PSI* 2023 - 2024

DM N°7 - Pour le 05 mars 2024

PARTIE 1 : Propagation d'OEM – Centrale MP (extrait)

J'ai laissé la totalité de la partie III de ce problème pour que vous voyiez ce qui peut être proposé un jour de concours ; **pour le DM, seule la partie III B. est à traiter** (les deux autres sont très proches du cours, il serait bon que vous soyiez capables de les traiter sans difficulté…)

Notations

Dans tout le problème, $\langle f(M,t)\rangle$ désigne la valeur moyenne dans le temps de la grandeur $f(M,t)$.

La pulsation ω sera toujours réelle, positive, non nulle.

À toute grandeur réelle $f(M,t) = A(M)\cos(\omega t - \varphi(M))$, on pourra associer la grandeur complexe $\underline{f}(M,t) = A(M)\exp i(\omega t - \varphi(M))$.

Le nombre imaginaire i est tel que $i^2 = -1$.

La polarisation d'une onde électromagnétique fera référence au champ électrique.

Données utiles

Masse d'un proton	$m_p = 1{,}67 \times 10^{-27}$ kg
Masse d'un électron	$m_e = 9{,}11 \times 10^{-31}$ kg
Charge élémentaire	$e = 1{,}60 \times 10^{-19}$ C
Permittivité diélectrique du vide	$\varepsilon_0 = 8{,}85 \times 10^{-12}\ \mathrm{F\cdot m^{-1}}$
Perméabilité magnétique du vide	$\mu_0 = 4\pi 10^{-7}\ \mathrm{H\cdot m^{-1}}$
Célérité de la lumière dans le vide	$c = 3{,}00 \times 10^{8}\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}$
Constante de gravitation	$G = 6{,}67 \times 10^{-11}\ \mathrm{N\cdot m^2\cdot kg^{-2}}$
Masse de la Terre	$M_T = 5{,}97 \times 10^{24}$ kg
Rayon de la Terre	$R_T = 6378$ km
Vitesse angulaire de rotation de la Terre sur elle-même dans le référentiel géocentrique	$\omega_T = 7{,}29 \times 10^{-5}\ \mathrm{rad\cdot s^{-1}}$

Pour les deux problèmes, les relations de passage des champs sont rappelées en fin d'énoncé.

Formulaire

$$\overrightarrow{\mathrm{rot}}\left(\overrightarrow{\mathrm{rot}}(\vec{A})\right) = \overrightarrow{\mathrm{grad}}\left(\mathrm{div}(\vec{A})\right) - \Delta\vec{A}$$

Gradient d'un champ scalaire V en coordonnées sphériques (r,θ,φ)

$$\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,V = \frac{\partial V}{\partial r}\vec{u}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial \theta}\vec{u}_\theta + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial V}{\partial\varphi}\vec{u}_\varphi$$

III.A – Ondes électromagnétiques dans le vide

III.A.1) Rappeler les équations de Maxwell en présence de charges et de courants.

Quelles sont les traductions globales, dites aussi formes intégrales, de ces lois locales ?

III.A.2) Établir l'équation de propagation du champ $\vec{E}(M,t)$ dans le vide (en l'absence de charges et de courants).

III.A.3) On considère une onde dont le champ électrique en notation complexe s'écrit :

$$\underline{\vec{E}}(M,t) = E_0 \exp i(\omega t - kx)\,\vec{e}_y$$

où $E_0 \in \mathbb{R}_+^*$ et $k \in \mathbb{R}_+^*$.

Caractériser cette onde (donner 5 qualificatifs).

III.A.4) À quelle condition sur k et ω cette onde est-elle une solution de l'équation de propagation ? Comment appelle-t-on cette relation ? Le vide est-il un milieu dispersif (à justifier) ?

III.A.5) Déterminer l'expression réelle du champ magnétique $\vec{B}(M,t)$.

III.A.6) Déterminer l'expression du vecteur de Poynting $\vec{\Pi}(M,t)$. Quelle est la signification physique du flux de $\vec{\Pi}$ à travers une surface S ouverte, arbitrairement orientée ?

III.B – Ondes électromagnétiques dans un milieu conducteur

III.B.1) En absence de densité volumique de charges, mais en présence de densité volumique de courants $\vec{\jmath}(M,t)$, établir l'équation de propagation du champ $\vec{\underline{E}}(M,t)$ en fonction de $\vec{\underline{\jmath}}(M,t)$.

III.B.2) On considère une onde du type $\vec{\underline{E}}(M,t) = E_0 \exp i(\omega t - \underline{k}x)\,\vec{e}_y$ où $E_0 \in \mathbb{R}_+^*$ et $\underline{k} \in \mathbb{C}$. On pose, en notation complexe, la relation d'Ohm : $\vec{\underline{\jmath}}(M,t) = \underline{\gamma}\,\vec{\underline{E}}(M,t)$ où $\underline{\gamma}$ est la conductivité électrique complexe du milieu, on suppose qu'elle ne dépend ni de l'espace ni du temps.

Réécrire l'équation de propagation du champ $\vec{\underline{E}}(M,t)$ en fonction de $\underline{\gamma}$.

À quelle condition sur $\underline{k}$ et ω cette onde est-elle une solution de l'équation de propagation ? On ne cherchera pas à résoudre cette équation.

III.B.3) On pose $\underline{k} = k_1 + i\,k_2$, avec k_1 et k_2 réels.

a) Écrire en notation réelle l'expression du champ électrique $\vec{E}(M,t)$.

b) Par analogie avec le vide, dire ce que représente k_1, la partie réelle de $\underline{k}$. Donner une interprétation du signe de k_1. Quel phénomène physique traduit k_2, la partie imaginaire de $\underline{k}$?

Que dire si le produit $k_1\,k_2$ est positif ? Que dire si le produit $k_1\,k_2$ est négatif ?

c) Définir par une phrase la vitesse de phase v_φ et donner l'expression de la vitesse de phase de cette onde en fonction des grandeurs précédemment définies.

III.B.4) Démontrer une relation simple entre les vecteurs $\vec{\underline{E}}(M,t)$, $\vec{\underline{k}}$ (vecteur d'onde complexe) et $\vec{\underline{B}}(M,t)$. Déterminer les expressions de la représentation complexe du champ magnétique $\vec{\underline{B}}(M,t)$ et du champ réel $\vec{B}(M,t)$. Que dire des champs $\vec{E}(M,t)$ et $\vec{B}(M,t)$ si k_2 est non nul ?

III.B.5) Déterminer l'expression du vecteur de Poynting $\vec{\Pi}(M,t)$ puis l'expression de sa valeur moyenne $\langle\vec{\Pi}(M,t)\rangle$. Commenter.

III.B.6) Une onde incidente, $\vec{\underline{E}}_i(M,t) = E_{0i} \exp i(\omega t - \underline{k}_A x)\,\vec{e}_y$ où $E_{0i} \in \mathbb{R}_+^*$ et $\underline{k}_A = k_{A1} + i\,k_{A2}$ avec k_{A1} et k_{A2} deux réels, se propageant dans le milieu (A) arrive en incidence normale sur une interface située en $x = 0$ et séparant le milieu (A) du milieu (B).

Cette onde incidente donne naissance à deux ondes, l'une réfléchie, $\vec{\underline{E}}_r(M,t) = \underline{E}_{0r} \exp i(\omega t + \underline{k}_A x)\,\vec{e}_y$, se propageant dans le milieu (A) et l'autre transmise, $\vec{\underline{E}}_t(M,t) = \underline{E}_{0t} \exp i(\omega t - \underline{k}_B x)\,\vec{e}_y$ où $\underline{k}_B = k_{B1} + i\,k_{B2}$ avec k_{B1} et k_{B2} deux réels, se propageant dans le milieu (B).

On définit les coefficients de réflexion et de transmission énergétiques au niveau de l'interface située en $x = 0$ par

$$R = \frac{\left\langle \left\| \vec{\Pi}_r(O,t) \right\| \right\rangle}{\left\langle \left\| \vec{\Pi}_i(O,t) \right\| \right\rangle} \qquad \text{et} \qquad T = \frac{\left\langle \left\| \vec{\Pi}_t(O,t) \right\| \right\rangle}{\left\langle \left\| \vec{\Pi}_i(O,t) \right\| \right\rangle}$$

où $\vec{\Pi}_i(O,t)$, $\vec{\Pi}_r(O,t)$ et $\vec{\Pi}_t(O,t)$ représentent respectivement les vecteurs de Poynting, au voisinage d'un point O de l'interface, des ondes incidente, réfléchie et transmise ($\|\vec{A}\|$ désigne le module du vecteur $\vec{A}$).

a) Justifier l'écriture du champ $\vec{\underline{E}}_r(M,t)$.

b) Donner les expressions de R et de T en fonction des données précédentes.

III.C – Propagation des ondes électromagnétiques dans l'ionosphère

L'ionosphère, couche de l'atmosphère située à plus de 60 km d'altitude, peut être considérée comme un plasma : c'est un milieu ionisé, caractérisé par une densité volumique d'électrons libres de charge $-e$, de masse m_e, égale à $n_1 = 1{,}00 \times 10^{11}\ \mathrm{m}^{-3}$ et une densité volumique de cations de charge $+e$, de masse m_C, égale aussi à n_1, l'ensemble est donc globalement neutre. La valeur de n_1 est supposée constante.

On se propose d'étudier dans ce milieu la propagation d'ondes du type $\vec{\underline{E}}(M,t) = E_0 \exp i(\omega t - \underline{k}x)\,\vec{e}_y$ où $E_0 \in \mathbb{R}_+^*$ et $\underline{k} \in \mathbb{C}$. On pose à nouveau $\underline{k} = k_1 + i\,k_2$, avec k_1 et k_2 réels ; si $k_1 \neq 0$, alors on choisira $k_1 > 0$.

Dans toute la suite, vous pourrez utiliser les résultats démontrés dans la partie III.B.

Dans le plasma, les électrons et les ions sont soumis à la force de Lorentz due aux champs électrique et magnétique de l'onde. On négligera l'effet de la pesanteur et les interactions entre particules chargées, et on supposera que les particules sont non relativistes (i.e. leurs vitesses sont très petites devant c).

III.C.1) En admettant que le rapport $\omega/|\underline{k}|$ est de l'ordre de c, montrer que les effets de la partie magnétique de la force de Lorentz sont négligeables devant les effets de la partie électrique de la force de Lorentz.

III.C.2) En régime établi, et en supposant que l'amplitude des déplacements des charges reste petite devant la longueur d'onde, déterminer l'expression du vecteur vitesse $\underline{\vec{v}}_e$ (dans le référentiel galiléen d'étude) d'un électron, positionné en M à l'instant t, en fonction de m_e, e, ω et $\underline{\vec{E}}(M,t)$. Donner l'expression du vecteur vitesse $\underline{\vec{v}}_i$ d'un cation. En déduire l'expression de la conductivité complexe du plasma $\underline{\gamma}$. À la vue des valeurs numériques, montrer que $\underline{\gamma} = -i\dfrac{n_1 e^2}{m_e \omega}$.

III.C.3) Calculer la puissance volumique moyenne fournie par le champ électromagnétique aux électrons libres. Commenter.

III.C.4) Établir l'expression de $\underline{k}^2$ dans le plasma. Mettre en évidence une pulsation caractéristique dite pulsation plasma ω_p ; donner son expression et calculer sa valeur numérique pour l'ionosphère. Calculer la longueur d'onde dans le vide λ_p associée. À quel domaine du spectre électromagnétique appartient cette longueur d'onde ?

III.C.5) On se place dans le cas $\omega < \omega_p$.

a) Donner l'expression de $\underline{k}$ en fonction de ω_p, ω et c (on prendra k_2 négatif).

b) Donner les expressions des champs réels $\vec{E}(M,t)$ et $\vec{B}(M,t)$. Caractériser l'onde obtenue.

c) Donner l'expression de $\langle \vec{\Pi}(M,t) \rangle$ dans le plasma.

III.C.6) On se place dans le cas $\omega > \omega_p$.

a) Donner l'expression de $\underline{k}$ en fonction de ω_p, ω et c. Commenter.

b) Donner les expressions de $\vec{E}(M,t)$ et $\vec{B}(M,t)$. Caractériser l'onde obtenue (donner 5 qualificatifs).

c) Donner l'expression de $\langle \vec{\Pi}(M,t) \rangle$.

d) Déterminer l'expression de la vitesse de phase $v_\varphi(\omega)$ de cette onde en fonction de ω_p, ω et c. Le milieu est-il dispersif (justifier la réponse) ?

e) Calculer la vitesse de groupe $v_g(\omega)$ en fonction de ω_p, ω et c. Donner la signification physique de cette vitesse.

f) Comparer $v_\varphi(\omega)$ et $v_g(\omega)$ à c. Que penser du fait que $v_\varphi(\omega)$ puisse être supérieure à c ?

III.C.7) Le choix de la fréquence des ondes radars émises par Jason 2 (f = 13,6 GHz) vous semble-t-il correct ?

PARTIE 2 : Plasmons de surface – Mines-Ponts PSI (extrait)

Dans toute cette partie on notera i le nombre complexe tel que $i^2 = -1$.

II.A. — Propagation d'une onde sur un plan métallique

On considère un plan conducteur infini ($\Pi = xOz$, voir figure 4) plongé dans le vide. Ce plan est parcouru par des ondes électromagnétiques de célérité c caractérisées par une densité surfacique de courant $\overrightarrow{j_s}$ indépendante de x, et dont la représentation complexe s'écrit

$$\underline{\overrightarrow{j_s}} = j_{sM} e^{i(Kz-\omega t)} \widehat{e_z}$$

où j_{sM} et K sont des constantes réelles et positives.

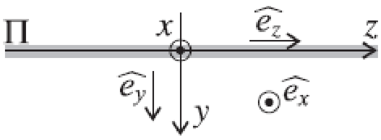


FIGURE 4 – Géométrie du plan

❏ **10** — En adaptant l'équation de conservation de la charge au cas de distributions surfaciques, déterminer la densité surfacique de charge $\sigma(z,t)$ associée à $\overrightarrow{j_s}$.

❏ **11** — Montrer que le champ électrique $\overrightarrow{E}$ créé par la densité de charges σ est de la forme

$$\overrightarrow{E} = E_y \widehat{e_y} + E_z \widehat{e_z}$$

où E_y et E_z sont deux fonctions des variables y, z et t.

❑ **11 —** Montrer que le champ électrique $\vec{E}$ créé par la densité de charges σ est de la forme

$$\vec{E} = E_y \hat{e_y} + E_z \hat{e_z}$$

où E_y et E_z sont deux fonctions des variables y, z et t.

❑ **12 —** Déterminer la limite de la fonction $E_y(y,z,t)$ lorsque $y \to 0^+$.

❑ **13 —** On suppose que $k = \omega / c < K$. Dans la région $y > 0$, déterminer l'expression de $E_y(y,z,t)$ puis celle de $E_z(y,z,t)$ en fonction des paramètres K, j_{sM}, ε_0, ω et k et des variables y, z et t. Pour cette dernière expression, on pourra calculer $\operatorname{div}\vec{E}$.

❑ **14 —** Quelles sont les propriétés de l'onde qui existe dans la région $y > 0$?

On se place dans le cas où le plan est un métal infiniment fin contenant des charges libres sous la forme d'électrons (charge $e < 0$ et masse m). Le nombre de ces électrons par unité de surface est noté ρ, il est supposé constant. On fait l'hypothèse que ces électrons peuvent se déplacer sans interaction (frottement) avec le réseau cristallin constituant le métal. On suppose enfin que ces électrons restent dans le plan $y = 0$ et que le module de leur vitesse $v = \|\vec{v}\|$ est toujours négligeable devant la célérité de la lumière c.

❑ **15 —** En écrivant la relation fondamentale de la dynamique, déterminer l'expression de la vitesse d'un électron dans le métal.

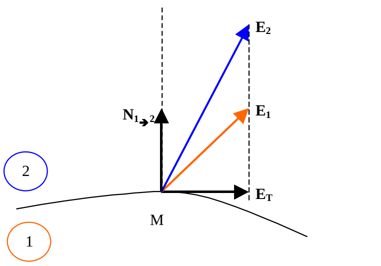
❑ **16 —** En déduire la relation de dispersion reliant ω et K pour des ondes libres se propageant dans le plan métallique. De telles ondes sont appelées plasmons de surface. On introduira la pulsation

$$\Omega_S = \frac{\rho e^2}{\varepsilon_0 m c}$$

❑ **17 —** Pourquoi une onde électromagnétique plane progressive incidente, dans le vide, ne peut-elle pas exciter un plasmon de surface sur le métal ?

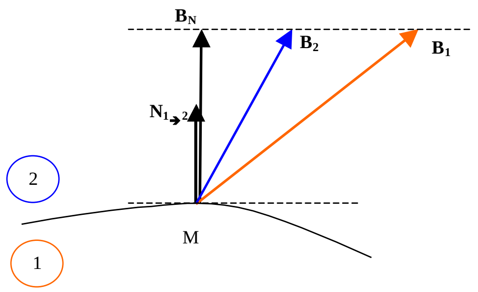
Relations de passage des champs

$$\mathbf{E}_2 - \mathbf{E}_1 = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}\mathbf{N}_{1\to 2}$$



Champ E :
- Continuité de la composante tangentielle
- Discontinuité éventuelle de la composante normale

$$\mathbf{B}_2 - \mathbf{B}_1 = \mu_0 \mathbf{j}_s \wedge \mathbf{N}_{1\to 2}$$



Champ B :
- Continuité de la composante normale
- Discontinuité éventuelle de la composante tangentielle