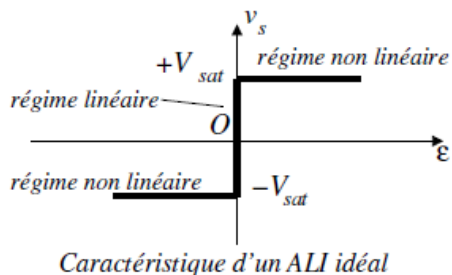


Centrale TSI, Épreuve I, 2020

Q1. L'ALI idéal possède des résistances d'entrée infinie et une résistance de sortie nulle. En notant $\varepsilon = v_+ - v_-$, sa caractéristique, valable quelle que soit la fréquence, est la suivante (avec $V_{sat} \approx 15 \text{ V}$) :



L'absence de courant au niveau de la borne non inverseuse assure : $v_+ = v_e$. La rétroaction sur la borne inverseuse permet de faire l'hypothèse d'un fonctionnement linéaire, c'est à dire $v_- = v_+ = V_e$.

On applique enfin une loi des nœuds en terme de potentiels au niveau de l'entrée inverseuse :

$$\frac{e_1 - v_-}{R_3} = \frac{v_- - V_s}{R_2} \quad \Leftrightarrow \quad \underbrace{v_- = V_e}_{v_- = V_e} \quad \frac{e_1 - V_e}{R_3} = \frac{V_e - V_s}{R_2}$$

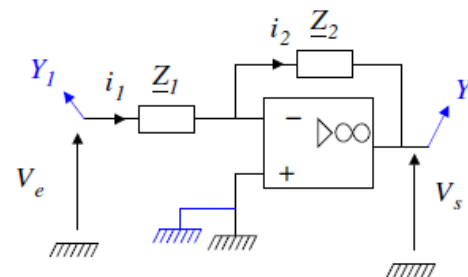
On en déduit $V_e \left(\frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} \right) = \frac{e_1}{R_3} + \frac{V_s}{R_2}$, c'est à dire :

$$\boxed{V_e = \frac{R_2 e_1 + R_3 V_s}{R_2 + R_3}}$$

Q2. A.N : $V_e = \frac{6,5 \times 0,100 + 1,0 \times 6,5}{7,5} \Rightarrow \boxed{V_e = 0,95 \text{ V}}$

Q3. $F = \frac{CV_e}{K} = \frac{8,0 \times 10^{-13} \times 0,95}{1,0 \times 10^{-12}} \quad \boxed{F = 0,76 \text{ N}}$

Q4. En associant les impédances, on obtient le montage équivalent suivant :



Avec $\underline{Z}_1 = R_1 + \frac{1}{jC_1\omega}$ et $\frac{1}{\underline{Z}_2} = \frac{1}{R_2} + jC_2\omega$.

Pour cet ALI idéal possédant une rétroaction sur l'entrée inverseuse, on peut faire l'hypothèse d'un fonctionnement linéaire, $v_- = v_+ = 0$. On applique alors une loi des nœuds à l'entrée inverseuse $i_1 = i_2$, c'est à dire en terme de potentiels :

$$\frac{V_e - 0}{\underline{Z}_1} = \frac{0 - V_s}{\underline{Z}_2} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{V_s}{V_e} = -\frac{1}{\underline{Z}_1/\underline{Z}_2} = \frac{-1}{\left(R_1 + \frac{1}{jC_1\omega}\right) \left(\frac{1}{R_2} + jC_2\omega\right)}$$

On se ramène alors à la forme proposée dans l'énoncé :

$$\frac{V_s}{V_e} = \frac{-1}{\frac{R_1}{R_2} + jR_1C_2\omega + \frac{1}{jR_2C_1\omega} + \frac{C_2}{C_1}} = -\frac{1}{\frac{R_1C_1 + R_2C_2}{R_2C_1} + jR_1C_2\omega - \frac{j}{R_2C_1\omega}}$$

$$\Leftrightarrow \boxed{\frac{V_s}{V_e} = \frac{R_2C_1}{R_1C_1 + R_2C_2} \times \frac{-1}{1 + j\frac{R_1R_2C_1C_2}{R_1C_1 + R_2C_2}\omega - j\frac{1}{(R_1C_1 + R_2C_2)\omega}}}$$

Il vient par identification :

$$\boxed{A = \frac{R_2C_1}{R_1C_1 + R_2C_2}} \quad ; \quad \boxed{\omega_1 = \frac{R_1C_1 + R_2C_2}{R_1R_2C_1C_2} = \frac{1}{R_2C_2} + \frac{1}{R_1C_1}}$$

$$\boxed{\omega_2 = \frac{1}{R_1C_1 + R_2C_2}}$$

Q5. $|H|(\omega) \rightarrow 0$ quand $\omega \rightarrow 0$ et $\omega \rightarrow +\infty$, de plus on reconnaît la forme canonique d'un **filtre passe-bande** du second ordre.

Q6. $|H|(\omega) = \frac{A}{\sqrt{1 + \left(\frac{\omega}{\omega_1} - \frac{\omega_2}{\omega}\right)^2}}$. Le module de la fonction de transfert est

maximal quand son dénominateur est minimal, c'est à dire pour :

$$\frac{\omega_{max}}{\omega_1} - \frac{\omega_2}{\omega_{max}} = 0 \quad \Rightarrow_{\omega > 0} \quad \boxed{\omega_{max} = \sqrt{\omega_1 \omega_2}}$$

Q7. On observe les voies d'entrée et de sortie à l'**oscilloscope** (Cf. branchement sur la figure Q4). Une première méthode consiste à observer les signaux temporels et regarder pour quelle fréquence ils sont en opposition de phase (minimum de l'un correspondant au maximum de l'autre). Une meilleure méthode, à privilégier, car plus sensible consiste à se placer en **mode XY** ; lorsque les signaux sont en opposition de phase, l'ellipse dégénère en un **segment de droite** passant pas l'origine et de pente négative.

Q8.
$$f_{max} = \frac{\omega_{max}}{2\pi} = \frac{1}{2\pi\sqrt{R_1 R_2 C_1 C_2}}$$

$$f_{max} = \frac{1}{2\pi \times \sqrt{1,0 \times 10^5 \times 10 \times 10^3 \times 50 \times 10^{-9} \times 5,0 \times 10^{-9}}}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{f_{max} = 3,2 \times 10^2 \text{ Hz}}$$

Q9. Dans le référentiel terrestre supposé galiléen, la masse est soumise à son poids, à la réaction du support, à la force de frottement fluide et à la tension du ressort auxquelles on ajoutera, en suivant l'indication de l'énoncé, la force d'inertie d'entraînement dans le référentiel de la voiture.

Q10. On applique alors un principe fondamental de la dynamique à la masse dans le référentiel lié au véhicule en projection sur l'axe horizontal :

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = -k(x - L_0) - \alpha \dot{x} + ma \quad \Leftrightarrow \quad m \frac{d^2 X}{dt^2} = -kX - \alpha \dot{X} + ma$$

On en déduit : $\boxed{\frac{d^2 X}{dt^2} + \frac{\alpha}{m} \dot{X} + \frac{k}{m} X = a}$ donc $\boxed{\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}}$ et $\boxed{Q = \frac{\sqrt{km}}{\alpha}}$.

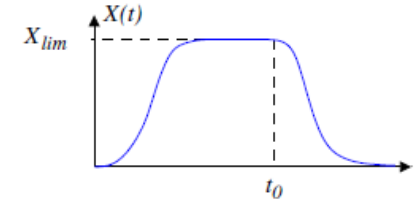
Q11. Pour $t < 0$, le véhicule se déplace en ligne droite à vitesse constante, le ressort a sa longueur à vide $x(t < 0) = L_0$ et donc $\boxed{X(t < 0) = 0}$. On peut également obtenir ce résultat en utilisant l'équation obtenue à la question 10, en régime permanent et avec $a = 0$.

Q12. L'équation caractéristique s'écrit $r^2 + 2\omega_0 r + \omega_0^2 = 0$ ce qui correspond au **régime critique** (discriminant nul). À $t = t_0^-$, le régime permanent étant atteint

$$\boxed{X(t = t_0^-) = X_{lim} = \frac{a}{\omega_0^2}}$$

Une fois le véhicule à l'arrêt, on observe à nouveau un régime critique avec $\boxed{\lim_{t \rightarrow \infty} X \rightarrow 0}$.

On représente alors un régime critique sur les deux phases avec une vitesse et une position nulles à l'instant initial.



Q13. Le véhicule passe d'une vitesse V à une vitesse nulle en une durée Δt ce qui représente une accélération moyenne en valeur absolue :

$$|a_{frein.}| = \frac{V}{\Delta t} = \frac{25}{2,5} \Rightarrow \boxed{|a_{frein.}| = 10 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}}$$

Q14. De la me manière $|a_{choc}| = 1,7 \times 10^2 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$.

Q15. Pour la force d'inertie $F_{ie} = ma$, donc :

— freinage $F_{ie,f} = 2,81 \times 10^{-3} \times 10 \Rightarrow \boxed{F_{ie,f} = 28 \text{ mN}}$;

— choc $F_{ie,c} = 2,81 \times 10^{-3} \times 166 \Rightarrow \boxed{F_{ie,c} = 0,47 \text{ N}}$.

Q16. Compte tenu du coefficient multiplicatif :

— freinage $\Delta V_f = 28 \times 10^{-3} \times 6,0 \quad \boxed{\Delta V_f = 0,17 \text{ V}}$;

— choc $\Delta V_c = 0,47 \times 6,0 \quad \boxed{\Delta V_c = 2,8 \text{ V}}$;

Ces tensions sont tout à fait mesurables à l'aide d'un voltmètre.

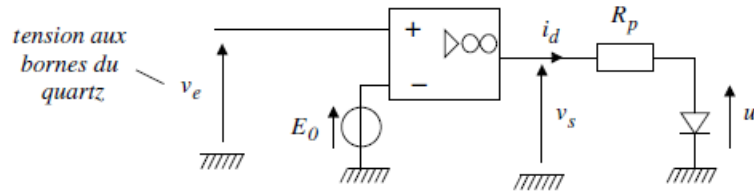
Q17. Le régime critique permet de **minimiser la durée du régime transitoire**.

Si le régime permanent n'est pas atteint en $t = t_0$, la mesure de l'accélération serait erronée, dans le cas du régime critique elle serait sous-estimée.

Q18. La diode doit s'allumer lorsque la tension aux bornes du quartz passe par une valeur haute de l'ordre de 2,0 V. On peut envisager le montage présenté ci-après utilisant un ALI en comparateur simple et un générateur de tension idéal de force électromotrice $E_0 = 1,0 \text{ V}$.

Lors d'un simple freinage, $v_+ = v_e = \Delta V_f < v_- = E_0$, alors $v_s = -V_{sat} = -15 \text{ V}$ et la diode est bloquante.

Lors d'un choc, $v_+ = \Delta V_c = v_e > v_- = E_0$, alors $v_s = +V_{sat} = +15 \text{ V}$, la diode devient passante et s'éclaire.



La résistance R_p est une résistance de protection qui limite l'intensité du courant i_d et la puissance dissipée dans la diode :

$$P_{\max} = U_d \times I_{d,\max} = U_d \times \frac{V_{\text{sat}} - U_d}{R_d} \Leftrightarrow R_d = \frac{U_d \times (V_{\text{sat}} - U_d)}{P_{\max}}$$

A.N. : $R_d = \frac{1,9 \times (15 - 1,9)}{0,100} \Rightarrow R_d = 2,5 \times 10^2 \Omega$.

Remarques :

- en situation bloquante, une tension négative de valeur absolue 15 V se reporte sur la diode ce qui pourrait éventuellement l'endommager mais aucune information n'est fournie à ce propos dans l'énoncé ;
- notons qu'avec la résistance R_p proposée, l'intensité du courant vaut :

$$i_p = \frac{V_{\text{sat}} - U_d}{R_p} = \frac{15 - 1,9}{2,5 \times 10^2} \approx 50 \text{ mA}$$

Cette intensité ne peut pas être délivrée par l'amplificateur opérationnel (l'intensité limite en sortie est plutôt de l'ordre de 20 mA), en pratique la limite de courant débité par l'ALI peut sans doute suffire pour protéger la diode.

Q19. $M \frac{d^2 z}{dt^2}$ représente le produit de la masse du système par l'accélération de son centre de masse.

Q20. $-kz$ est un terme de rappel élastique, lié à la flexibilité de la poutre. Le terme $-\alpha \dot{z}$ est un terme de frottement fluide lié par exemple au frottement de la poutre dans l'air.

Q21. En passant en régime complexe il vient, avec $\omega_0^2 = k/M$:

$$-M\omega^2 \underline{Z}_m + i\omega \underline{Z}_m \alpha + k \underline{Z}_m = F_0 \Leftrightarrow \underline{Z}_m = \frac{F_0/M}{\omega_0^2 - \omega^2 + i \frac{\omega \alpha}{M}}$$

Q22. Pour $\omega = \omega_0$, on obtient $\underline{Z}_m = \frac{F_0}{i\omega_0 \alpha} = \frac{F_0}{\omega_0 \alpha} e^{-i\pi/2}$, c'est à dire pour la grandeur réelle :

$$z(t) = \frac{F_0}{\omega_0 \alpha} \cos(\omega_0 t - \pi/2) \Rightarrow z(t) = \frac{F_0}{\omega_0 \alpha} \sin(\omega_0 t)$$

Q23. $v_z(t) = \frac{dz(t)}{dt} \Rightarrow v_z(t) = \frac{F_0}{\alpha} \cos(\omega_0 t)$

Q24. La capacité C_0 correspond à l'aptitude du quartz à accumuler des charges sur ses faces.

Q24. β est le rapport d'une force sur une tension :

$$[\beta] = \left[\frac{F}{U} \right] \Rightarrow [\beta v_z] = \left[\frac{F v_z}{U} \right] = \left[\frac{\mathcal{P}}{U} \right] \Rightarrow [\beta v_z] = [I]$$

où l'on a utilisé le fait qu'une puissance \mathcal{P} est tout aussi bien le produit d'une force par une vitesse que le produit d'une tension par un courant électrique.

Q25. On commence par considérer l'impédance équivalente de l'association parallèle de la capacité et de la résistance : $\underline{Z}_{eq} = \frac{R}{1 + jRC_0\omega_0}$; cette impédance est parcourue par le courant d'amplitude complexe $\beta \underline{v}_{zm}$, la loi d'Ohm généralisée conduit à :

$$\underline{V}_m = \frac{R}{1 + jRC_0\omega_0} \times \beta \frac{F_0}{\alpha}$$

Q26. Sachant que $\mathcal{P} = \frac{1}{2R} |\underline{V}_m|^2$, on en déduit :

$$\mathcal{P}_m = \frac{1}{2R} \times \frac{R^2}{1 + (R_0 C \omega_0)^2} \times \beta^2 \frac{F_0^2}{\alpha^2} \Rightarrow \mathcal{P}_m = \frac{R \beta^2}{1 + (R_0 C \omega_0)^2} \times \frac{F_0^2}{2 \alpha^2}$$

La puissance moyenne récupérée est bien proportionnelle à F_0^2 .

Q28. Chaîne directe : $\underline{v}_s = \underline{H}(j\omega) \underline{v}_e$.

Q29. Chaîne retour : $\underline{v}_1 - \underline{v}_e = \underline{K}(j\omega) \underline{v}_s$.

Q30. La seconde relation peut se réécrire $\underline{v}_1 - \underline{K}(j\omega) \underline{v}_s = \underline{v}_e$, en reportant dans la première on en déduit :

$$\underline{v}_s = \underline{H}(j\omega) (\underline{v}_1 - \underline{K}(j\omega) \underline{v}_s) \Leftrightarrow \underline{A}(j\omega) = \frac{\underline{v}_s}{\underline{v}_1} = \frac{\underline{H}(j\omega)}{1 + \underline{H}(j\omega) \underline{K}(j\omega)}$$

Q31. La possibilité d'oscillation nécessite l'existence d'une pulsation ω_r telle que :

$$\underline{H}(j\omega_r) \times \underline{K}(j\omega_r) = -1$$

Remarque : cette condition assure que $\underline{H}(j\omega_r) \neq 0$.

Q32. Cette relation appliquée en module conduit à : $|\underline{H}|(\omega_r) \times |\underline{K}|(\omega_r) = 1$.

Q33. Et pour la phase : $\arg(\underline{H}(j\omega_r)) \times \arg(\underline{K}(j\omega_r)) = \pi [2\pi]$.

Q34. On considère les impédances équivalentes d'une part pour l'association série : $\underline{Z}_s = R + \frac{1}{jC\omega}$ et d'autre part pour l'association parallèle : $\frac{1}{\underline{Z}_p} = \frac{1}{R} + jC\omega$; on peut alors se ramener à la formule du diviseur de tension :

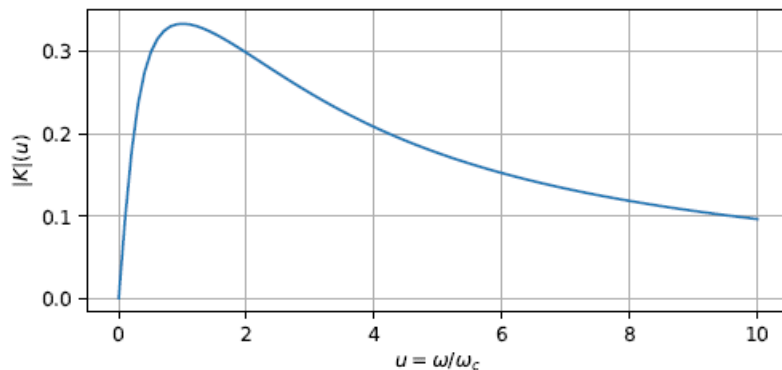
$$\underline{K}(j\omega) = \frac{\underline{u}_s}{\underline{u}_e} = \frac{\underline{Z}_p}{\underline{Z}_p + \underline{Z}_s} = \frac{1}{1 + \underline{Z}_s/\underline{Z}_p} = \frac{1}{1 + \left(R + \frac{1}{jC\omega}\right) \times \left(\frac{1}{R} + jC\omega\right)}$$

$$\Leftrightarrow \underline{K}(j\omega) = \frac{1}{3 + j\left(RC\omega - \frac{1}{RC\omega}\right)}$$

Q35. On a : $|\underline{K}|(\omega) = \frac{1}{\sqrt{9 + \left(RC\omega - \frac{1}{RC\omega}\right)^2}}$. La fonction de transfert est

celle d'un filtre passe-bas, le module tend vers 0 à basse fréquence et à haute fréquence et est maximal pour $\omega_r = 1/RC$, le gain à la résonance valant alors

$$G_{max} = 1/3.$$



Q36. Cf. question précédente.

Q37. $\underline{Z}_s = R + \frac{1}{jC_0\omega} = R + \frac{R}{j} \Rightarrow \underline{Z}_s = R \times (1 - j)$

Q38. $\frac{1}{\underline{Z}_p} = \frac{1}{R} + jC\omega_0 = \frac{1}{R} + \frac{j}{R} \Rightarrow \frac{1}{\underline{Z}_p} = \frac{1+j}{R}$.

Q39. Compte tenu de la relation obtenue à la question 34 :

$$\underline{K}(j\omega_r) = \frac{\underline{v}}{\underline{v}_s} = \frac{1}{1 + \underline{Z}_s/\underline{Z}_p} = \frac{1}{1 + R \times (1 - j) \times \frac{1+j}{R}} \Rightarrow \frac{\underline{v}}{\underline{v}_s} = \frac{1}{3}$$

On retrouve bien le gain maximal de 1/3 à la résonance.

Q40. L'ALI idéal fonctionnant en régime linéaire : $v_- = v_+ = v$. On applique une loi des nœuds en terme de potentiel au niveau de l'entrée inverseuse (il faut cependant faire attention au fait que le potentiel à la gauche de la résistance R_1 est $\underline{v}_e + \underline{v}$ et non \underline{v}_e) :

$$\frac{\underline{v}_e + \underline{v} - \underline{v}}{R_1} = \frac{\underline{v} - \underline{v}_s}{R_2} \Leftrightarrow \underline{v} = \underline{v}_s + \frac{R_2}{R_1}\underline{v}_e$$

Q41. Avec $\underline{v} = \underline{v}_s + \frac{R_2}{R_1}\underline{v}_e$ et $\frac{\underline{v}}{\underline{v}_s} = \frac{1}{3}$, on en déduit :

$$\underline{H}(j\omega_0) = \frac{\underline{v}_s}{\underline{v}_e} = -\frac{3R_2}{2R_1}$$

Q42. D'après la question 31, l'oscillation nécessite $\underline{H}(j\omega_0) \times \underline{K}(j\omega_0) = -1$; compte tenu que $\underline{K}(j\omega_0) = 1/3$, on en déduit :

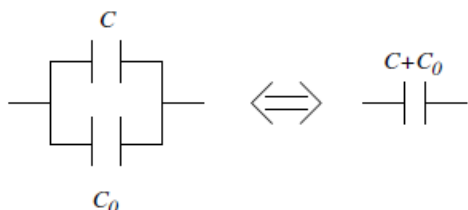
$$-\frac{3R_2}{2R_1} \times \frac{1}{3} = -1 \Leftrightarrow R_2 = 2R_1$$

On peut par exemple retenir : $R_1 = 1,0 \text{ k}\Omega$ et $R_2 = 2,0 \text{ k}\Omega$.

Q43. En basse fréquence, le module de l'impédance d'un condensateur tend vers l'infini, c'est donc ce terme qui l'emporte dans l'association série R, L, C de la branche supérieure, et on est alors ramené à une association parallèle de deux condensateurs, donc :

$$\underline{Z}_{\text{quartz}} \sim_0 \frac{1}{j(C + C_0)\omega}$$

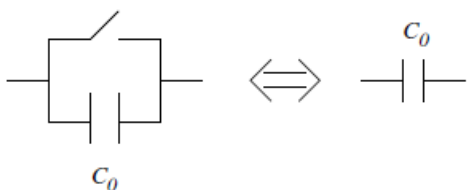
modèle électrique basse fréquence



En haute fréquence, le module de l'impédance de la bobine diverge quand celui de l'impédance du condensateur tend vers 0, le courant passe en quasi-totalité dans le condensateur C_0 :

$$Z_{\text{quartz}} \sim \infty \frac{1}{j(C_0)\omega}$$

modèle électrique haute fréquence



Q44. On commence par exprimer l'impédance équivalente du quartz dont on néglige l'aspect résistif :

$$Z_{eq} = \frac{j \left(L\omega - \frac{1}{C\omega} \right) \times \frac{1}{jC_0\omega}}{j \left(L\omega - \frac{1}{C\omega} \right) + \frac{1}{jC_0\omega}} \Rightarrow Z_{eq} = \frac{j \left(L\omega - \frac{1}{C\omega} \right)}{1 + C_0\omega \times \left(\frac{1}{C\omega} - L\omega \right)}$$

On constate que l'impédance est imaginaire pure. La partie imaginaire s'annule pour $L\omega_1 - \frac{1}{C\omega_1} = 0$, c'est à dire $\omega_1 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$

Le module de l'impédance diverge pour $1 + C_0\omega_2 \times \left(\frac{1}{C\omega_2} - L\omega_2 \right) = 0$, c'est à dire :

$$\frac{1}{C\omega_2} - L\omega_2 = -\frac{1}{C_0\omega_2} \Leftrightarrow \omega_2^2 = \frac{1}{L} \times \left(\frac{1}{C} + \frac{1}{C_0} \right)$$

C'est à dire $\omega_2 = \sqrt{\frac{C_0 + C}{LCC_0}}$.

Q45. Dans le cas général (aspect résistif non négligé), on avait identifié un comportement capacitif à basse fréquence et à haute fréquence.

Un condensateur possède une impédance imaginaire pure de partie imaginaire négative. Lorsqu'on néglige le caractère résistif, ceci est le cas de l'impédance du quartz sur les domaines :

$$\omega \in]0, \omega_1 = \frac{1}{\sqrt{LC}} [\quad \text{et} \quad \omega \in]\omega_2 = \sqrt{\frac{C_0 + C}{LCC_0}}, +\infty [$$