PSI / PSI 2018-2019*

DM N°5 – Pour le 27-11-2018

A / ETUDE DU CONDENSATEUR DE MESURE

Comme le montre la figure 1a ci-dessous, la tête de mesure de ce capteur est formée d'un conducteur cylindrique (A) et d'une enveloppe métallique coaxiale (B) réalisant un condensateur de capacité fixe C_e :

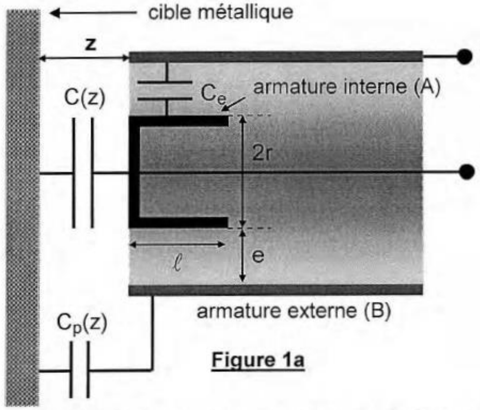

Figure 1a

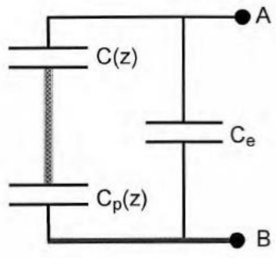

Figure 1b

Le but de la mesure est de détecter la distance z entre la tête de mesure et la cible.

Lorsque la cible métallique s'approche de l'extrémité des conducteurs (A) et (B), ceux-ci constituent avec elle deux autres condensateurs :

- *l'un, de capacité C(z), a pour armatures le disque externe du conducteur central cylindrique (A) de diamètre 2r et z est la distance qui le sépare de la cible ;*
- *l'autre est un condensateur parasite, de capacité $C_p(z)$, formé par l'enveloppe extérieure (B) du capteur et la cible.*

Le schéma électrique équivalent du capteur est représenté sur la figure 1b.

A1. Enoncer le théorème de GAUSS en électrostatique dans le vide de permittivité ε_0.

Considérons un condensateur plan dont les faces en regard sont distantes de d et de surfaces S ; le vide règne entre ces deux électrodes. La distance d est suffisamment faible pour supposer les surfaces infinies.

A2. Exprimer, en le justifiant, le champ électrique $\vec{E}$ dans le condensateur en fonction de la charge Q qu'il emmagasine, de S et de ε_0 ; en déduire sa capacité C.

Etudions maintenant un condensateur cylindrique de longueur infinie. Le rayon de son armature interne est r_1 et le rayon de son armature externe est r_2 ; ε_0 est la permittivité du vide entre ces deux électrodes et Q la charge d'une armature de longueur ℓ.

A3. Exprimer, en le justifiant, le champ électrique $\vec{E}$ dans le condensateur. En déduire la capacité C de ce condensateur pour une longueur commune ℓ des électrodes. Ecrire le résultat sous la forme : $C = \dfrac{\alpha}{\ln(r_2/r_1)}$ et identifier α.

A4. Ecrire l'expression de la capacité C(z) en fonction de ε_0, r et z, puis celle de la capacité C_e en fonction de ε_0, ℓ, r et e.

A5. Déterminer la capacité C_{AB} de la tête de mesure en fonction de C_e, C(z) et $C_p(z)$.

A6. Proposer une opération technique simple permettant de s'affranchir de la capacité parasite $C_p(z)$ *(ce qui sera le cas dans la suite du problème : $C_p \to +\infty$).*

A7. Ecrire l'expression finale de la capacité C_{AB} en fonction de ε_0, ℓ, r, e et z, sachant que la distance e entre les armatures en regard est faible devant leurs rayons respectifs. *(effectuer pour cela un développement limité au 1er ordre en e/r)*

Le capteur fonctionne pour une distance cible-tête de mesure z variant d'une faible quantité Δz à partir d'une valeur de référence z_0 : $z = z_0 + \Delta z$ (avec l'approximation $\Delta z / z_0 \ll 1$).

A8. Montrer que la capacité C_{AB} peut s'écrire sous la forme : $C_{AB} = C_0\left(1 + k\dfrac{\Delta z}{z_0}\right)$; identifier C_0 et k, puis calculer de façon approchée leurs valeurs numériques à l'aide des données suivantes : $r = 10\,\text{mm}$, $\ell = 10\,\text{mm}$, $e = 1\,\text{mm}$, $z_0 = 2\,\text{mm}$ et $\varepsilon_0 \cong 9.10^{-12}\,\text{F.m}^{-1}$.

B / CONDITIONNEMENT DU CAPTEUR

A la tension électrique $v(t) = V_0 \cos(\omega t + \phi)$ peut être associée, en notation complexe, le signal analytique $\underline{v}(t) = \underline{V}_0 \exp(j\omega t)$ où $\underline{V}_0 = V_0 \exp(j\phi)$ désigne l'amplitude complexe du signal et j le complexe tel que $j^2 = -1$. Les amplificateurs opérationnels (AO) sont supposés idéaux et en fonctionnement linéaire. Le capteur de capacité C_{AB} est inséré dans un circuit de mesure comportant deux blocs : un bloc amplificateur (Figure 2a) et un bloc de filtrage (Figure 2b).

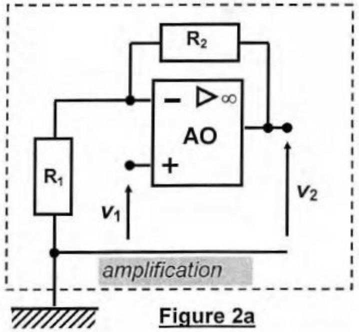

Figure 2a

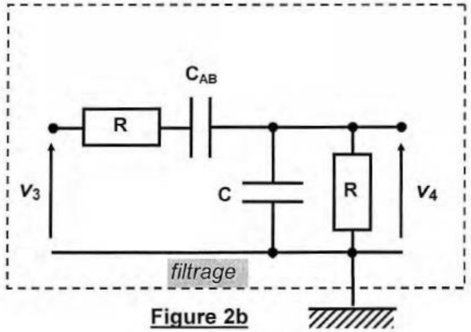

Figure 2b

B1. Exprimer les fonctions de transfert (ou transmittances) en boucle ouverte $\underline{H}_1(j\omega) = \underline{V}_2(j\omega)/\underline{V}_1(j\omega)$ et $\underline{H}_2(j\omega) = \underline{V}_4(j\omega)/\underline{V}_3(j\omega)$ en supposant chacun des blocs alimenté par une tension sinusoïdale. Préciser la nature du filtre de fonction de transfert $\underline{H}_2(j\omega)$.

La borne de sortie de l'amplificateur est reliée à l'entrée du filtre et la borne de sortie du filtre est reliée à la borne non inverseuse de l'AO, de sorte que : $v_1 = v_4$ *et* $v_2 = v_3 = v_S$.

B2. Quelle est l'expression de la fonction de transfert $\underline{H}(j\omega) = \underline{H}_1(j\omega) \times \underline{H}_2(j\omega)$ en régime sinusoïdal ? En déduire l'équation différentielle à laquelle obéit la tension $v_S(t)$ pour un régime quelconque. Pour quelle valeur de R_2, fonction de R_1, C et C_{AB}, des oscillations sinusoïdales stables peuvent-elles s'établir ? Quelle est alors la pulsation ω_0 de ces oscillations ?

Fixons $C = C_0$ *et* $R = R_1 = 100\ k\Omega$ *et supposons que* $\Delta z = 0$.

B3. Déterminer les valeurs de la résistance R_2 et de la pulsation ω_0 de l'oscillateur.

Dès que la tête du capteur se déplace par rapport à la cible, la capacité C_{AB} varie. La résistance R_2 garde la valeur obtenue dans la question précédente et C est fixée à C_0.

B4. Réécrire, pour un faible déplacement de la cible ($\Delta z/z_0 \ll 1$), l'équation différentielle vérifiée par $v_S(t)$ en faisant apparaître les paramètres k, C_0, R et $\Delta z/z_0$.
Comment évolue alors $v_S(t)$ pour un faible déplacement Δz positif ou négatif de la cible ?

La condition d'oscillation n'est plus vérifiée à chaque instant par une résistance R_2 fixe car cette condition s'écrit en fonction de la capacité C_{AB} variable ; la résistance R_2 est remplacée par un montage approprié assurant les oscillations. Ce montage ne sera pas étudié ici.

B5. Pour une valeur adaptée de R_2, quelle est l'expression de la pulsation ω_{OSC} des oscillations obtenues en fonction de ω_0, k et $\dfrac{\Delta z}{z_0}$?

C / CONDITIONNEMENT DU SIGNAL

La tension $v_2(t) = V_0 \sin(\omega t)$ *est injectée dans une série de trois montages élémentaires A, B et C ne comportant que des composants idéaux (Figure 3).*

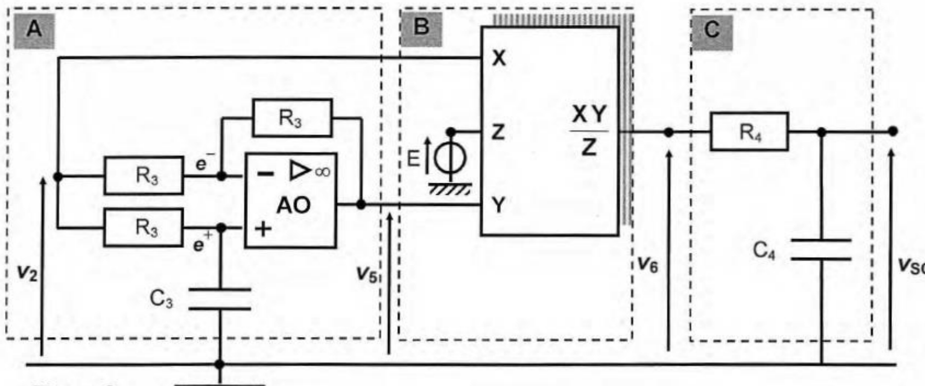

Figure 3

Le bloc B est un multiplieur réalisant la fonction $v_6 = \frac{XY}{Z}$.

E est une tension continue délivrée par un générateur.

C1. Ecrire les tensions e^+ et e^- mesurées par rapport à la masse de potentiel nul, respectivement aux entrées non inverseuse et inverseuse de l'AO en fonction des composants de l'étage A et des tensions v_2 et v_5 ; en déduire la transmittance $\underline{T}_A(j\omega) = \dfrac{\underline{V}_5(j\omega)}{\underline{V}_2(j\omega)}$. Comparer les amplitudes V_5 et V_2 puis exprimer le déphasage φ de v_5 par rapport à v_2. Préciser la fonction de cet étage.

C2. Exprimer la tension instantanée $v_6(t)$ en sortie de ce bloc, en fonction de l'amplitude V_0, du déphasage φ, de la tension E, de la pulsation ω et de t.

Relation utilisable : $2\sin(a)\sin(b) = \cos(a-b) - \cos(a+b)$

C3. Déterminer la fonction de transfert $\underline{T}_C(j\omega) = \dfrac{\underline{V}_{SC}(j\omega)}{\underline{V}_6(j\omega)}$. En déduire le rôle de l'étage C ainsi que sa pulsation caractéristique ω_C. Montrer que, par un choix judicieux de ω_C, la tension de sortie v_{SC} est continue et « image » de $\cos(\varphi)$.

C4. Choisir la valeur particulière du produit R_3C_3 pour que la tension de sortie v_{SC} du montage soit continue et proportionnelle à la variation Δz de la distance entre la tête de mesure et la cible (au premier ordre non nul en $\Delta z/z_0$). Donner son expression, notée V_{SC} (car indépendante du temps), en fonction de E, k, V_0 et du rapport $\Delta z/z_0$.

Relation utilisable : $\cos(a) = \dfrac{1-\tan^2(a/2)}{1+\tan^2(a/2)}$

C5. Proposer une définition de la sensibilité S de ce capteur ; l'exprimer en fonction de k, V_0, E et z_0, puis la calculer sachant que $V_0 = 5{,}0\ V$ et $E = 0{,}50\ V$.

C6. Citer les avantages et les inconvénients inhérents à l'utilisation de ce capteur capacitif.