DM N°2 - Diffusion thermique
Corrigé

19 $\xi = \mu c / \lambda$. $m^{-2}s$.

La démonstration est dans le cours.

20 $T(r,t) = \rho(r)\eta(t)$. On injecte cette forme de solution dans l'équation de diffusion :

$$\xi r \rho(r) \frac{d\eta}{dt} = \eta(t) \frac{d}{dr}\left(r \frac{d\rho}{dr}\right), \text{ soit}$$

$$\underbrace{\xi \frac{1}{\eta(t)} \frac{d\eta(t)}{dt}}_{f(t)} = \underbrace{\frac{1}{r}\frac{1}{\rho(r)}\frac{d}{dr}\left(r\frac{d\rho(r)}{dr}\right)}_{g(r)} \quad \forall r, \forall t$$

Donc $\xi \frac{1}{\eta}\frac{d\eta}{dt} = \chi$ et $\frac{1}{r}\frac{1}{\rho}\frac{d}{dr}\left(r\frac{d\rho}{dr}\right) = \chi$.

21 En résolvant : $\eta(t) = A\exp\left(\frac{\chi}{\xi}t\right)$ avec $\chi < 0$ pour que la solution ne diverge pas.

22 Il faut que $\rho(r)$ soit C^∞ et bornée pour être développable en série entière.

$$r\frac{d\rho}{dr} = \sum_{n=0}^{\infty} n\alpha_n r^n \; ; \; \frac{d}{dr}\left(r\frac{d\rho}{dr}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} n^2\alpha_n r^{n-1}.$$

$$r\rho(r) = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n r^{n+1}.$$

Et $\frac{d}{dr}\left(r\frac{d\rho}{dr}\right) = \chi r\rho(r)$, soit

$$\sum_{n=0}^{\infty} n^2\alpha_n r^{n-1} = \chi\sum_{n=0}^{\infty}\alpha_n r^{n+1}.$$

pour le rang 1 : $\alpha_1 = 0$

puis pour le rang n $n^2\alpha_n = \chi\alpha_{n-2}$. On sépare alors n pair et impair.

$$(2p+1)^2 \alpha_{2p+1} = \chi \alpha_{2p-1} \quad \text{or } \alpha_1 = 0$$

donc $\underline{\alpha_{2p+1} = 0}$

$$(2p)^2 \alpha_{2p} = \chi \alpha_{2(p-1)}, \text{ donc } \underline{\alpha_{2p} = \left(\frac{\chi}{4}\right)^p \left(\frac{1}{p!}\right)^2 \alpha_0}$$

(23) • Le vide ne permet ni transfert par conduction ni transfert par convection.

• Les disques en $z = 0$ et $z = a$ sont parfaitement réfléchissants : pas de transfert par rayonnement depuis l'extérieur.

• Ils sont aussi adiabatiques.

Donc en $r = a$ la continuité du flux impose

$$\forall t : -\lambda \left(\frac{\partial T}{\partial r}\right)_{r=a} \cdot 2\pi a^2 = 0, \text{ soit } \eta(t) \left(\frac{d\rho}{dr}\right)_{r=a} = 0, \ \forall t$$

et donc : $\underline{\left(\frac{d\rho}{dr}\right)_{r=a} = 0}$.

(24) Pour la face externe il n'y a que du transfert radiatif (Vide : pas de convection, ni de conduction).

La continuité du flux impose alors

$$\forall t : -\lambda \left(\frac{\partial T}{\partial r}\right)_{r=2a} = \sigma T^4_{r=2a}, \text{ soit}$$

$$\forall t : -\lambda \eta(t) \left(\frac{d\rho}{dr}\right)_{r=2a} = \sigma \rho^4(2a) \cdot \eta^4(t)$$

ou encore $\left(\frac{d\rho}{dr}\right)_{r=2a} = -\frac{\sigma}{\lambda} \rho^4(2a)\, \eta^3(t) ; \ \underline{\forall t}$.

Ceci est impossible $\forall t$, puisque $\eta(t)$ décroît qd $t \nearrow$.

Il faudrait que la variation de $\eta(t)$ soit lente devant le temps caractéristique de rayonnement pour que l'équilibre soit quasi établi à chaque instant.

25 La fonction est donnée pour $a = 1$ et tracée pour $r \in [1, 2]$ (soit $r \in [a, 2a]$ ...). De plus la face $2a$ rayonne vers l'extérieur. Sans apport extérieur, la température va décroître et les courbes successives vont avoir la même forme mais avec un écart entre $T(a)$ et $T(2a)$ de + en + faible. A "l'∞" $T(a) = T(2a) = 0$.