PSI 2020 – 2021*

DM N°7 – Corrigé

Le Millenium Bridge

II. — Système élastique continu

❑ 10 – $[E] = \dfrac{[F][L]}{[S][\Delta L]} = \dfrac{[F]}{[S]}$, donc le module d'Young est homogène à une pression, et a comme unité le pascal, de symbole Pa.

❑ 11 – L'allongement vaut $X(x+\mathrm{d}x,t) - X(x,t) = \dfrac{\partial X}{\partial x}\mathrm{d}x$, soit une variation relative $\dfrac{\partial X}{\partial x}$. La force, d'après la loi de Hooke, vaut donc $ES\dfrac{\partial X}{\partial x}$; l'orientation étant imposée par l'axe des x, cette force est une force de traction du côté $x+\mathrm{d}x$.
Le solide est soumis à deux forces l'une en x (gauche/droite) et l'autre en $x+\mathrm{d}x$ (droite/gauche), la résultante vaut $ES\left(\dfrac{\partial X}{\partial x}\right)_{x+\mathrm{d}x} - ES\left(\dfrac{\partial X}{\partial x}\right)_x = ES\dfrac{\partial^2 X}{\partial x^2}\mathrm{d}x$. En appliquant

la relation fondamentale de la dynamique, on obtient $\rho S\mathrm{d}x\dfrac{\partial^2 X}{\partial t^2} = ES\dfrac{\partial^2 X}{\partial x^2}\mathrm{d}x$, soit $\dfrac{\rho}{E}\dfrac{\partial^2 X}{\partial t^2} - \dfrac{\partial^2 X}{\partial x^2} = 0$, i.e. une équation de d'Alembert de célérité $\sqrt{\dfrac{E}{\rho}}$.

On peut remarquer que cette célérité est tout à fait analogue à celle de la corde (cf. ci-dessous) : la masse volumique joue le rôle de la masse volumique en ce qui concerne l'inertie et le module d'Young joue le rôle de la tension en ce qui concerne l'élasticité.

❑ 12 – On applique le théorème du centre d'inertie au petit élément de longueur $\mathrm{d}\ell$ et de masse élémentaire $\mathrm{d}m = \mu\,\mathrm{d}\ell = \mu\sqrt{\mathrm{d}x^2+\mathrm{d}y^2} \approx \mu\,\mathrm{d}x$:

$$\mu\,\mathrm{d}\ell\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}\vec{u}_y = \mu\,\mathrm{d}s\,\vec{g} + \vec{T}(x+\mathrm{d}x,t) - \vec{T}(x,t) = \mu\mathrm{d}\ell\,\vec{g} + \frac{\partial\vec{T}}{\partial x}\mathrm{d}x$$

R : le principe des actions réciproques en x a déjà été utilisé ici.

et, en remarquant **que l'on néglige le poids** dans la suite de l'analyse, on obtient donc :

$$\mu\,\mathrm{d}\ell\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}\vec{u}_y = \frac{\partial\vec{T}}{\partial x}\mathrm{d}x.$$

On voit que la projection sur l'axe horizontal donne $T_x(x,t) = T_x(x+dx,t) \approx T_0$ ou bien, comme dans l'équation précédente $\dfrac{\partial T_x}{\partial x} = 0$.

La projection suivant y donne $\dfrac{\partial^2 y}{\partial t^2} = -g + \dfrac{1}{\mu}\dfrac{\partial T_y}{\partial x} \approx \dfrac{1}{\mu}\dfrac{\partial T_y}{\partial x}$.

On a supposé que le déplacement latéral $y(x,t)$ était faible, donc l'angle α que fait la tangente à la corde avec l'horizontale est faible lui aussi : $\tan\alpha = \dfrac{T_y}{T_x} = \dfrac{\partial y}{\partial x} \approx \dfrac{T_y}{T_0} \approx \alpha \ll 1$.

On a donc $\dfrac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \dfrac{1}{\mu}\dfrac{\partial T_y}{\partial x} = \dfrac{1}{\mu}\dfrac{\partial}{\partial x}\left(T_x\dfrac{\partial y}{\partial x}\right) = \dfrac{1}{\mu}\dfrac{\partial}{\partial x}\left(T_0\dfrac{\partial y}{\partial x}\right) = \dfrac{T_0}{\mu}\dfrac{\partial^2 y}{\partial x^2}$

❑ 13 – On reconnait dans l'équation de d'Alembert de la question précédente la célérité de l'onde : $c_\ell = \sqrt{\dfrac{T_0}{\mu}}$.

III. — Modèle de la poutre élancée

❑ 14 – Il s'agit d'ondes stationnaires. Les solutions de ce type correspondent à des systèmes finis avec des conditions aux limites

❑ 15 – En injectant et en séparant les variables x et t : $\rho S \frac{g''}{g} = -IE \frac{f^{(4)}}{f} = cte$, car les deux variables x et t sont indépendantes. Si la constante est négative, l'équation en g est celle d'un oscillateur harmonique. Le fait que la constante soit négative apparaît dans la question suivante !

L'équation en f est d'ordre 4, il y a donc quatre constantes d'intégration à déterminer. L'équation en g est d'ordre 2, il y a donc deux autres constantes d'intégration à déterminer. y s'obtenant comme un produit, on peut regrouper deux constantes multiplicatives, il y a donc cinq constantes à déterminer, tout ceci pour UN mode

❑ 16 – L'équation caractéristique s'écrit $r^4 = -C^{te}$. Si la constante est négative, on peut poser $r^4 = \gamma^2$ et supposer sans perte de généralités que $\gamma > 0$. On a donc $r^2 = \pm\gamma$ et $r = \pm\sqrt{\gamma}$ et $r = \pm \mathrm{j}\sqrt{\gamma}$. En posant $\sqrt{\gamma} = \beta$, on a bien quatre solutions exponentielles $\exp(\beta x)$, $\exp(-\beta x)$, $\exp(\mathrm{j}\beta x)$ et $\exp(\mathrm{j}\beta x)$ qui, combinées conduisent bien à la somme proposée. En reportant dans l'équation obtenue en 15, on a $\beta = \left(\frac{\rho S}{IE}\right)^{1/4} \sqrt{\omega}$.

Si la constante est positive, on peut poser $r^4 = -\gamma^2$, soit $r = \pm\frac{1+\mathrm{j}}{\sqrt{2}}\beta$ et $r = \pm\frac{1-\mathrm{j}}{\sqrt{2}}\beta$; tous les termes possèdent des parties exponentielles ce qui, avec des valeurs aux limites nulles, conduit à la seule solution f=0. La constante est bien négative.

❑ 17 – Les quatre équations aux limites donnent :

$y(x=0) = 0,\ A + C = 0$; $\left(\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\right)_{x=0} = 0,\ \beta^2(A - C) = 0$; soit $A = C = 0$.

$y(x = L) = 0,\ B\sin(\beta L) + D\sinh(\beta L) = 0$; $\left(\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\right)_{x=L} = 0,\ \beta^2\left(B\sin(\beta L) - D\sinh(\beta L)\right) = 0$, système de Cramer qui donne une solution non nulle si le déterminant est nul : $2\sin(\beta L)\sinh(\beta L) = 0$ soit $\beta_n L = n\pi$. Et donc $\omega_n = \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 \sqrt{\frac{IE}{\rho S}}$

❑ 18 – On doit avoir aux extrémités une ligne horizontale ce qui est toujours le cas, et donc un noeud aux extrémités. La dérivée seconde nulle aux extrémités est également vérifiée dans tous les cas. On détermine n en comptant les ventres. Les cas qui ne correspondent pas à l'étude sont ceux de la déformation à deux dimensions de la plaque $y = f(x, z)$.

figure	a	b	c	d	e	f	g	h
n	1		2		3	4		
étude	Oui	Non	Oui	Non	Oui	Oui	Non	Non

❑ 19 – Les fréquences des modes sont en Hz, les longueurs de travée en m.

longueur	$n=1$	$n=2$	$n=3$	$n=4$
70	0,50	2,0	4,5	8
144	0,12	0,47	1,06	1,9
108	0,21	0,84	1,9	3,4

Il y a donc résonance possible (fréquence proche de 2 Hz) pour le mode 2,3 ou 4 selon la travée.

Dans le cadre d'une vibration latérale, on intervertit le rôle de b et h.

longueur	$n=1$	$n=2$
70	1,9	7,5
144	0,44	1,76
108	0,79	3,1

Il y a donc résonance possible pour le mode 1 de la première travée.