R : Le diagramme de Moody est dans le document « Pertes de charge »

On étudie le principe de fonctionnement d'une centrale hydraulique.

La centrale est alimentée par une conduite d'eau cylindrique de diamètre constant, dite conduite forcée, issue du barrage. La capacité de ce barrage est suffisamment importante pour que l'on considère l'eau qu'il contient comme immobile. L'extrémité aval de la conduite, notée 1, est reliée à une turbine Francis qui débouche dans un canal de fuite.

L'axe vertical repérant l'altitude h est orienté vers le haut. L'altitude du canal de fuite 4 est, par convention, nulle ; on note h_0 l'altitude de la surface libre de l'eau dans le barrage. L'eau est considérée comme un fluide incompressible de masse volumique ρ. La pression atmosphérique est supposée indépendante de l'altitude. On considère les écoulements comme permanents. On néglige les variations avec l'altitude de l'accélération de la pesanteur g. On prendra en compte les pertes uniquement dans la conduite forcée et dans la turbine. L'eau sera considérée être à la température de 20 °C.

Données :

- Diamètre de la conduite forcée : $D = 1{,}5\,\text{m}$
- Longueur de la conduite forcée : $L = 150\,\text{m}$
- Rugosité moyenne de la conduite forcée : $\varepsilon = 0{,}2\,\text{mm}$
- Hauteur du distributeur : $b_2 = 0{,}3\,\text{m}$, l'épaisseur des aubes est négligée
- Diamètre d'entrée de la roue : $2r_2 = 2{,}0\,\text{m}$
- Altitude de la roue par rapport au canal de fuite : $h_3 = 2\,\text{m}$; $h_2 = 3\,\text{m}$
- Vitesse de rotation : $N = 200\,\text{tr}\,\text{min}^{-1}$
- Rayon de sortie moyen : $r_{3m} = 0{,}5\,\text{m}$; largeur $b_3 = 0{,}4\,\text{m}$
- Hauteur du barrage par rapport au canal de fuite : $h_0 = 63\,\text{m}$
- Débit : $Q = 12\,\text{m}^3\,\text{s}^{-1}$
- Vitesse en sortie du diffuseur : $v_4 = 4\,\text{m}\,\text{s}^{-1}$
- Viscosité cinématique de l'eau à 20 °C : $\nu = 1 \cdot 10^{-6}\,\text{m}^2\,\text{s}^{-1}$
- Valeur de l'intensité de la pesanteur : $g = 9{,}81\,\text{m}\,\text{s}^{-2}$
- Valeur de la pression atmosphérique : $P_{\text{atm}} = 101\,\text{kPa}$

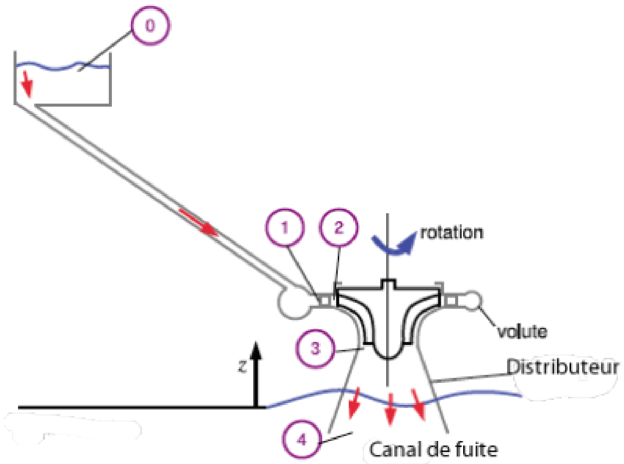


Fig. 1 – Schéma général

1 Étude globale

Les valeurs numériques des pressions seront données en bar et en hauteur d'eau équivalente.

1.1 Conduite forcée

Déterminer les pertes de charge dans la conduite forcée.

Réponse

La vitesse débitante vaut $V = \dfrac{Q4}{\pi D^2} = 6{,}8\,\text{m}\,\text{s}^{-1}$ soit un nombre de Reynolds $\mathcal{R}e = \dfrac{VD}{\nu} = 1 \cdot 10^7$. La rugosité de la conduite est $\dfrac{\varepsilon}{D} = 1{,}33 \cdot 10^{-4}$. Soit, d'après le diagramme de Moody, un coefficient de pertes de charge $f = 0{,}0135 = \dfrac{2D\Delta P}{\rho V^2 L}$ et donc une perte de charge de $\Delta P = 0{,}31$ bar ou $h_p = \dfrac{\Delta P}{\rho g} = 3{,}2\,\mathrm{m}$.

1.2 Puissance

Déterminer la puissance de la turbine en considérant celle-ci comme idéale.

Réponse

Par application du théorème de Bernoulli entre la surface du réservoir et le canal de fuite, l'énergie récupérée par la turbine vaut $w_i = g(h_0 - h_p) - \frac{1}{2}v_4^2$ soit $w_i = 578\,\mathrm{J\,kg^{-1}}$, soit une puissance de $P = \dot{m}w = 6{,}95\,\mathrm{MW}$.

$\dot{m} = D_m$ est le débit massique du fluide dans la conduite

1.3 Rendement

Déterminer le rendement.

Réponse

La puissance maximale disponible est $P_{\max} = \dot{m}gh_0 = 7{,}49\,\mathrm{MW}$,

soit un rendement de $\eta = \dfrac{P}{P_{\max}} = 94\%$

2 Étude détaillée

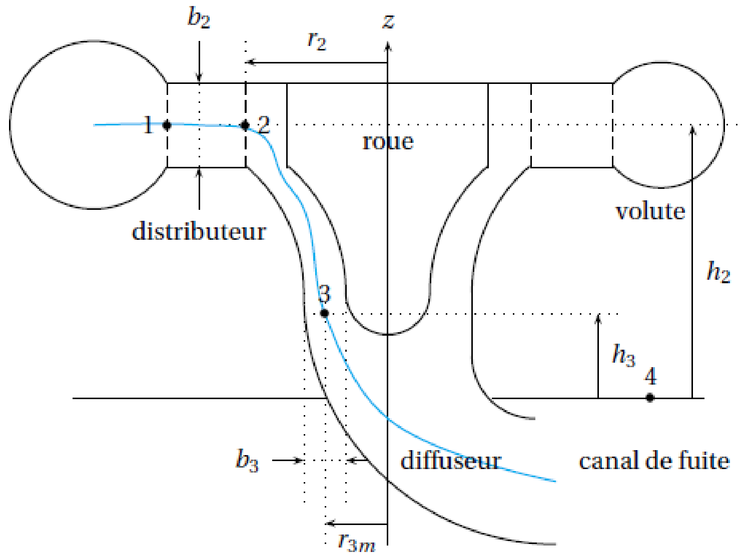
Une turbine Francis comprend principalement quatre parties

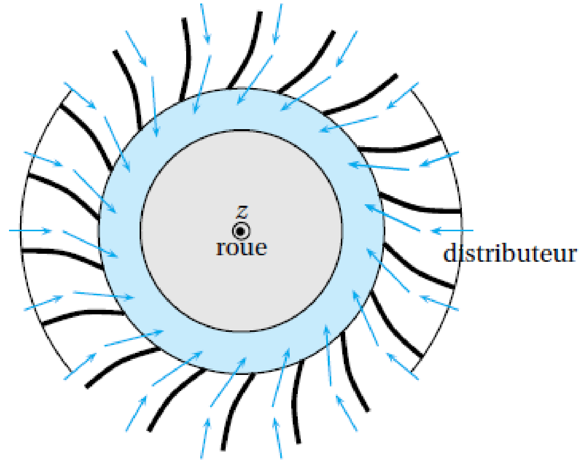
Bâche spirale ou volute : le fluide arrive de la conduite forcée vers la bâche spirale qui entoure complètement la roue et alimente le distributeur.

Distributeur : les aubes fixes du distributeur dirigent le fluide sur les aubes de la roue dans la direction adéquate.

Roue : la turbine travaille complètement remplie d'eau. La direction de l'écoulement évolue lors du passage de l'eau dans la roue et ressort finalement dans la direction axiale lors de l'entrée dans le diffuseur.

Diffuseur : c'est un conduit, complètement remplie d'eau, qui relie la sortie de la roue au canal de fuite où l'eau se retrouve finalement à la pression atmosphérique. Ce dispositif permet à la roue de la turbine d'être placée au-dessus du canal de fuite.





2.1 Diffuseur

Déterminer la vitesse et la pression à la sortie de la roue et donc l'entrée du diffuseur. Commenter la valeur de la pression. Justifier l'autre nom d'aspirateur.

Remarque : on utilisera le rayon moyen sans chercher à intégrer.

Réponse

Au niveau du point 3 du schéma en coupe, on peut utiliser la section moyenne, produit du rayon moyen 2*Pi*r_3 par le diamètre b_3 soit une section moyenne 2*Pi*r_{3m}*b_3.

Le débit à l'entrée du diffuseur vaut $Q = 2\pi r_{3m} b_3 v_3$, soit $v_3 = 9{,}55\,\mathrm{m\,s^{-1}}$. Comme on suppose qu'il n'y a pas de pertes dans le diffuseur, on peut appliquer le théorème de Bernoulli entre l'entrée et la sortie de celui-ci :

$$P_3 + \rho g h_3 + \frac{1}{2}\rho v_3^2 = P_4 + \rho g h_4 + \frac{1}{2}\rho v_4^2$$

Soit $P_3 = P_{atm} + \frac{1}{2}\rho\left(v_4^2 - v_3^2\right) - \rho g h_3 = 0{,}44\,\mathrm{bar}$

On remarque que la pression statique à la sortie de la roue est toujours en-dessous de la pression atmosphérique. Cette valeur P_3 ne devrait pas descendre en-dessous de la pression de vapeur saturante du liquide à la température ambiante ($P_{sat} = 0{,}025\,\mathrm{bar}$ d'après le graphe) pour éviter le problème de cavitation. Le diffuseur permet d'éviter la perte d'énergie $\rho g h_2$ en maintenant une dépression à la sortie de la roue.

2.2 Distributeur

Déterminer la vitesse radiale à la sortie du distributeur et l'entrée de la roue (2).

Réponse

Conservation du débit $Q = v_{2r} 2\pi r_2 b_2$ soit $v_{2r} = 6{,}37\,\mathrm{m\,s^{-1}}$

2.3 Bilan de moment cinétique

Effectuer un bilan de moment cinétique sur la roue et en déduire la vitesse orthoradiale à l'entrée de la roue (2).

Réponse

On considère le système constitué par la turbine et l'eau qu'elle contient entre t et $t + \mathrm{d}t$. Seule la composante axiale du théorème du moment cinétique nous intéresse. Le moment cinétique d'une veine de fluide entrant est $\mathrm{d}\sigma_z = \mathrm{d}m\left(\vec{r} \wedge \vec{v}\right) \cdot \vec{u}_z$. Le système étant axisymétrique, le produit vectoriel est le même pour toutes les veines et on a donc :

$\mathrm{d}\sigma_z = \dot{m}\,\mathrm{d}t\left(\vec{r}_2 \wedge \vec{v}_2\right) \cdot \vec{u}_z = \dot{m}\,\mathrm{d}t\, r_2 v_{2\theta}$. L'écoulement en sortie étant vertical, le moment cinétique de l'eau sortante est nul. En régime permanent, le moment cinétique de la partie commune est constant,

En considérant le système fermé Σ^* constitué de la turbine et de l'eau qu'elle contient ainsi que la masse entrante, on obtient donc : $\mathrm{d}\sigma_{\Sigma*} = -\,\dot{m} r_2 v_{2\theta}\mathrm{d}t$. Pour l'application du TMC, il n'y a que le couple résistant – C à prendre en compte ; en effet :

La force de gravité n'exerce aucun couple car le centre de gravité est sur l'axe. Les forces de pression passent par l'axe en (2) ou à la périphérie et sont parallèles à l'axe en (3). Le théorème du moment dynamique s'écrit donc $\dot{m} r_2 v_{2\theta} = C$ où C est le couple appliqué à l'arbre.

En multipliant cette relation par la vitesse de rotation de l'arbre, on obtient la puissance du couple : $P = C\omega = \dot{m} r_2 \omega v_{2\theta}$; $v_{2\theta} = 27{,}63\,\mathrm{m\,s^{-1}}$

2.4 Pression

Calculer la pression à l'entrée de la roue (2).

Réponse

$v_2 = \sqrt{v_{2r}^2 + v_{2\theta}^2} = 28{,}35\,\mathrm{m\,s^{-1}}$.

On applique le théorème de Bernoulli entre la surface du réservoir et l'entrée de la roue : $P_0 + \rho g h_0 + \frac{1}{2}\rho v_0^2 = P_2 + \rho g h_2 + \frac{1}{2}\rho v_2^2 + 0{,}31$ (perte de charge en bars , cf. 1.1.) ; soit $P_2 = 2{,}57$ bars avec $v_0 = 0$.

2.5 Direction des pales

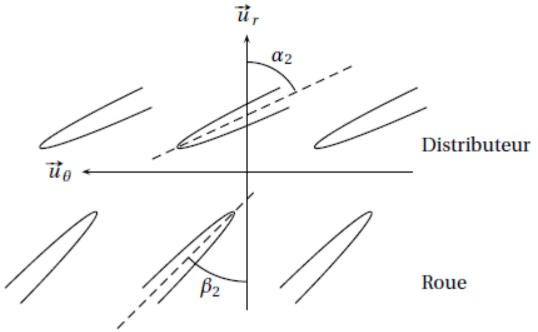


Fig. 2 – Aubes du distributeur et de la roue en (2)

On notera $\vec{v}$ les vitesses par rapport au référentiel terrestre, $\vec{w}$ les vitesses par rapport au rotor et $\vec{u}$ les vitesses du point coïncident lié au rotor. $\vec{u}_\theta$ est la direction de déplacement des pales de la roue.

Déterminer l'angle des pales de la roue et l'angle des pales du distributeur en (2)

Réponse

$\vec{v}_2 = \vec{u}_2 + \vec{w}_2$ avec $\vec{u}_2 = \omega r_2 \vec{u}_\theta$, vitesse de la pale. $u_2 = 20{,}94\,\mathrm{m\,s^{-1}}$. En projetant orthoradialement $v_{2\theta} = w_{2\theta} + \omega r_2$, soit $w_{2\theta} = 6{,}68\,\mathrm{m\,s^{-1}}$. En projetant radialement $v_{2r} = w_{2r}$.

L'angle de la pale à l'entrée de la roue est donc donné par :

$\tan\beta_2 = \dfrac{w_{2\theta}}{v_{2r}}$; $\beta_2 = 46{,}4°$

Géométriquement, par définition de α_2, $\tan\alpha_2 = \dfrac{v_{2\theta}}{v_{2r}}$ soit $\alpha_2 = 77°$

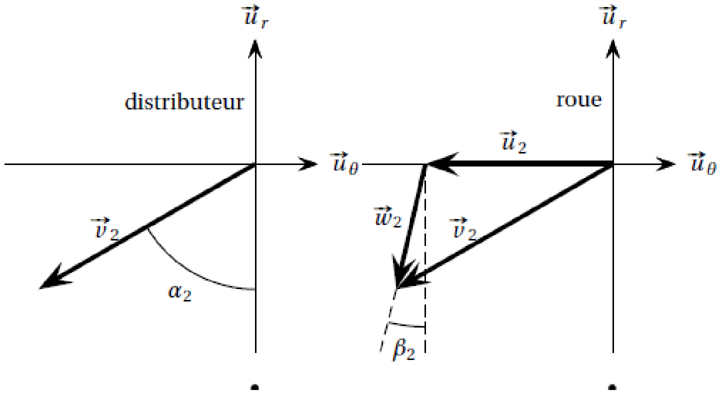
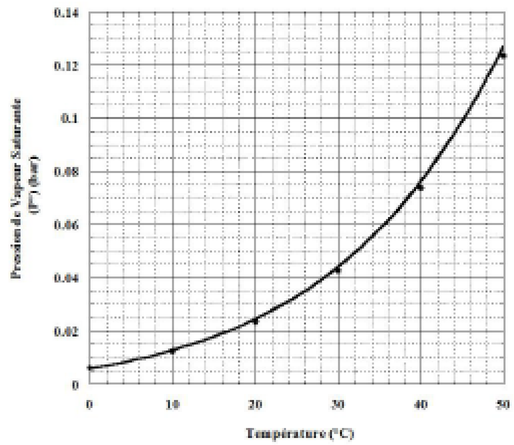


Fig. 3 – Triangle des vitesses en (2)



Pression de vapeur saturante de l'eau en fonction de la température

Photo d'un rotor de turbine Francis