Le sujet est composé de deux traits: CCINP et Mines/Ponts Psi 2022

SUJET 1: CCINP, sur le thème du développement durable

les diverses parties sont indépendantes; La partie 1.3, en chimie, traite de procédés pour dépolluer des effluents (des déchets) de l'industrie du cuir. Les parties 1.1 et 1.2 ont été traitées dans le DM 1.

I.3 - Récupération d'or résiduel

Suivant le domaine d'activité, les effluents traités peuvent contenir de l'or qu'il est économiquement intéressant de récupérer avant l'acheminement vers le décanteur.

Une électrolyse sélective permet de récupérer l'or solide $Au_{(s)}$, par réduction des ions aurocyanure $Au(CN)_2^-$. Le choix du potentiel de la cathode est déterminant et doit être optimisé.

On se propose d'abord de relever la courbe intensité-potentiel du couple $Au(CN)_2^-/Au_{(s)}$ sur électrode de platine. On réalise alors un montage qui contient un générateur de tension réglable e, un milliampèremètre (mA), un millivoltmètre (mV) et trois électrodes :

- une électrode en platine couverte d'or, aussi dénommée électrode de travail (E.T.), qui travaille ici seulement sur sa branche cathodique. C'est cette électrode qui sera étudiée ;
- une électrode en métal inerte appelée contre électrode (C.E.), qui assure la circulation du courant ;
- une électrode de référence (E.réf.) de potentiel connu et qui doit être traversée par un courant négligeable.

Q7. Faire le schéma du dispositif expérimental qui permet de relever la courbe intensité-potentiel du couple $Au(CN)_2^-/Au_{(s)}$ sur électrode de platine.

Q8. Quelle attention particulière faut-il prendre en termes d'impédance quant au choix du millivoltmètre ?

Q9. Préciser la demi-équation rédox qui se produit sur l'électrode de travail en mode cathodique lors de la réduction des ions aurocyanure $Au(CN)_2^-$.

Q10. On rappelle que par convention, le courant I est compté positif de l'électrode de travail vers la solution. Préciser, sur votre schéma du dispositif expérimental, comment circule conventionnellement le courant électrique I et préciser son signe.

La **figure 3** représente une partie de la courbe intensité-potentiel du couple $Au(CN)_2^-/Au_{(s)}$ sur électrode de platine.

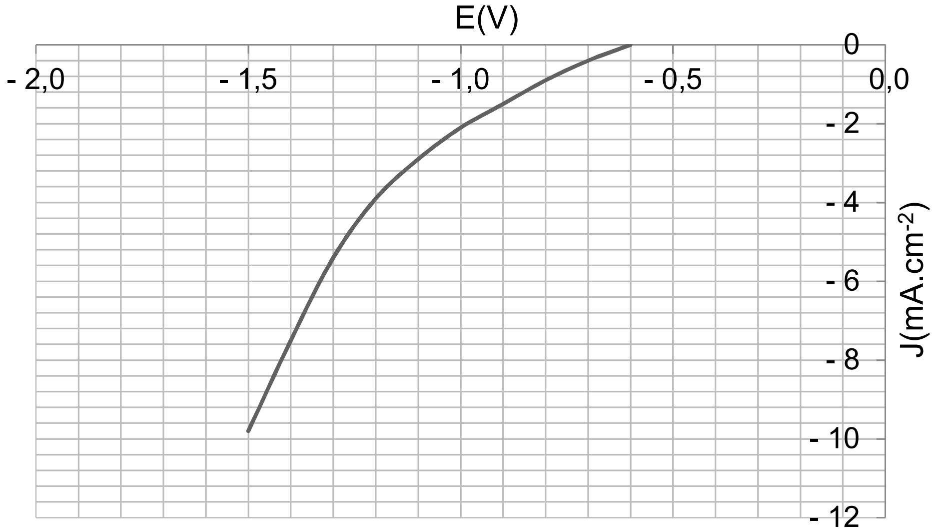


Figure 3 - Courbe intensité-potentiel du couple $Au(CN)_2^-/Au_{(s)}$ sur électrode de platine

Q11. Le couple $Au(CN)_2^-/Au_{(s)}$ sur électrode de platine correspond-il à un couple lent ou rapide ? D'un point de vue cinétique, est-il préférable de fortement baisser le potentiel de la cathode en dessous de – 0,6 V ou non ? Éventuellement, quel est le risque d'imposer une valeur trop faible ?

Q12. L'électrolyse d'un bain est effectuée pendant une durée Δt, en maintenant le potentiel de la cathode à –1,4 V. On note S la surface de l'électrode de travail et J la densité du courant qui la traverse. On considère le rendement faradique de 100 %.
Préciser la valeur numérique de J exprimée en $A \cdot m^{-2}$. Puis, exprimer en fonction de J, S, Δt, de la masse molaire $M(Au_{(s)})$ et de la constante F de Faraday, la masse d'or solide $m(Au_{(s)})$ récupérée.

Q13. Expliquer qualitativement l'impact de la surface S de l'électrode de travail sur le coût énergétique lié à la récupération d'une masse d'or donnée.

Partie II - Décantation dans le traitement des eaux

La clarification par décantation est une des étapes réalisées dans le traitement des eaux des stations d'épuration. Elle consiste à éliminer les particules polluantes en suspension dans l'eau polluée.

L'eau polluée, c'est-à-dire chargée en particules non désirées, circule en continu dans le bassin de décantation (**figure 4**), à faible vitesse horizontale $\vec{u}$. Les particules ont le temps de se déposer au fond du bassin et l'eau de sortie est ainsi clarifiée.

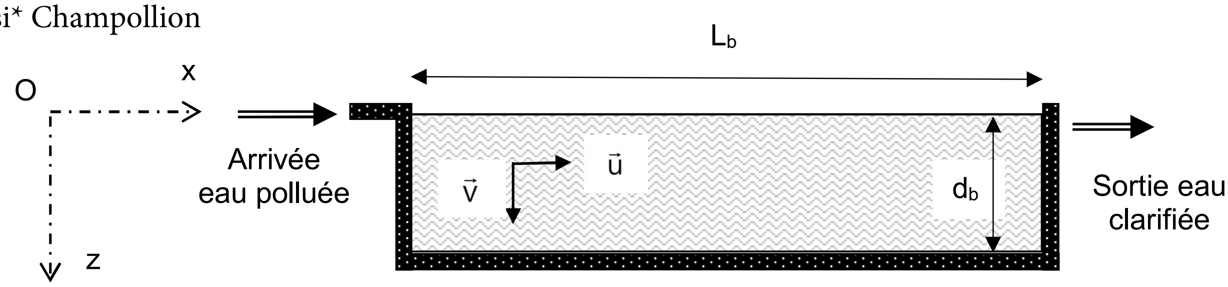


Figure 4 - Bassin de décantation

Le bassin de décantation est de longueur L_b et de profondeur d_b, sa largeur est indifférente. On note respectivement η et ρ_e la viscosité dynamique et la masse volumique de l'eau polluée. η et ρ_e sont supposées constantes.
On définit le repère $(O,\vec{e}_x,\vec{e}_y,\vec{e}_z)$ lié au bassin. L'axe Oz est vertical descendant. Le niveau d'entrée de l'eau dans le bassin correspond à la cote $z = 0$.
On suppose que les particules polluantes sont sphériques, de rayon r, et qu'elles sont soumises à la force de frottement fluide : $\vec{F} = -6\pi\eta r\vec{v}$, où $\vec{v}$ est la vitesse des particules.
On note ρ_0 la masse volumique des particules polluantes, supposée constante. On a : $\rho_0 > \rho_e$.
On considère que l'eau arrive en amont du bassin avec une densité en particules polluantes notée N0.

Nous vous rappelons que la poussée d'Archimède est l'opposée du poids du volume de fluide déplacé.

II.1 - Décantation statique

Dans un premier temps, l'eau ne circule pas horizontalement, $\vec{u} = \vec{0}$, et les particules polluantes qu'elle contient chutent verticalement.
Compte tenu des phénomènes de transport des particules polluantes dans le bassin, la densité en particules polluantes n'est pas uniforme sur la hauteur du bassin. Elle dépend de la profondeur z. Dans le bassin, on note n(z) la densité en particules polluantes à l'altitude z et n_0 la valeur associée à l'altitude $z = 0$, soit $n_0 = n(z = 0)$.

Q14. À partir de l'équation différentielle du mouvement, issue de la seconde loi de Newton, établir, en fonction de ρ_0, ρ_e, r, η et de l'accélération g de la pesanteur, la vitesse limite $\vec{v}_l = v_l\vec{e}_z$ atteinte par ces particules. Quel est le signe de v_l ? Exprimer en fonction de ρ_0, r et de η, le temps caractéristique τ_c d'établissement de cette vitesse limite.

On supposera par la suite que la constante de temps τ_c est très faible devant le temps de sédimentation (*i.e.* le temps de chute dans le bassin) de sorte que le mouvement des particules est considéré comme uniforme à la vitesse $\vec{v}_l$.

Q15. Cette chute des particules est à l'origine d'un courant convectif vertical des particules. On note : $\vec{j} = j(z)\vec{e}_z$, le vecteur densité de courant de particules associé. Préciser l'unité de $\vec{j}$. Puis exprimer le vecteur $\vec{j}$ en fonction de n(z) et de $\vec{v}_l$.

En plus du courant précédent, on observe l'existence d'un second courant qui résulte d'un phénomène de diffusion. On note D le coefficient de diffusivité des particules dans l'eau et $\vec{j}_D = j_D(z)\vec{e}_z$ le vecteur densité de courant de particules associé à ce second courant.

Q16. Rappeler la loi de Fick et préciser les unités des grandeurs qui interviennent. Justifier qualitativement l'existence de ce courant de diffusion. Préciser s'il est ascendant ou descendant.

Q17. En régime permanent, ces deux courants se compensent. En déduire, en fonction de n_0, D et de v_l l'expression de la densité de particules n(z). Représenter graphiquement la fonction n(z) en fonction de z.

Q18. Par conservation du nombre de particules sur une tranche verticale du bassin, exprimer n_0 en fonction de N0, D, d_b et de v_l.

Q19. Définir en fonction de d_b, D et de v_l, un temps caractéristique τ_S de sédimentation, ainsi qu'un temps caractéristique τ_D de diffusion des particules sur la hauteur du bassin.

Q20. Exprimer n_0 en fonction de N0, τ_S et de τ_D. À quelle condition portant sur τ_S et τ_D, la décantation statique permet-elle une clarification de l'eau ?

II.2 - Clarification dynamique de l'eau polluée

Dans un second temps, l'eau polluée est mise en mouvement et s'écoule avec une vitesse horizontale constante $\vec{u}$. Un aspirateur situé au fond du bassin aspire maintenant les particules polluantes.
Un modèle simple considère que le mouvement des particules polluantes est la combinaison d'un mouvement horizontal de vitesse $\vec{u}$ dû à l'entraînement de l'eau et d'un mouvement vertical de chute à la vitesse constante $\vec{v}_l$ déterminée précédemment dans l'étude de la décantation statique. L'eau sera clarifiée si les particules polluantes introduites à l'entrée du bassin ont le temps de tomber au fond avant que l'eau d'entraînement, injectée à l'entrée du bassin en x = 0, ne soit parvenue à l'autre extrémité de sortie du bassin, située en $x = L_b$.

Q21. Définir en fonction de L_b et de u, un temps de traversée τ_T du bassin. À quelle condition, portant sur τ_T et τ_S, la clarification dynamique est-elle efficace ?

Partie V - Turbine à gaz

Le biogaz provient principalement de la fermentation anaérobie, c'est-à-dire sans oxygène, des déchets de l'agriculture, de l'industrie alimentaire et des ordures ménagères. À l'état brut, sa teneur en méthane est un peu supérieure à 50 %. Après une épuration poussée, il atteint le même niveau de qualité que le gaz naturel et porte alors le nom de bio-méthane (CH_4). Il peut être valorisé par la production d'énergie électrique. Il est considéré comme une énergie renouvelable à part entière depuis plus de dix ans et sa combustion libère moins de CO_2 que celle du fuel ($C_{16}H_{34}$).

Q28. Justifier, à l'aide des données thermodynamiques fournies en fin d'énoncé, que pour une même production d'énergie, la combustion du méthane libère moins de CO_2 que celle du fuel.

Étude d'une installation motrice avec turbine à gaz

On étudie ici une installation motrice dont le principe de fonctionnement est décrit sur la **figure 6**.

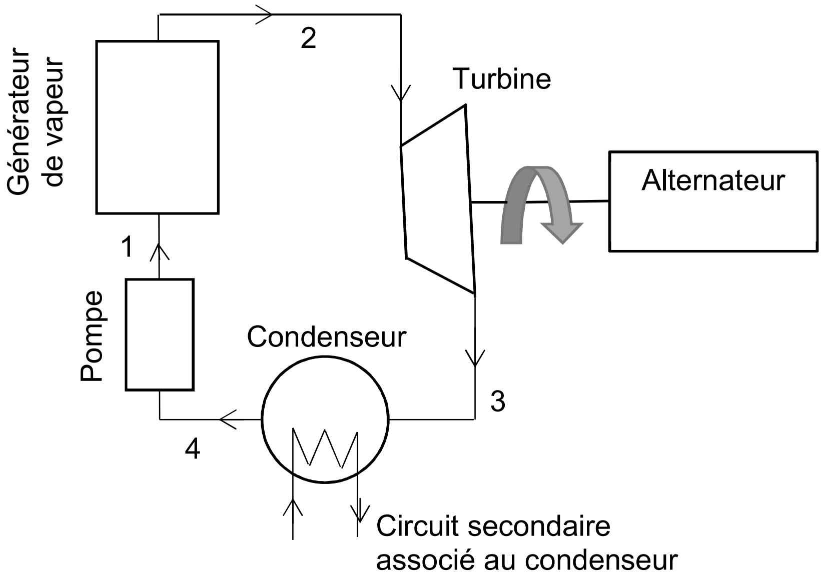


Figure 6 - Installation motrice

Elle fonctionne en régime permanent suivant un cycle de Hirn. Le fluide utilisé est de l'eau. La pompe alimente le générateur de vapeur en liquide haute pression (point 1), on a P_1 = 10 bars. Le liquide est porté à ébullition, puis totalement vaporisé, et enfin surchauffé de façon isobare par le brûleur au bio-méthane (point 2). La vapeur surchauffée se détend ensuite dans la turbine accouplée à un alternateur électrique (point 3). Au point 3, on a P_3 = 1 bar, la vapeur est sous forme de vapeur saturante de titre massique en vapeur x_v = 1. La vapeur humide basse pression est totalement condensée, puis le liquide (point 4) est réintroduit dans la pompe. Un circuit secondaire, associé au condenseur et relié à une tour de refroidissement ou autre, permet d'extraire l'énergie issue du condenseur par transfert thermique.

Hypothèses :

- l'évolution dans la turbine est adiabatique et réversible ;
- l'évolution dans la pompe est supposée isenthalpique ;
- dans les bilans énergétiques, les variations d'énergie cinétique et potentielle du fluide seront négligées par rapport aux termes enthalpiques ;
- on néglige les pertes mécaniques de la turbine et le rendement de l'alternateur est considéré égal à 100 % ;
- l'état du fluide reste inchangé dans les canalisations de liaison entre les différents éléments.

Q29. Reproduire sommairement sur votre copie l'allure du diagramme log(P)-h de l'eau fourni en fin de sujet, en veillant à retranscrire au mieux la courbe de saturation et y superposer l'allure du cycle étudié. Reproduire et compléter le **tableau 1** sur votre copie.

	Point 1	Point 2	Point 3	Point 4
T (°C)	≈ 100			100
P (bar)	10	10	1	1
h ($kJ \cdot kg^{-1}$)				
État	Liquide	Vapeur sèche	Vapeur saturante ($x_v = 1$)	Liquide saturé ($x_v = 0$)

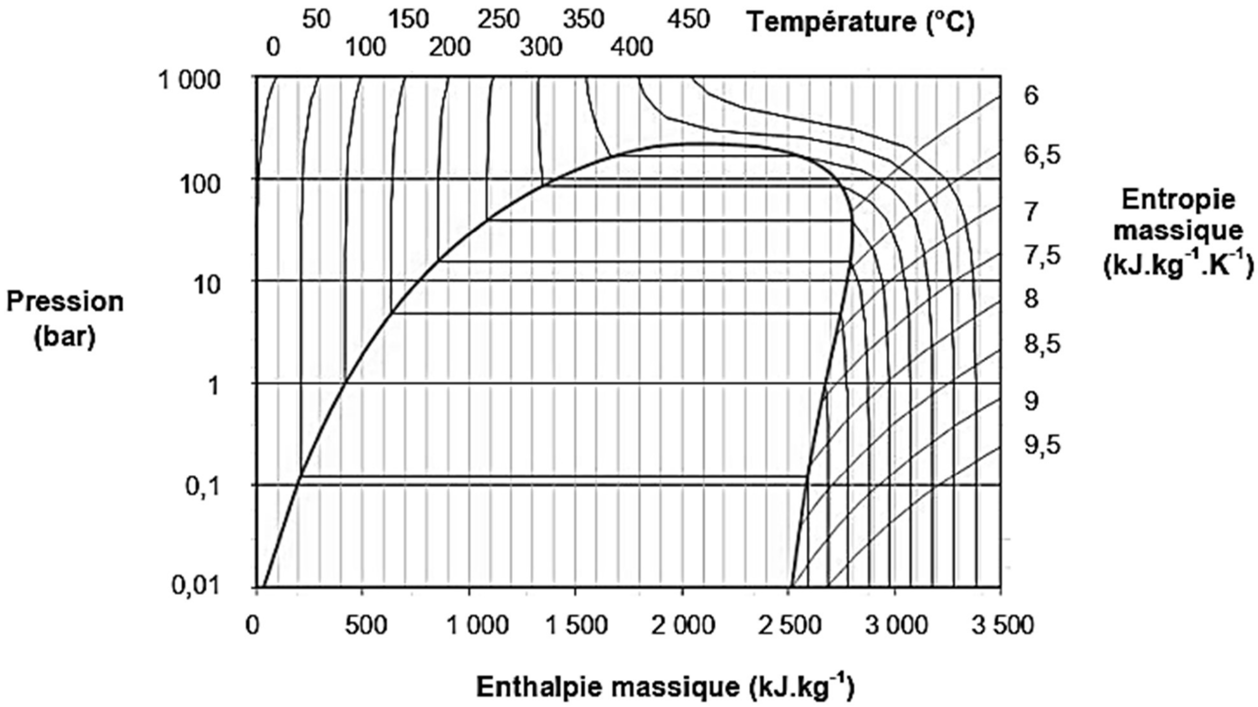
Tableau 1 - Grandeurs thermodynamiques de l'eau dans le cycle de la **figure 6**

Q30. Exprimer en fonction des enthalpies massiques aux points 1, 2, 3 et 4 :
- le travail utile massique de la turbine (w_{iT}). Ce travail est parfois dénommé travail indiqué massique ;
- le transfert thermique massique (q_{GV}) fourni par le générateur de vapeur ;
- le transfert thermique massique (q_{Cond}) récupéré par le circuit secondaire associé au condenseur.

Évaluer numériquement w_{iT}, q_{GV} et q_{Cond}.
Exprimer le rendement de l'installation en fonction des différentes enthalpies massiques.

Q31. Évaluer le débit massique en eau du circuit primaire, noté D_{m1}, pour une production d'électricité d'une puissance $P_{élec} \approx 250$ kW.

Document - Diagramme log(P)-h de l'eau



Données (toutes ne sont pas utiles)

Potentiels standard d'oxydoréduction à 298 K :
$E°(Cr_2O_7^{2-}/Cr^{3+}) = 1,33$ V
$E°(SO_4^{2-}/HSO_3^-) = 0,17$ V
$E°(CNO^-/CN^-) = -0,13$ V
$E°(Au(CN)_2^-/Au_{(s)}) = -0,6$ V

Unité de surface : 1 hectare = 10^4 m^2

Perméabilité magnétique de l'air assimilé au vide : $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$ H·m^{-1}

Pouvoir calorifique (énergie thermique libérée lors de la combustion d'une mole de carburant) :
méthane : 803 kJ·mol^{-1}
fuel : 7 600 kJ·mol^{-1}

Formules trigonométriques :
$\cos(a + b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$
$\cos(a - b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b$

FIN

Fourier dans tous ses états

Ce problème traite de quelques applications de l'analyse de Fourier à la physique. Il comporte 3 parties largement indépendantes. La première partie est consacrée à l'étude de l'échantillonnage d'un signal électronique. La deuxième partie aborde le filtrage acoustique à travers l'étude de la transmission d'une onde sonore par une paroi mobile. La troisième partie présente l'expérience originelle de Joseph Fourier de l'étude des phénomènes de diffusion thermique le long d'un anneau de fer torique. C'est notamment cette expérience qui lui a permis d'introduire pour la première fois la décomposition d'une fonction périodique en séries dites « de Fourier ».

Dans tout le problème, exprimer signifie donner l'expression littérale et calculer signifie donner la valeur numérique avec, au plus, deux chiffres significatifs.

Les vecteurs unitaires seront notés avec un chapeau $\widehat{e}$, ainsi, dans l'espace cartésien $(O,\widehat{e}_x,\widehat{e}_y,\widehat{e}_z)$ un vecteur quelconque $\vec{a}$ s'écrira $\vec{a} = a_x\widehat{e}_x + a_y\widehat{e}_y + a_z\widehat{e}_z$. On note j le nombre complexe tel que $j^2 = -1$.

Données numériques

— Masse volumique de l'air : $\mu_0 = 1{,}0\,\mathrm{kg\cdot m^{-3}}$.

— Capacité thermique massique du fer : $c = 4{,}0\times 10^2\,\mathrm{J\cdot kg^{-1}\cdot K^{-1}}$.

— Masse volumique du fer : $\mu_\mathrm{f} = 7{,}9\times 10^3\,\mathrm{kg\cdot m^{-3}}$.

— Conductivité thermique du fer : $\lambda = 80\,\mathrm{W\cdot m^{-1}\cdot K^{-1}}$.

— Coefficient conducto-convectif à l'interface fer-air : $h = 10\,\mathrm{W\cdot m^{-2}\cdot K^{-1}}$.

I Analyse de Fourier et échantillonnage d'un signal électronique

Dans cette partie, on note $x(t) = \cos(2\pi f_0 t)$ un signal sinusoïdal de fréquence f_0 que l'on cherche à numériser. Nous étudierons plus particulièrement l'une des étapes de la numérisation, appelée l'échantillonnage, qui consiste à prélever un ensemble de valeurs prises à des instants discrets.

❏ – **1**. On s'intéresse tout d'abord à l'opération consistant à multiplier le signal $x(t)$ par la fonction $p(t) = \cos(2\pi f_1 t)$, de fréquence $f_1 > f_0$. Représenter sur un même diagramme les spectres respectifs des signaux $x(t)$ et $x_e(t) = x(t)\times p(t)$.

On cherche maintenant à échantillonner le signal $x(t)$. Pour cela, on introduit la fonction périodique $w(t)$ représentée sur la figure 1 ci-dessous. On considère que $T \ll T_e$, ainsi le signal $x_e(t) = x(t)\times w(t)$ n'est différent de zéro que sur des intervalles de temps très courts assimilables à des instants discrets $t_k = kT_e$ pour $k\in\mathbb{Z}$. Pour chacun de ces instants, on a $x_e(t_k) = x(t_k)$. On dit que $x_e(t)$ constitue un échantillonnage du signal $x(t)$ et on appelle fréquence d'échantillonnage la grandeur $f_e = \dfrac{1}{T_e}$.

❏ – **2**. Représenter le signal $x_e(t)$ pour $f_e = 4f_0$, $f_e = 2f_0$ et $f_e = \dfrac{4}{3}f_0$. Montrer qualitativement que, dans l'un des cas, le signal échantillonné n'est pas représentatif du signal analogique de départ.

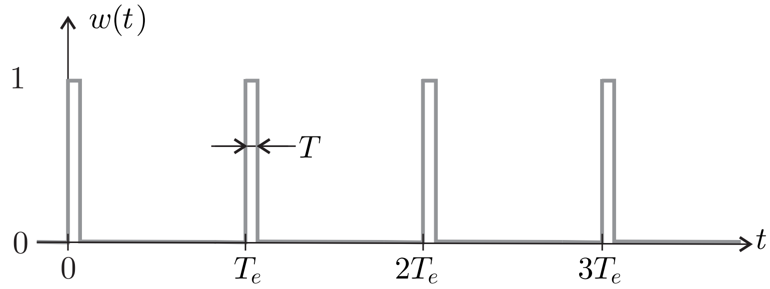


FIGURE 1 – Signal d'échantillonnage.

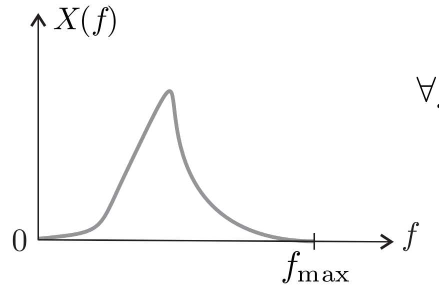
❏ – **3**. Du fait de sa périodicité, le signal $w(t)$ est décomposable en série de Fourier, de la forme

$$w(t) = a_0 + \sum_{k=1}^{+\infty} a_k \cos(2\pi k f_e t)\,.$$

Représenter, par analogie avec la question **1**, le spectre du signal $x_e(t) = x(t) \times w(t)$ pour $f_e = 4f_0$ puis $f_e = \dfrac{4}{3}f_0$ (on se limitera aux valeurs de k telles que $0 \leq k \leq 2$). Montrer que, dans l'un des cas, les motifs fréquentiels se chevauchent (on parle de repliement de spectre). En considérant seulement la fenêtre fréquentielle $[0,f_e]$, indiquer autour de quelle fréquence a lieu le repliement.

❏ – **4**. En s'inspirant des questions **2** et **3**, proposer une relation entre f_e et f_0 permettant d'assurer un bon échantillonnage du signal $x(t)$. Cette relation est appelée « critère de Shannon-Nyquist ».

❏ – **5**. On considère dorénavant un signal temporel $X(t)$ dont le spectre en fréquence $X(f)$, représenté sur la figure 2, fait apparaître une fréquence maximale $f_{\max}$. Que devient le critère de Shannon-Nyquist dans cette situation ? Représenter le spectre du signal échantillonné selon que ce critère soit ou non vérifié. Pour un signal sonore audible, proposer des valeurs raisonnables de $f_{\max}$ et f_e.



$$\forall f \geq f_{\max}, \;\; X(f) = 0$$

FIGURE 2 – Le spectre du signal X est borné en fréquence.

❏ – **6**. Sur l'exemple de la question précédente montrer que, lorsque le critère de Shannon-Nyquist est vérifié, un filtrage approprié permet de retrouver le signal analogique de départ. On donnera les caractéristiques du filtre à utiliser.

❏ – **7**. La durée d'enregistrement d'un CD audio est de $\Delta t = 75$ min. L'échantillonnage se fait à une fréquence $f_e = 44{,}1$ kHz et avec résolution de 16 bits. De plus, l'enregistrement est fait sur deux voies séparées en stéréo. Déterminer la taille minimale du fichier musical. On donnera le résultat en mégaoctets (Mo), un octet correspondant à 8 bits.

la seconde partie a été supprimée

III Analyse de Fourier et diffusion thermique

On considère un matériau homogène assimilable à une répartition unidimensionnelle de matière selon un axe (Ox). On rappelle l'équation de la diffusion thermique unidimensionnelle sans perte et sans terme source, donnant la température $T(x,t)$ à l'abscisse x et au temps t dans le matériau :

$$\frac{\partial T}{\partial t} = D\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}\,.$$

❑ – **15**. Déterminer l'expression de la constante D en fonction de la masse volumique μ, du coefficient de conductivité thermique λ et de la capacité thermique massique c du matériau considéré. On pourra raisonner par analyse dimensionnelle. En déduire l'expression du temps caractéristique de diffusion τ sur une longueur L. Faire l'application numérique pour une diffusion dans le fer sur une longueur $L = 50$ cm.

Joseph Fourier a étudié la diffusion thermique le long d'un anneau de fer torique, de rayon moyen $R = 16$ cm et de section carrée de côté $a \ll R$. L'anneau est chauffé en un point pris comme origine des angles $\theta = 0$ dans une base cylindrique puis on suit l'évolution de la température à différents instants et pour différentes valeurs de l'angle θ.

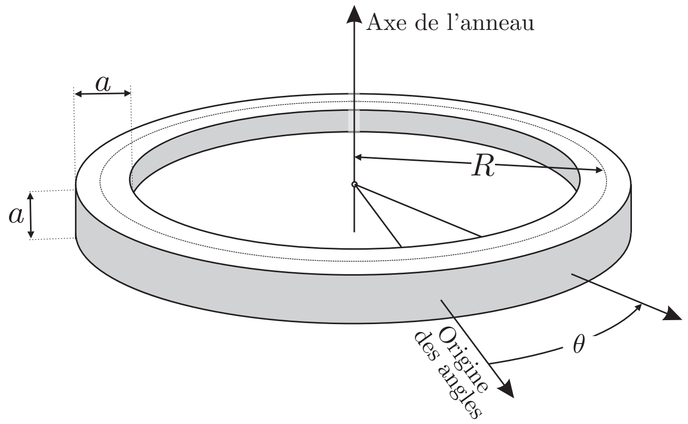


FIGURE 3 – Géométrie du problème étudié par Fourier : le tore à section carrée.

On notera $T(\theta,t)$ la température de l'anneau, supposée uniforme sur une section droite. On choisira $\theta \in]-\pi;\pi]$ et on admettra que, par symétrie, $T(-\theta,t) = T(\theta,t)$.
Le flux thermique conducto-convectif $\delta\Phi$ sortant à travers une surface $\mathrm{d}S$ de l'anneau de fer vers l'air environnant (de température T_e constante) est modélisé par la loi de Newton

$$\delta\Phi = h(T(\theta,t) - T_e)\mathrm{d}S\,,$$

dans laquelle le coefficient d'échange thermique h est supposé constant.
On rappelle l'expression du gradient en coordonnées cylindriques :

$$\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,T = \frac{\partial T}{\partial r}\,\widehat{e}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial T}{\partial \theta}\,\widehat{e}_\theta + \frac{\partial T}{\partial z}\,\widehat{e}_z\,.$$

❏ – **16**. Rappeler la loi de Fourier pour la diffusion thermique. En déduire l'expression du vecteur densité de courant thermique $\vec{j}_{\text{th}}$ puis dessiner l'allure des lignes de champ le long de l'anneau, en précisant leur orientation.

Pour établir l'équation décrivant l'évolution de la fonction $T(\theta,t)$ dans l'anneau, on considère le volume élémentaire $\mathrm{d}V$ compris entre deux sections de surface a^2 de l'anneau, repérées par les angles θ et $\theta + \mathrm{d}\theta$.

❏ – **17**. Déterminer les expressions approchées de $\mathrm{d}V$ ainsi défini et de la surface élémentaire $\mathrm{d}S_{\text{lat}}$ de son contact avec l'air. On rappelle que $a \ll R$. En déduire que $T(\theta,t)$ vérifie l'équation

$$\frac{\lambda}{R^2}\frac{\partial^2 T}{\partial \theta^2} - \frac{4h}{a}\,(T - T_e) = \mu\, c\,\frac{\partial T}{\partial t}\,.$$

❏ – **18**. Donner, en régime stationnaire, et en fonction de T_e, R, θ et de $\delta = \sqrt{\dfrac{a\lambda}{4h}}$, la forme de la solution $T(\theta)$. On introduira deux constantes d'intégration A et B sans chercher à les déterminer pour l'instant. Préciser, en le justifiant, la dimension de la grandeur δ.

❏ – **19**. On donne sur la figure 4 l'allure de la représentation graphique associée aux solutions $T(\theta)$ et $j_{\text{th}}(\theta)$ (pour r fixé). On note $T_1 = T(\theta = 0)$ la valeur, imposée par le chauffage, en $\theta = 0$. Commenter ces deux graphes puis les exploiter judicieusement pour déterminer, sur l'intervalle $[0, +\pi]$, les constantes A et B introduites précédemment, en fonction de T_1, T_e, R et δ. En déduire la solution $T(\theta)$ sur l'intervalle $[0, +\pi]$.

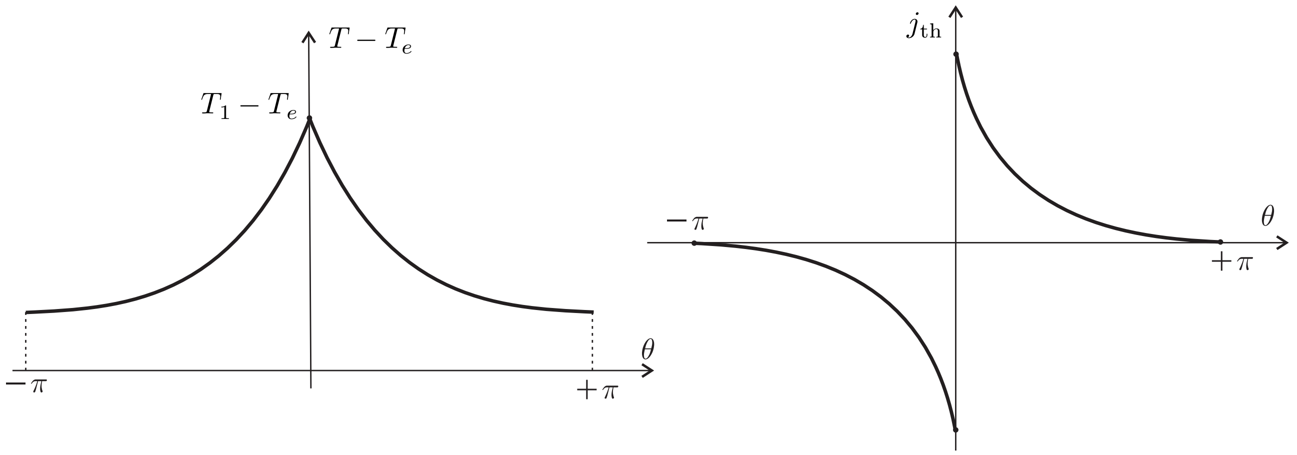


FIGURE 4 – Graphe des solutions : Différence de température à gauche, flux thermique surfacique à droite.

❏ – **20**. Sur les relevés expérimentaux de Joseph Fourier du 31 juillet 1806, on lit que deux heures après le début du chauffage, les valeurs de températures des différentes sections de l'anneau sont stationnaires. Montrer que cet ordre de grandeur était prévisible à condition de supposer le phénomène de diffusion prépondérant en régime transitoire.

C'est en étudiant la diffusion thermique dans le dispositif expérimental décrit précédemment que Joseph Fourier découvrit les séries trigonométriques, dites « séries de Fourier ». L'anneau est chauffé comme précédemment en $\theta = 0$ puis enfoui presque complètement dans du sable, excellent isolant thermique. On suppose qu'il n'y a aucune fuite thermique par la surface latérale de l'anneau une fois que celui-ci est enfoui dans le sable et que la température reste de la forme $T(\theta,t)$. On s'intéresse toujours au domaine $\theta \in]-\pi;\pi]$, avec $T(-\theta,t) = T(\theta,t)$ par symétrie.

❏ – **21**. Donner l'équation vérifiée par $T(\theta,t)$. On cherche les solutions à variable séparée de la forme $T_n(\theta,t) = f_n(\theta)\, g_n(t)$. L'interprétation de l'indice n apparaîtra dans la donnée de la condition initiale nécessaire à la résolution complète de l'équation. Déterminer les expressions générales de $f_n(\theta)$ et $g_n(t)$ puis montrer que $T_n(\theta,t)$ s'écrit sous la forme

$$T_n(\theta,t) = B_n \cos\left(\frac{R\,\theta}{d_n}\right) \mathrm{e}^{-t/\tau_n}\,.$$

On donnera la relation entre τ_n et d_n et on précisera leurs dimensions respectives.

❏ – **22**. À l'instant $t = 0$, la température initiale d'une section repérée par l'angle θ est une fonction $T_0(\theta)$, symétrique, de période 2π et dont le développement en série de Fourier est de la forme

$$T_0(\theta) = T_\mathrm{m} + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \cos(n\,\theta)\,.$$

Les coefficients b_n sont supposés connus. Que représente la constante T_m ? Justifier précisément pourquoi la solution générale $T(\theta,t)$ peut se mettre sous la forme

$$T(\theta,t) = T_\mathrm{m} + \sum_{n=1}^{\infty} T_n(\theta,t)\,.$$

Expliciter B_n, d_n et τ_n en fonction de b_n, n, R, μ, c et λ.

❏ – **23**. Joseph Fourier remarque, en mesurant la température en fonction du temps en différents points de l'anneau, que $T(\theta,t) - T_\mathrm{m}$ devient rapidement proportionnel à $\cos(\theta)$. Commenter cette constatation.

FIN DE L'ÉPREUVE