

On se propose ici de déterminer le temps de séchage complet d'un sol saturé en eau (**photo 4**).



**Photo 4** - Sol saturé en eau

On travaille en coordonnées cartésiennes  $(x, y, z)$  de base orthonormée  $(\bar{e}_x, \bar{e}_y, \bar{e}_z)$ . Le sol (**figure 10**) est considéré comme infini dans les directions  $\bar{e}_x$  et  $\bar{e}_y$ . Le plan  $(O, \bar{e}_x, \bar{e}_y)$  est ici considéré comme imperméable. Le sol s'étend depuis la côte  $z = 0$  jusqu'à la côte  $H$ .



**Figure 10** - Modèle du sol

On note  $T$  la température, supposée uniforme, de l'air extérieur situé en  $z > H$  et assimilable à un gaz parfait ;  $R$  désigne la constante des gaz parfait et  $N_A$  la constante d'Avogadro. La pression partielle de l'eau dans l'atmosphère est notée  $P_{ext}$ .

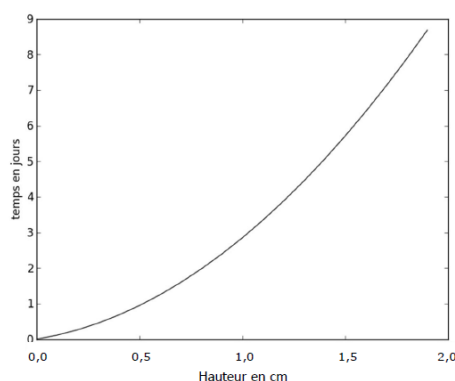
On admet que, sous l'action de l'air extérieur, le sol s'assèche par sa partie supérieure. On adopte un modèle dans lequel  $z_m(t)$  délimite la partie mouillée du sol. On a  $z_m(t=0) = H$ . On note  $n_{liq}$  le nombre de molécules d'eau liquide par unité de volume de sol.  $n_{liq}$  est supposé constant dans la partie mouillée du sol.

À la date  $t$ , dans la zone  $z < z_m(t)$ , le sol est mouillé et contient de l'eau liquide. Dans la zone  $z > z_m(t)$ , le sol est sec mais contient de la vapeur d'eau assimilée à un gaz parfait. On fait l'hypothèse que cette vapeur d'eau est également à la température uniforme  $T$ . Elle diffuse vers l'extérieur suivant la loi de Fick de coefficient de diffusion  $D$ .

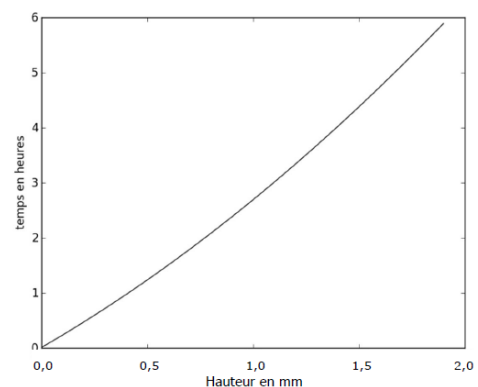
À l'interface sol-atmosphère, en  $z = H$ , le vecteur densité de courant en molécules d'eau est de la forme :  $\vec{j} = h(P(H) - P_{ext})\bar{e}_z$  où  $P(H)$  est la pression partielle de l'eau en  $z = H$ .

À la date  $t$ , pour  $z > z_m(t)$ , on note  $n_{vap}(z,t)$  la densité locale en molécules d'eau sous forme vapeur et  $\Phi_s(z,t)$  le débit ascendant en molécules d'eau qui traversent une section horizontale  $S$ , orientée vers le haut et située à la côte  $z$ .

- Q31.** Rappeler la définition de la pression de vapeur saturante. Écrire une condition faisant intervenir la pression partielle  $P_{\text{ext}}$  de l'eau dans l'atmosphère et la pression saturante de l'eau notée  $P_{\text{sat}}(T)$  pour que le sol puisse effectivement sécher.
- Q32.** Pourquoi un sol sèche-t-il plus vite lorsqu'il y a du vent ?
- Q33.** Rappeler la loi de Fick et préciser les unités, dans le Système International, des grandeurs qui interviennent.
- Q34.** On suppose que dans le sol le phénomène de diffusion est en régime stationnaire. Justifier que le débit  $\Phi_s$  est uniforme.
- Q35.** Pour  $z_m(t) < z < H$ , déterminer l'expression de  $n_{\text{vap}}(z)$  en fonction de  $n_{\text{vap}}(z_m(t))$ ,  $\Phi_s$ ,  $D$ ,  $S$ ,  $z$  et  $z_m(t)$ .
- Q36.** En considérant qu'en  $z = z_m(t)$ , la vapeur d'eau est en équilibre thermodynamique avec l'eau liquide, exprimer  $n_{\text{vap}}(z_m(t))$  en fonction de  $N_A$ ,  $P_{\text{sat}}(T)$ ,  $R$  et  $T$ .
- Q37.** En déduire l'expression de  $n_{\text{vap}}(z)$  en fonction de  $N_A$ ,  $P_{\text{sat}}(T)$ ,  $R$ ,  $T$ ,  $\Phi_s$ ,  $D$ ,  $S$ ,  $z$  et  $z_m(t)$ .
- Q38.** Exprimer alors  $P(H)$  en fonction de  $P_{\text{sat}}(T)$ ,  $N_A$ ,  $R$ ,  $T$ ,  $\Phi_s$ ,  $D$ ,  $S$ ,  $H$  et  $z_m(t)$ .
- Q39.** En utilisant la condition à l'interface sol-atmosphère, exprimer  $\Phi_s$  en fonction de  $h$ ,  $P_{\text{sat}}(T)$ ,  $P_{\text{ext}}$ ,  $S$ ,  $R$ ,  $T$ ,  $H$ ,  $z_m(t)$ ,  $N_A$  et  $D$ .
- Q40.** Écrire une équation différentielle de conservation des molécules d'eau à l'interface  $z = z_m(t)$  reliant  $\Phi_s$ ,  $n_{\text{liq}}$  et  $\frac{dz_m(t)}{dt}$ .
- Q41.** À l'aide des deux équations établies aux deux questions précédentes, en déduire l'équation différentielle vérifiée par  $z_m(t)$ , puis exprimer le temps de séchage  $\tau_{\text{séchage}}$  en fonction de  $h$ ,  $P_{\text{sat}}(T)$ ,  $P_{\text{ext}}$ ,  $n_{\text{liq}}$ ,  $R$ ,  $T$ ,  $H$ ,  $N_A$  et  $D$ .
- Q42.** Le temps de séchage des sols dépend du phénomène de diffusion de la vapeur d'eau dans le sol et du phénomène d'évaporation à l'interface sol-atmosphère. On peut définir asymptotiquement deux zones, délimitées par une hauteur notée  $H_{\text{lim}}$ , dans lesquelles soit le phénomène de diffusion, soit le phénomène d'évaporation est déterminant. Préciser l'expression de  $H_{\text{lim}}$  en fonction de  $h$ ,  $R$ ,  $T$ ,  $N_A$  et  $D$ .
- Q43.** Les **figures 11 et 12** représentent le temps de séchage en fonction de la hauteur  $H$  pour  $T = 300 \text{ K}$ ,  $D = 5 \cdot 10^{-6} \text{ SI}$ ,  $h = 5 \cdot 10^{17} \text{ molécules} \cdot \text{m}^{-2} \cdot \text{s}^{-1} \cdot \text{Pa}^{-1}$ ,  $P_{\text{ext}} = 600 \text{ Pa}$  et  $n_{\text{liq}} = 1,2 \cdot 10^{18} \text{ molécules} \cdot \text{m}^{-3}$ . Déterminer à l'aide de ces courbes (échelles différentes) la valeur numérique de  $H_{\text{lim}}$  et préciser le positionnement de chacune de ces zones.



**Figure 11** - Temps de séchage en fonction de la hauteur  $H$



**Figure 12** - Temps de séchage en fonction de la hauteur  $H$

## Données

### Constantes physiques

$$R = 8,31 \text{ J} \cdot \text{mol}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$$

$$N_A = 6,022 \cdot 10^{23} \text{ mol}^{-1}$$

### Données physicochimiques

#### Densités et masse volumique

Masse volumique de l'air dans les conditions ambiantes :  $\rho_0 = 1,2 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$

Densité d'un glaçon :  $d_{gl} = 0,9$

Densité de l'eau des océans :  $d_{oc} = 1,1$

#### Masses molaires

$$M(\text{MgCl}_2) = 95 \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1}$$

$$M(\text{NaCl}) = 58,5 \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1}$$

$$M(\text{H}_2\text{O}) = 18 \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1}$$

#### Principaux sels dissous dans les eaux des océans

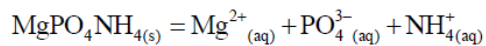
Anions (en g / kg d'eau)	Cations (en g / kg d'eau)
Chlorure ( $\text{Cl}^-$ ) : 19	Sodium ( $\text{Na}^+$ ) : 10,5
Sulfate ( $\text{SO}_4^{2-}$ ) : 2,65	Magnésium ( $\text{Mg}^{2+}$ ) : 1,3
Hydrogénocarbonate ( $\text{HCO}_3^-$ ) : 0,14	Calcium ( $\text{Ca}^{2+}$ ) : 0,4

### Données thermodynamiques

$\text{H}_3\text{PO}_4$  est un triacide dont les constantes d'acidité sont :  $\text{pK}_{a1} = 2,1$  ;  $\text{pK}_{a2} = 7,2$  ;  $\text{pK}_{a3} = 12,3$

Constante d'acidité du couple (ion ammonium, ammoniac) :  $\text{pK}_a = 9,3$

Réaction de solubilité de la struvite :



Produit de solubilité de la struvite :  $K_s = 10^{-11}$

### Formules trigonométriques

$$\cos(a + b) = \cos(a) \cos(b) - \sin(a) \sin(b)$$

$$\cos(a) \cos(b) = \frac{\cos(a-b) + \cos(a+b)}{2}$$

### Théorèmes d'analyse vectorielle

Théorème de Stokes :

$$\oint_{\Gamma_{\text{fermé}}} \vec{a} \cdot d\vec{l} = \iint_{\Sigma} \overrightarrow{\text{rot}}(\vec{a}) \cdot d\vec{S} \quad \text{où } \Sigma \text{ est une surface qui s'appuie sur le contour } \Gamma_{\text{fermé}} \text{ orienté.}$$

Théorème de Green-Ostrogradski :

$$\iiint_{\Sigma_{\text{fermée}}} \vec{a} \cdot d\vec{S} = \iiint_V \text{div}(\vec{a}) d\tau \quad \text{où } V \text{ est le volume délimité par la surface } \Sigma_{\text{fermée}}.$$