega' - \omega)t - \left(\left(k_x' - \frac{\omega}{c}\sin\theta\right)x + k_y' y + \left(k_z' - \frac{\omega}{c}\cos\theta\right)L\right)\right)$$

On retrouve bien les trois conditions obtenues ci-dessus.

☐ - **19.**

On utilise ici l'équation de dispersion fournie :

$$\omega'^2 = \omega_p^2 + c^2\left(\vec{k}'\right)^2$$

$$\omega'^2 = \omega_p^2 + c^2\left(\left(k_x'\right)^2 + \left(k_y'\right)^2 + \left(k_z'\right)^2\right)$$

$$\omega^2 = \omega_p^2 + c^2\left(\left(\frac{\omega}{c}\sin\theta\right)^2 + {k_z'}^2\right)$$

$${k_z'}^2 = \frac{1}{c^2}\left(\omega^2\left(1 - (\sin\theta)^2\right) - \omega_p^2\right)$$

L'onde ne peut pas se propager si k_z' est imaginaire pur, donc si ${k_z'}^2 < 0$.

Or ${k_z'}^2 < 0$ lorsque :

$$\omega^2\left(1 - (\sin\theta)^2\right) - \omega_p^2 < 0$$

$$\omega^2 < \frac{\omega_p^2}{1 - (\sin\theta)^2}$$

donc la pulsation limite cherchée est :

$$\boxed{\omega_\ell = \frac{\omega_p}{\cos\theta}}$$

☐ - **20.**

Puisqu'on néglige la courbure terrestre :

$$\cos\theta = \frac{H}{\sqrt{H^2 + \left(\frac{d}{2}\right)^2}} \quad \text{et} \quad f_\ell = \frac{f_p}{\cos\theta}$$

Les applications numériques donnent :
$\cos\theta = 0,1$ et $f_\ell = 10$ MHz.

On peut conclure que l'ionosphère permet bien la réflexion des ondes électromagnétiques pour les fréquences inférieures à 10 MHz.

☐ - **21.** ☐ - **22.**

(les questions 21 et 22 sont du cours...)

☐ - **23.**

Pour exprimer la puissance dissipée dans le plasma lors du passage de l'onde, on utilise l'expression de la puissance volumique cédée aux porteurs :

$$p = \frac{\delta \mathscr{P}}{\mathrm{d}V} = \overrightarrow{j} \cdot \overrightarrow{E}.$$

Or $\overrightarrow{j}$ et $\overrightarrow{E}$ sont en quadrature, puisque $\overline{\gamma}$ est imaginaire pure. Ainsi, en valeur moyenne, la puissance volumique cédée aux porteurs est nulle.

Dans le cas d'un écho ionosphérique, c'est à dire dans le cas où la fréquence de l'onde est inférieure à la fréquence limite, on a vu qu'il y a réflexion sur le plasma, d'où cette notion d'écho. Dans ce cas, la puissance de l'onde incidente est réfléchie, elle est transportée par l'onde réfléchie.

☐ - **24.**

Les fréquences utilisées pour la radio et la télévision sont de l'ordre de 30 à 3000 MHz. Elles sont supérieures à la fréquence du plasma, ce qui permet d'utiliser les satellites de communications pour obtenir la couverture de l'ensemble de la Terre.

Avantages de la transmission haute fréquence :

- Elle permet la modulation de fréquence, et le multiplexage fréquentiel.
- Les hautes fréquences, correspondant aux faibles longueurs d'ondes sont peu perturbées par les obstacles.Plus la fréquence est élevée, plus faible est la dispersion puisque v_g varie en $\sqrt{1-\frac{\omega_p^2}{\omega^2}}$
-

Inconvénients de la transmission haute fréquence : elle ne peut pas exploiter la réflexion ionosphérique...