I.D. (1) On injecte la solution proposée dans l'équation d'onde :

$$-\omega^2 y + \frac{c_e^2 b^2}{12(1-\sigma^2)}\left[k_x^4 + k_y^4 + 2k_x^2 k_y^2\right] y = 0$$

soit $-\omega^2 + \frac{c_e^2 b^2}{12(1-\sigma^2)} (k_x^2 + k_y^2)^2 = 0$;

d'où avec $k_x^2 + k_y^2 = k^2$:

$$\frac{\omega^2}{c_e^2} = \frac{b^2}{12(1-\sigma^2)} k^4 .$$

$f = \frac{\omega}{2\pi} = k^2 c_e \frac{b/2\pi}{\sqrt{12(1-\sigma^2)}}$ et comme $k = \frac{2\pi}{d}$,

$$f = \frac{c_e b}{\sqrt{3(1-\sigma^2)}} \frac{\pi}{d^2}$$

(2) $v_\varphi = \frac{\omega}{k} = d f = \frac{\pi c_e b}{\sqrt{3(1-\sigma^2)}} \cdot \frac{1}{d}$.

La vitesse de phase étant fonction de d, la propagation est dispersive. (On pourrait définir un "indice" du milieu $n(d)$ / $n(d) = \frac{c_e}{v_\varphi} = d \frac{\sqrt{3(1-\sigma^2)}}{\pi b}$, analogue à celui de l'optique, pour lequel $v = \frac{c}{n}$.

(3) L'échelle est inchangée entre les 3 photos. Plus le temps s'écoule, plus les écarts entre maxima et minima (cercles noirs et cercles clairs) successifs est grand à une même distance du centre des cercles : les grandes longueurs d'onde se déplacent moins vite que les petites : la propagation est bien dispersive.

(4) * 1 4b : $d_1 = 6$ mm se trouve à 2,3 cm du centre mesuré à la règle.

4a : la même déformat de largeur d_1 est à environ 1,2 cm du centre mesuré à la règle

donc $v_\varphi(d_1) \simeq \frac{(2{,}3 - 1{,}2) \times \frac{14}{4}}{30}$, car 4 cm mesurés à la règle font 14 cm de l'échelle ;

ainsi $v_\varphi(d_1) = 13 \cdot 10^{-2}$ cm μs^{-1}

* 2 Le même travail sur les figures b et c pour la déformation d_2 donne $v_\varphi(d_2) = 7 \cdot 10^{-2}$ cm μs^{-1}

* 3 D'après I.D.2. $\frac{v_{\varphi_1}}{v_{\varphi_2}} = \frac{d_2}{d_1}$, soit ici $\frac{v_{\varphi_1}(d_1)}{v_{\varphi_2}(d_2)} = 2$; on a environ ici $\frac{13}{7} \simeq 1{,}9$. ok...

③

* Avec $v_\varphi = \dfrac{\pi c_\ell b}{\sqrt{3(1-\sigma^2)}} \cdot \dfrac{1}{d}$

et $c_\ell = \sqrt{\dfrac{E}{\rho}}$, on détermine

b : $b = \dfrac{v_\varphi \sqrt{3(1-\sigma^2)}\, d}{\pi \sqrt{\dfrac{E}{\rho}}}$

$\underline{b \simeq 1\,mm}$; $b = \dfrac{7.10^{-2} \cdot 10^{-2}\, 10^{6} \sqrt{3-(0,34)^2} \cdot 1,2\,10^{-2}}{\pi \sqrt{1,1\,10^{11}/8,7\,10^{3}}}$

PARTIE PIANO.

$\underline{32}$. En injectant dans l'équation d'onde, $\underline{D}\, f^{(4)}(x) - f''(x) - \underline{k^2 f(x) = 0}$ (1)

$\underline{33}$. On écrit l'équation caractéristique de (1) $r^4 - \dfrac{r^2}{D} - \dfrac{k^2}{D} = 0$, ce qui donne une équation bicarrée à résoudre

$$X^2 - \frac{X}{D} - \frac{k^2}{D} = 0$$

soit $X = \dfrac{\frac{1}{D} \pm \sqrt{\frac{1}{D^2} + \frac{4k^2}{D}}}{2}$

④

et donc $r = \pm \sqrt{\dfrac{1}{2D} + \dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{1}{D^2} + \dfrac{4k^2}{D}}}$

ou $r_{1,2} = \pm i \sqrt{\dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{1}{D^2} + \dfrac{4k^2}{D}} - \dfrac{1}{2D}}$

r imaginaire qui donne les solutions en {sin, cos} et r réel les solutions en sh, ch. D'où

$$K_I = \pm \sqrt{\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{D^2} + \frac{4k^2}{D}} - \frac{1}{2D}}$$

$$K_R = \pm \sqrt{\frac{1}{2D} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{D^2} + \frac{4k^2}{D}}}.$$

$\underline{35}$ $\begin{cases} f(0) = 0 : F_2 + F_4 = 0 \\ f''(0) = 0 : -K_I^2 F_2 + K_R^2 F_4 = 0. \end{cases}$

Donc $F_2 = F_4 = 0$

Il reste $f(x) = F_1 \sin K_I x + F_3 \sinh K_R x$

De plus $\left.\begin{array}{l} f(L) = 0 \\ f''(L) = 0 \end{array}\right\}$: $\begin{cases} F_1 \sin K_I L + F_3 \sinh K_R L = 0 \\ -F_1 K_I^2 \sin K_I L + F_3 K_R^2 \sinh K_R L = 0 \end{cases}$

Soit en x la 1ère par K_I^2 et en faisant la somme avec la 2e équation : $F_3\,\mathrm{sh}(K_R L)(K_I^2 - K_R^2)) = 0$

Soit $F_3 = 0$ et en fin

$F_1 \sin(K_I L) = 0$, d'où $\sin(K_I L) = 0$.

et $K_{I_p} = \frac{p\pi}{L}$ et $f_p(x) = F_{1p}\sin\left(\frac{p\pi x}{L}\right)$

36. $K_{I_p}^2 = \left(\frac{p\pi}{L}\right)^2 \underset{33}{=} \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{D^2}+\frac{4k_p^2}{D}} - \frac{1}{2D}$

soit $\left[\left(\frac{p\pi}{L}\right)^2 + \frac{1}{2D}\right]^2 = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{D^2}+\frac{4k_p^2}{D}\right)$

$p^4\frac{\pi^4}{L^4} + \frac{1}{D}\left(\frac{p\pi}{L}\right)^2 = \frac{k_p^2}{D}$

soit $k_p^2 = \left(\frac{p\pi}{L}\right)^2\left(1 + D\left(\frac{p\pi}{L}\right)^2\right)$

or k_0 associé à f_0 vaut $\frac{\pi}{L}$, soit

$k_p^2 = p^2 k_0^2\left(1 + D\frac{\pi^2}{L^2}p^2\right)$

et donc $B = \frac{\pi^2 D}{L^2}$.

Avec $D = A/c^2$ et $A = \frac{r^2 E}{4\rho}$, $\frac{1}{c^2} = \frac{\mu}{N}$:

$B = \frac{\pi^2 \mu}{N}\cdot\frac{r^2 E}{4\rho L^2}$, or $\mu = \pi r^2 \rho$

soit $B = \frac{\pi^3 r^4 E}{4 N L^2}$, puis avec

$\nu_0 = \frac{c}{2L} = \frac{1}{2L}\sqrt{\frac{N}{\mu}} \Rightarrow \nu_0^2 = \frac{1}{4L^2}\frac{N}{\pi r^2 \rho}$ et on élimine N :

$B = \frac{\pi^2 r^2 E}{4\nu_0^2 L^4 \rho}$

37. Il faut que $\nu_n \to n\nu_0$ donc que $B \to 0$ à ν_0 constant.

On peut donc jouer sur le matériau pour $\searrow E$ (et/ou $\nearrow \rho$), $\searrow r$, $\nearrow L$, ...

La corde tend vers une corde sans raideur.

38. $\nu_{10} = 10\nu_0\sqrt{1+100B}$

et $\nu_1 = \nu_0\sqrt{1+B}$ et (cf 36) $n=1$ est le mode de fréquence la + faible donc le fondamental à 220Hz.

D'où $\nu_{10} = 10\nu_1 \frac{\sqrt{1+100B}}{\sqrt{1+B}}$ et d'autre

(7)

Tout $\nu_{10,0} = 10\,\nu_1 = 2200\,Hz$.

soit $\nu_{10} = 2238\,Hz$.

Enfin le ½ ton supérieur est à $\nu = 2330\,Hz$

À 2238 Hz % à 2200 Hz, on est au-delà de $2200 \times 1{,}006 = 2213\,Hz$. On entend la dissonance.

3° m̂ acier : même ρ et même E

Donc $\frac{B_{queue}}{B_{droit}} = \left(\frac{L_d}{L_q}\right)^4 \left(\frac{r_q}{r_d}\right)^2 = 1{,}7\,10^{-2}$

Cette fois-ci, $\nu_{10} = 2201\,Hz$ et la dissonance ne s'entend pas.

4° La tension totale vaut donc

$3 \times 88 \times N = 264\,N$

On détermine N (en négligeant l'effet de B) : $N = \mu c^2 = \rho \pi r^2 (2L\nu_0)^2$

$$\begin{cases} N_d = 510 \text{ Newton} \\ N_q = 2{,}2\,10^3 \text{ Newton} \end{cases}$$

soit $N_{TOT\,q} \cong 6\,10^5$ Newton

$N_{TOT\,d} = 1{,}4\,10^5$ Newton

C'est très important...

(8)