

**Partie A – Traversée atmosphère/ionosphère**

On se propose d'étudier les phénomènes de réflexion et de transmission des ondes électromagnétiques (ondes radio) à travers l'interface atmosphère - ionosphère.

Cet interface supposé plan, sera représenté par le plan  $xOy$  du référentiel  $Oxyz$  de la figure 2, l'ionosphère étant dans la région  $z > 0$ , et l'atmosphère dans la région  $z < 0$ .

On se place d'abord dans le cas d'une incidence normale.

Soient  $\vec{E}_i$ ,  $\vec{E}_r$  et  $\vec{E}_t$  les champs électriques incident, réfléchi et transmis au niveau de cet interface, et soient  $\vec{B}_i$ ,  $\vec{B}_r$  et  $\vec{B}_t$  les champs magnétiques correspondants (voir fig. 2).

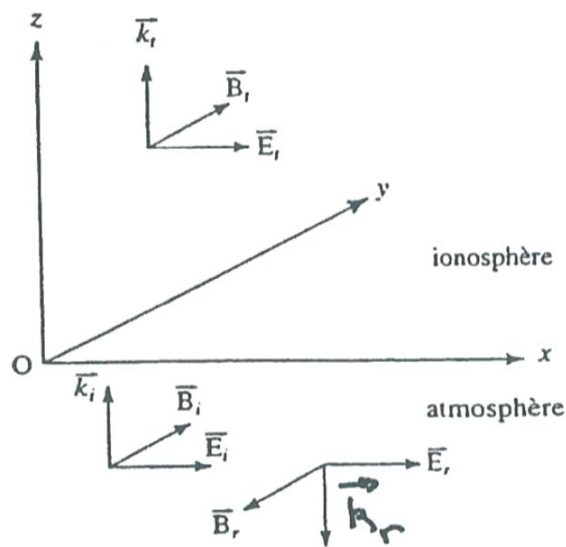
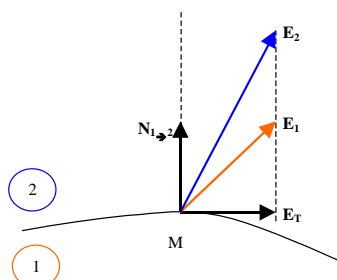


Fig. 2

- L'atmosphère au-dessous de l'ionosphère est supposée se comporter comme le vide.
- L'ionosphère est un plasma composé d'électrons et de cations ; on suppose que seul le mouvement des électrons est à prendre en compte dans les phénomènes étudiés ; leur vitesse est supposée non relativiste ( $v \ll c$ ). On négligera leur poids.
- On définit l'indice,  $n$ , du plasma par :  $\underline{k}_t^2 = n^2 \frac{\omega^2}{c^2}$ , où  $n$  peut être complexe.
- Tous les champs seront supposés être ceux d'ondes PPM polarisées rectilignement suivant les directions de la figure 2
- Les relations de passage des champs sont fournies :

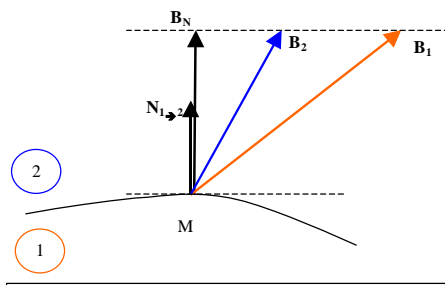
$$\vec{E}_2 - \vec{E}_1 = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \vec{N}_{1 \rightarrow 2}$$

$$\vec{B}_2 - \vec{B}_1 = \mu_0 \vec{j}_s \wedge \vec{N}_{1 \rightarrow 2}$$



**Champ E :**

- Continuité de la composante tangentielle
- Discontinuité éventuelle de la composante normale



**Champ B :**

- Continuité de la composante normale
- Discontinuité éventuelle de la composante tangentielle

1. a) Donner les relations entre les champs complexes  $\vec{B}_i$  et  $\vec{E}_i$  d'une part et  $\vec{B}_r$  et  $\vec{E}_r$  d'autre part.  
 b) Donner de même la relation entre les champs complexes  $\vec{B}_t$  et  $\vec{E}_t$  en fonction de  $n$  notamment.  
 c) En adoptant les orientations des champs indiquées sur la figure 2, exprimer les relations de passage de ces champs à l'interface  $z = 0$  (on indique qu'il n'y a ni densité surfacique de courant, ni densité surfacique de charge).
2. En déduire l'expression du coefficient de réflexion en amplitude du champ électrique,  $r$ , fonction de  $n$ , ainsi que du coefficient de réflexion en intensité de rayonnement  $R$ , défini par  $R = |r|^2$ , également en fonction de  $n$ .
3. Montrer que l'indice du plasma vérifie la relation  $n^2 = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}$ ;  $\omega_p$  est une constante que l'on déterminera en fonction de la charge élémentaire  $e$ , de la masse de l'électron,  $m$ , de  $\epsilon_0$  et de la densité volumique d'électrons  $N$ .  
 Quelle est la valeur de  $R$  lorsque  $\omega < \omega_p$ ?  
 Dans ce cas, à quoi peut-on assimiler l'interface atmosphère-ionosphère?
4. Déterminer l'expression de  $R$  pour  $\omega > \omega_p$ .  
 En déduire la fréquence de coupure  $f_c$ , en-dessous de laquelle il n'existe pas d'onde transmise dans l'ionosphère.
5. Application numérique :  
 On suppose que la densité électronique  $N$  dans la région de l'interface est :  

$$N = 6.10^{11} \text{ électrons/m}^3$$
  
 Calculer la fréquence de coupure  $f_c$ , puis les valeurs de  $R$  pour les fréquences de 7 et 8 Mhz.  
 En déduire l'allure du graphe de  $R$  en fonction de la fréquence.  
 Quelle est la relation entre le coefficient de réflexion en intensité  $R$  et le facteur de transmission en intensité  $T$ ?  
 Sur le même schéma, donner l'allure du graphe de  $T$  en fonction de la fréquence.
6. On se place maintenant dans le cas d'une incidence oblique, et on désigne par  $i$  l'angle d'incidence (voir fig. 3).

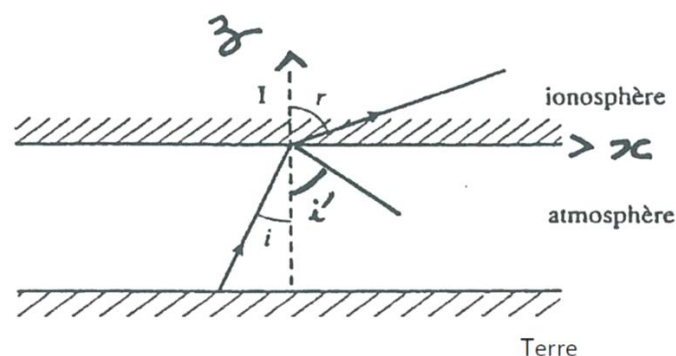


Fig. 3

Rappeler les lois de Descartes pour la réflexion et la réfraction (voir le corrigé pour une démonstration).

Pour quelle(s) valeur(s) de l'angle d'incidence et dans quelles conditions aura-t-on une réflexion totale ? Une réfraction limite ?

7. Application numérique :

Un poste émetteur, au niveau de la mer, émet une onde radio de fréquence 12 Mhz vers l'ionosphère, dans une direction faisant l'angle  $i$  avec la normale à l'interface.

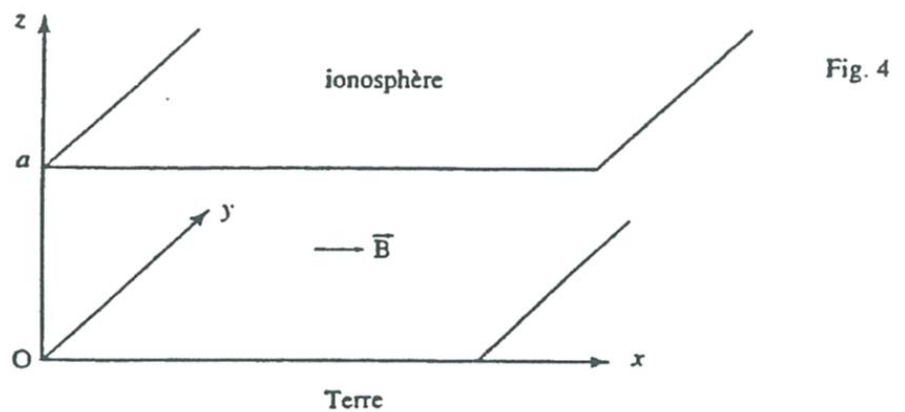
En supposant que l'onde arrive sur l'interface précédent sous forme d'onde plane, calculer l'angle  $i$ , à partir duquel l'onde incidente ne traversera plus l'interface.

**Partie B – Propagation des ondes entre la terre et l'ionosphère**

On s'intéresse maintenant à la propagation des ondes électromagnétiques dans la région comprise entre la surface de la Terre et l'ionosphère, dans une direction suivant la courbure de la Terre. Pour simplifier, on assimile les portions de sphères à des plans parallèles, on néglige les pertes, et on suppose que les deux plans limitant cette région se comportent comme des conducteurs parfaits.

Les deux plans, supposés infinis, parallèles au plan  $xOy$ , sont situés en  $z = 0$  et  $z = a$  (voir fig. 4). Entre les deux, il y a de l'air, de permittivité  $\epsilon_0$  et de perméabilité  $\mu_0$ .

On supposera qu'il n'y a pas de densité surfacique de charge sur ces plans.



Entre les deux plans, on considère une onde électromagnétique se propageant dans la direction  $Oy$ , et dont le champ magnétique est de la forme :

$$\vec{B} = B_0 \cos(zk_z) \cdot \exp j(\omega t - yk_y) \cdot \vec{u}_x$$

Les composantes  $k_y$  et  $k_z$  du vecteur d'onde sont les inconnues du problème.

8. Rappeler les équations locales vérifiées par le champ  $\vec{B}$ , à l'intérieur de l'espace limité par les deux plans.

A partir de l'une de ces équations, établir l'expression du champ électrique. Ce champ est-il transverse ?

9. Quelles sont les conditions que doivent vérifier les composantes du champ électrique obtenu, sur les plans  $z = 0$  et  $z = a$  ?

En déduire que  $k_z$  ne peut prendre que des valeurs discrètes, dépendant de  $a$ .

Pour la suite du problème, on choisira la plus petite valeur positive de  $k_z$ .

10. Rappeler l'équation différentielle de propagation de  $\vec{B}$ . A partir de cette équation, déterminer la relation de dispersion  $k_y(\omega)$  en fonction de  $a$  et de  $c$ .

11. Montrer que, seules des ondes ayant une fréquence supérieure à une fréquence critique  $f_c''$ , peuvent se propager suivant la direction  $Oy$ . On donnera l'expression de  $f_c''$  en fonction de  $a$  et  $c$ .

Que se passe-t-il pour  $f \gg f_c''$  ?

12. Application numérique :  
Quelle est la valeur de la fréquence critique pour  $a = 80 \text{ km}$  ?
13. Quelle est la vitesse de phase lorsque  $f > f_c''$  ?  
A partir de la relation de dispersion, déterminer la vitesse de groupe  $v_g$ .
14. On se propose de retrouver l'expression de la vitesse de groupe par des considérations d'énergie.  
Déterminer l'expression de la valeur moyenne dans le temps du vecteur de Poynting  $\langle \vec{S} \rangle$ .
15. En déduire le flux moyen d'énergie  $\langle \Phi \rangle$  qui traverse par seconde une surface  $\Sigma = aL$  appartenant à un plan parallèle à  $xOz$ , dans le référentiel de la figure 4.  
Déterminer la valeur moyenne temporelle du vecteur de Poynting
16. En calculant l'énergie électromagnétique moyenne emmagasinée dans un volume  $d\tau$ , retrouver l'expression de la vitesse de groupe.

On rappelle les relations suivantes pour un champ de vecteur  $\vec{A}$  :

$$\overrightarrow{\text{rot}}(\overrightarrow{\text{rot}})(\vec{A}) = \overrightarrow{\text{grad}}(\text{div}\vec{A}) - \Delta\vec{A}$$

$$\overrightarrow{\text{rot}}(\vec{A}(M, t)) = \left( \frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \right) \vec{e}_x + \left( \frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \right) \vec{e}_y + \left( \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right) \vec{e}_z.$$