

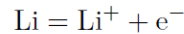
ACCUMULATEUR Li/ion (Centrale PSI 2015 – extrait)

II.A.4)

L'électronégativité croît de la gauche vers la droite du tableau périodique, donc le lithium est peu électronégatif.

II.A.5)

Li, de structure électronique $1s^2 2s^1$ peut prendre facilement la structure du gaz rare précédent (l'hélium) en perdant un électron selon



ce qui justifie son caractère réducteur.

II.A.6) L'atome central compte pour un et les 8 atomes des sommets comptent pour 1/8. Il y a donc 2 atomes par maille.

Les atomes plus proches voisins sont tangents, donc le rayon atomique R vérifie en considérant les atomes situés sur une grande diagonale de la maille

$$R = \frac{\sqrt{3}}{4}a$$

Le volume occupé par les deux atomes contenus en propre dans la maille a pour expression

$$V_a = 2 \frac{4}{3} \pi R^3 = \frac{8\pi}{3} \frac{3\sqrt{3}}{4 \times 16} a^3 = \frac{\sqrt{3}\pi}{8} a^3$$

Le volume total de la maille vaut $V_m = a^3$, donc la compacité vaut

$$C = \frac{V_a}{V_m} = \frac{\sqrt{3}\pi}{8} = 0,68 = 68\%$$

II.A.7)

La maille élémentaire de volume a^3 contient 2 atomes

$$\rho = \frac{m}{V} = \frac{2M(\text{Li})/N_a}{a^3} = \frac{2M(\text{Li})}{N_a a^3} = 540 \text{ kg m}^{-3}$$

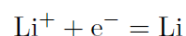
II.A.8)

- Le caractère très réducteur du lithium confère au couple Li^+/Li un potentiel standard très bas, ce qui permet d'obtenir des f.é.m. très importantes (environ 3V/élément de batterie)
- La masse volumique très basse permet d'avoir des grandeurs massiques (énergie et puissance) très favorables par rapport à d'autres métaux (Pb, Ni) : bien que Pb et Ni échangent deux e^- /atome au lieu de 1 e^- /atome pour Li, le rapport des masses volumiques – respectivement 21 et 16,5 – est très nettement favorable à Li.

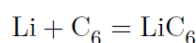
II.B - Accumulateur Li-ion

II.B.1) l'électrode négative

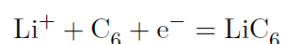
a) réduction de Li^+



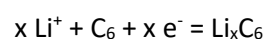
insertion



demi-réaction bilan de la charge (combinaison des deux réactions précédentes)



Eventuellement pour introduire le coefficient d'insertion x :



b) D'après la stoechiométrie de la réaction d'insertion (un atome de lithium pour 6 atomes de carbone)

$$n_{\max} = \frac{1}{6M(C)} = 1,39 \times 10^{-2} \text{ mol g}^{-1} ; \text{ Soit } N_{\max} = 8,36 \cdot 10^{21} \text{ g}^{-1} ;$$

chaque mole de lithium peut libérer une mole d'électron de charge $N_A|q_e|$, d'où la capacité de l'électrode de graphite lithié

$$q_{\max} = N_{\max}|q_e| = 1,34 \cdot 10^3 \text{ C/g}$$

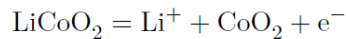
$$q_{\max} = 1,34 \times 10^3 \text{ A s g}^{-1} = 1,34 \times 10^3 \times 1000 \text{ mA} \times \frac{1}{3600} \text{ h g}^{-1} = 372 \text{ mA h g}^{-1}$$

II.B.2) l'électrode positive

a)

Dans le couple ($\text{CoO}_2/\text{LiCoO}_2$) du cobalt, le nombre d'oxydation du cobalt est plus élevé dans CoO_2 (+IV) que dans LiCoO_2 (+III), donc l'oxydant est CoO_2 , le réducteur LiCoO_2 .

b) Lors de la charge, il y a oxydation du cobalt, donc augmentation de son nombre d'oxydation, tandis que les nombres d'oxydation des autres espèces sont inchangés. En particulier le lithium reste au nombre d'oxydation +I, donc sous la forme Li^+ . La demi-réaction associée s'écrit

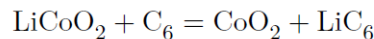


II.B.3)

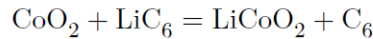
Lors de la charge, les demi-réactions sont celles écrites précédemment



d'où l'équation-bilan complète



Lors de la décharge la réaction est inversée



II.B.4)

a) La batterie fournit une puissance $P = 328 \text{ kW}$ pendant $\Delta t = 45 \text{ min}$, soit une énergie

$$W = P\Delta t = 328 \times 10^3 \times 45 \times 60 = 8,86 \times 10^8 \text{ J}$$

$$W = 8,86 \times 10^8 \cdot \frac{1}{3600} = 2,46 \times 10^5 \text{ Wh} = 246 \text{ kWh}$$

b) La batterie de masse $m = 1500 \text{ kg}$ doit fournir $P = 328 \text{ kW}$ soit une puissance massique

$$p_m = \frac{P}{m} = 219 \text{ W kg}^{-1}$$

c) La batterie doit délivrer W , soit une énergie massique

$$E_m = \frac{W}{m} = \frac{2,46 \times 10^5}{1500} = 165 \text{ Wh kg}^{-1}$$

d) La figure 5 représente la puissance massique (specific power, W kg^{-1}) en fonction de l'énergie massique (specific energy, Wh kg^{-1}). D'après les calculs qui précèdent, seul les accumulateurs Li-ion haute énergie (Li-ion energy) possèdent une énergie massique suffisante ($E_m \approx 170 \text{ Wh kg}^{-1}$) de tous les types proposés. On vérifie également que la puissance massique nécessaire (219 W kg^{-1}) est située dans la plage disponible pour ce type d'accumulateurs, comprise entre 10 et 1000 W h kg^{-1} .

I La circulation capillaire

$$1. Re = \frac{\rho L v}{\eta} = \rho \frac{(2R)v}{\eta}$$

$$= \frac{2\eta f}{2\eta v}$$

L: distance caractéristique, 2R ici
 v: vitesse _____, vitesse débitante ici

Re permet de quantifier l'importance du transport convectif de q^r de mur par rapport à son transport diffusif.

2. Il ne faut déterminer le nb de capillaires

On a: $\sigma \approx N \pi R^2 \Rightarrow N = \frac{\sigma}{\pi R^2} \Rightarrow \ell = \frac{L}{N} = \frac{L}{\sigma} \pi R^2 \approx 6 \text{ cm}$

3. V_s se répartit, à chaque seconde, ds les n capillaires. Ainsi

volume systolique

$D_m \approx \rho \frac{V_s}{N} \approx 7.10 \text{ kg.s}^{-1} = \rho \pi R^2 v \Rightarrow v = \frac{D_m}{\rho \pi R^2} \Rightarrow Re = \frac{D_m (2R)}{2 \eta \pi R^2} = \frac{2}{\pi} \frac{D_m}{\eta R} \approx 3.10^{-3}$

l'écoulement est laminaire

4. $\vec{v} = v_z(r, \theta, z) \vec{e}_z = v(r, z) \vec{e}_z$: $\text{div } \vec{v} = 0 \Rightarrow \frac{\partial v}{\partial z} = 0 \Rightarrow \vec{v} = v(r) \vec{e}_z$

inv. par rotat.
 RS

alors chaque partic de \mathcal{E} se en écoulement rect. uniforme

on peut aussi calculer l'accélération convective $(\vec{v} \cdot \text{grad}) \vec{v} = v(r) \frac{\partial v}{\partial z} \vec{e}_z$ de chaque particule de fluide de \mathcal{E} . Elle est nulle

5. si h est arbitraire, prenons h=dz!

Seconde loi de Newton à \mathcal{E} : $\vec{0} = \sum \vec{f}_{ext} \Rightarrow \underbrace{\rho(z) \pi r^2}_{\text{sur } \sigma_3} - \rho(z+dz) \pi r^2 + 2\pi r dz \frac{\partial v}{\partial r} = 0$

$\frac{dP}{dz} = \frac{2\eta}{r} \frac{dv}{dr} = \text{const} < 0$

$f(z)$ $g(r)$

car P(auxil) > P(axil) la press est l'élément moteur de l'écoulement

la pression décroît linéairement le long de l'écoulement

$$6. \quad \frac{dv}{dr} = \frac{r}{2\gamma} \frac{dP}{dz} \rightarrow v(r) = \frac{r^2}{4\gamma} \frac{dP}{dz} + A \quad \text{avec } v(R) = 0 = \frac{R^2}{4\gamma} \frac{dP}{dz} + A$$

$$v(r) = \frac{R^2}{4\gamma} \frac{dP}{dz} \left(\frac{r^2}{R^2} - 1 \right) \left(\begin{array}{l} \text{n'oublions pas} \\ \text{que } \frac{dP}{dz} < 0 \\ \text{et vaut le } -\frac{\Delta P}{L} \text{ du} \\ \text{cours} \\ \vdots \end{array} \right)$$

$$7. \quad v(r) = \frac{R^2}{4\gamma} \left| \frac{dP}{dz} \right| \left(1 - \frac{r^2}{R^2} \right) \quad \text{et } Du = \rho Du = \rho \iint v \, dS \quad \downarrow \text{cf cours}$$

$$Du = \rho \frac{R^2}{8\gamma} \left| \frac{dP}{dz} \right| \pi R^2$$

$$R_u = \frac{8\gamma}{\rho \pi R^4}$$

rem: $R_u \nearrow$ si $\gamma \nearrow$
 \searrow si $R \nearrow$ } ok ✓

8. Comme déjà indiqué $P(u) > P(r)$ "se pousse"

$$\left| \frac{dP}{dz} \right| = R_u \times Du =$$

$$\Delta P = \left| \frac{dP}{dz} \right| \times L = R_u Du L \underset{AN}{\approx} 1,3 \times 10^3 \text{ Pa}$$

9. Soit dP la puissance des forces de pression sur dS , s'exerçant sur U donc

$$dP = \underbrace{\pi R^2 \left| \frac{dP}{dz} \right| dz}_{dF_p} \times \underbrace{v}_{\text{vitesse } \langle \rangle}$$

$$\begin{aligned} \hookrightarrow P &= \int_0^L dP = L \pi R^2 \frac{\Delta P}{L} \times \frac{R^2}{8\gamma} \left| \frac{dP}{dz} \right| = \frac{\pi R^4}{8\gamma} \frac{\Delta P^2}{L} = \frac{Du}{L} \Delta P = R_u L \left(\frac{Du}{L} \right)^2 \\ &= \rho R_{Hyd} \left(\frac{Du}{L} \right)^2 \end{aligned}$$

rem: Si R_u avait été définie / Du : $\left| \frac{dP}{dz} \right| = R_u Du \Rightarrow \frac{\Delta P}{L} = R_u Du$

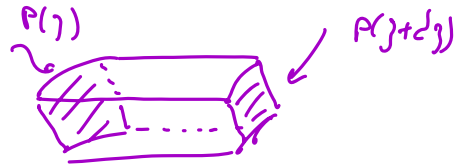
alors $P = L R_u Du^2$ Express "lisible" et $\equiv RI^2$... pour avoir la définition de R_u en un clin d'œil

rem': On peut démontrer le résultat de façon plus rigoureuse (ici l'express. de P est un peu parachute) en étudiant 1 pdf

$$dP_f = P(z) r d\theta dr \times v(r) - P(z+dz) r d\theta dr v(r)$$

$\xrightarrow{\text{puis.}}$

$$= -\frac{dP}{dz} r dr d\theta dz v(r) \stackrel{\text{aussi}}{=} -g r c d\rho \cdot dz \cdot \vec{v} \dots$$



$$P_f = \text{puissance des } \mathcal{F}_f = \iiint_V dP_f = \frac{\Delta P}{l} l \int_0^R \underbrace{2\pi v(r) r dr}_{Dv} = \Delta P \cdot Dv = \text{"UI"}$$

Cette puissance représente donc celle de la pompe permettant l'écoulement

$$10. P_{\text{tot}} = NP = \frac{\sigma}{\pi R^2} \times \frac{\pi R^4}{8\eta} \frac{\Delta P^2}{l} = \frac{R^2 \sigma \Delta P^2}{8\eta l} \approx 0.10 \text{ Watt}$$

rem: Cette valeur est inférieure à la valeur usante (entre 1 et 2 W)
 \rightarrow La pesanteur a été négligée

I. Procession et plongée

A. 1 $\vec{0} = \rho \vec{g} + (-\text{grad } P)$ équation locale de la statique des fluides.

$\vec{a} = \vec{0}$ \downarrow ρ \downarrow ρ \downarrow ρ \downarrow
 équilibre \downarrow densité \downarrow équivalent \downarrow Elle est établie en appliquant un pfd à 1 particule
 volumique \downarrow des forces \downarrow le fluide à l'équilibre dans 1 référentiel galiléen
 de pesanteur \downarrow de pression

2. En project. $\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial P}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y} = 0 \rightarrow P = P(z) \\ \frac{dP}{dz} = +\rho g \rightarrow P = \rho_0 g z + \text{cst} \xrightarrow{z=0} P = P_0 + \rho_0 g z \end{array} \right.$

3. $\chi_T \triangleq -\frac{1}{V} \frac{\partial V}{\partial P} \Big|_T = -\frac{\rho}{m} \frac{\partial}{\partial P} \left(\frac{m}{\rho} \right) \Big|_T = \frac{\rho}{\rho^2} \frac{\partial \rho}{\partial P} \Big|_T = \frac{1}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial P} \Big|_T$ (en Pa^{-1})

4. si $T = \text{cst}$ alors $\chi_T = \frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{dP}$ (rappel: $d\rho = \frac{\partial \rho}{\partial P} \Big|_T dP + \frac{\partial \rho}{\partial T} \Big|_P dT$)

or $dP = \rho g dz \Rightarrow \chi_T g dz = \frac{d\rho}{\rho^2} \xrightarrow{\text{un } J} \chi_T g z + \text{cst} = -\frac{1}{\rho}$
 en $z=0, \text{cst} = -\frac{1}{\rho_0}$

Il vient: $\chi_T g z - \frac{1}{\rho_0} = -\frac{1}{\rho} \Rightarrow \rho(z) = \frac{\rho_0}{1 - \chi_T g \rho_0 z}$

5. $dP = \frac{\rho_0 g dz}{1 - \chi_T g \rho_0 z} \longrightarrow P = \text{cst} - \frac{1}{\chi_T} \ln(1 - \chi_T g \rho_0 z)$
 en $z=0$
 $P = P_0 - \frac{1}{\chi_T} \ln(1 - \chi_T g \rho_0 z)$

6. new: un DL de $\ln(1-x)$ permet de comparer les 2 modèles

en effet $\ln(1-x) \approx -x - \frac{x^2}{2} \Rightarrow P(z) = P_0 + \rho_0 g z + \chi_T g^2 \rho_0^2 \frac{z^2}{2}$
 $\chi_T \rho_0 g z < 4 \cdot 10^{-2}$ DL OK
 mobile $\chi_T g^2 \rho_0^2 \frac{z^2}{2}$ terme correctif

AN: $P_{\text{comp}}(h) = 1,12 \times 10^8 \text{ Pa}$ 1% près
 $P_{\text{incomp}}(h) = 1,09 \times 10^8 \text{ Pa}$ 4% près

la press. est ainsi ténue de l'air compressible

Il faut aussi tenir compte de variations de température

I.S. Rem: $Re = \rho \frac{L v}{\mu} = 2,4 \times 10^6 \Rightarrow$ écoulement turbulent, $F \propto v^2 \Rightarrow F = \frac{1}{2} \rho S C_x v^2 \checkmark$

aller: $0 = m_t g - \pi A - \frac{1}{2} \rho S C_x v_1^2$

$v \approx a t \frac{1}{2}$

retour: $0 = m_t' g - \pi A + \frac{1}{2} \rho S C_x v_2^2$

- πA est inchangée: le volume du sous-marin est inchangé
- $\rho(z) = \rho_0$ (on pourrait prendre un ρ moyen)
- $S \approx \text{cte}$, car on a du ballast

$\Rightarrow m_t - m_t' = m_{\text{ballast}}: \frac{1}{2} \rho S C_x (v_2^2 + v_1^2) \frac{1}{g}$ avec $v = H/t \rightarrow \begin{cases} v_1 = 1.2 \text{ m.s}^{-1} \\ v_2 = 2.6 \text{ m.s}^{-1} \end{cases}$

Avec: $D_{DC} = 2.11 \text{ m} \Rightarrow S = \pi \frac{D_{DC}^2}{4} = 3.5 \text{ m}^2$ et $\frac{L}{D} = \frac{H_{DC}}{D_{DC}} \approx 3.5 \# 4 \Rightarrow C_x = 0.87$

$m_{\text{ballast}} \approx 1300 \text{ kg}$

Ming 8C 2016, Température dans le tunnel du Fréjus

Le sujet est très progressif: d'abord proche du cours et de + en + difficile!

I.A.1. $\langle T(z, t) \rangle_{1 \text{ an}} = \frac{1}{T} \int_0^T (T_0 + T_1 \cos(\omega t)) dt$ avec $\omega = \frac{2\pi}{T}$
 $= T_0$

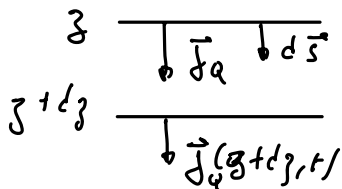
$T_{\max, \min} = T_0 + T_1, T_0 - T_1$; $T_1 = 15^\circ\text{C}$ semble raisonnable

2. $\vec{j}_Q / d\Phi_Q = \vec{j}_Q \cdot d\vec{s}$, \vec{j}_Q en $\text{W} \cdot \text{m}^{-2}$ c'est 1 flux surfacique

3. $\vec{j}_Q = -\kappa \text{grad}(T)$, ok si le déséquilibre n'est pas trop important et $\text{W} \cdot \text{m}^{-2}$ $\kappa \cdot \text{m}^{-1}$ le milieu isotrope (entre autres ...)

$[\kappa] = \text{W} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{m}^{-1}$

4. $\delta Q = \delta Q_e - \delta Q_s = (j_Q(z, t) - j_Q(z + dz)) S dt$ car $\iint_S \vec{j}_Q(z, t) \cdot d\vec{s} = j_Q \cdot S$



$\delta Q = -\frac{\partial j_Q}{\partial z} dz S dt$

5. $dz / L \gg dz \gg \ell$
 dist. caract. macro \hookrightarrow libre parcours moyen

avantages: - précise à l'échelle macro
 - permet de manipuler des grandeurs moyennées, continues

de +: entre z et $z + dz$, $T(z) = \text{const}$

6. 1^{er} D à $\Phi =$ tranche mésoscopique entre t et $t + dt$

$du = \rho c S dz \frac{\partial T}{\partial t} dt = \delta Q = -\frac{\partial j_Q}{\partial z} S dz dt$

Fourier

7. On en déduit l'équation de la chaleur

$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\kappa}{\rho c} \frac{\partial^2 T}{\partial z^2}$

$D = \frac{\kappa}{\rho c}$ en $\text{m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$

8. La perturbation $\Theta_0 + T_0 \cos(\omega t)$ se propage en (z, t) avec 1 retard de phase,
 du à la capacité thermique du milieu ("caractère capacitif", autrement
 dit retard de phase), d'où $T(z, t) = \Theta_0 + T_0 \cos(\omega t - kz)$
retard de phase en z

De + l'eq. de la chaleur est linéaire, d'où l'emploi de la notat. \underline{k} .
 rem: Ns verrons + tard le justificatif, à priori, du caractère complexe de \underline{k}
relat. de dispersion: lien entre ω et k pour que $T(z, t)$ soit solut.
 de l'eq. étudiée.

Il vient: $i\omega T_0 e^{i(\omega t - kz)} = D (-ik)^2 T_0 e^{i(\omega t - kz)}$
 $\Rightarrow \underline{k}^2 = \frac{-i\omega}{D} = \frac{\omega}{D} e^{-i\pi/2} \Rightarrow k = \pm \sqrt{\frac{\omega}{D}} e^{-i\pi/4} = \pm \frac{1-i}{\delta}$ avec $\delta = \sqrt{\frac{2D}{\omega}}$

l'énoncé ns dit: $k' > 0$ (pour 2 propagat. selon z) (donc ω)

donc $k = \frac{1-i}{\delta}$; $k' = \frac{1}{\delta}$, $k'' = -\frac{1}{\delta}$

$T(z, t) = \Theta_0 + T_0 e^{-z/\delta} \cos(\omega t - z/\delta)$
↓
terme d'absorption ↗ terme de propagation

rem: tout ceci sera repris + en détail dans le cours de physique des ondes.

9. On veut $z_c / T(z_c, t) \Big|_{\max} - \Theta_0 = 10^{-2} \Theta_0 \Rightarrow T_0 e^{-z_c/\delta} = 10^{-2} \Theta_0$
oscillat. annelles $z_c = -\delta \ln\left(\frac{10^{-2} \Theta_0}{T_0}\right) = -\sqrt{\frac{2D}{\omega}} \ln\left(10^{-2} \frac{\Theta_0}{T_0}\right)$

AN: $D = 1,3 \cdot 10^{-7}$; $\omega = \frac{2\pi}{365 \times 86400}$ et $z_c = 5,3 \text{ m} \Rightarrow$ la température dans le tunnel est est

10. Si $T \ll 1$, $\omega \ll 1$ et $\delta \ll 1$ car $\delta \approx \frac{1}{\sqrt{\omega}}$

Cela confère à caractère parabol. au sol.

I. B. Température d'origine géophysique *en doses ne compliquent ...*

11. $\mathcal{G} = \{ \text{1 tranche de croûte terrestre entre } z \text{ et } z+dz \}$

RS $\left\{ \begin{aligned} d\mathcal{M} &= dQ_e - dQ_s + dQ_{\text{autres}} \\ 0 &= (j(z) - j(z+dz)) S dz + S dz \rho_0 e^{-z/H} dt \quad (P: \text{puiss. volumique}) \\ 0 &= -\frac{dj}{dz} + \rho_0 e^{-z/H} = \kappa \frac{dT}{dz^2} + \rho_0 e^{-z/H} \end{aligned} \right.$

12. $\Rightarrow \frac{dT}{dz^2} = \frac{d^2 T}{dz^2} = -\frac{\rho_0}{\kappa} e^{-z/H} \rightarrow \frac{dT}{dz} = C_1 + \frac{H \rho_0}{\kappa} e^{-z/H}$

en $z = L_c$, il y a \equiv des flux: $\vec{j}_{th}(z=L_c) = \vec{j}_u \Rightarrow -\kappa \frac{dT}{dz} = -j_u \Rightarrow \frac{dT}{dz} = \frac{j_u}{\kappa}$

rem: on trouve bien ser que $\frac{dT}{dz} > 0$, $T(z) \nearrow$

$$C_1 + \frac{H \rho_0}{\kappa} e^{-L_c/H} = \frac{j_u}{\kappa} \Rightarrow T(z) = C_1 z - \frac{H^2 \rho_0}{\kappa} e^{-z/H} + C_2$$

CAL en $z=0$: $0_0 = C_2 - \frac{H^2 \rho_0}{\kappa}$

cas final: $T(z) = \left(\frac{j_u}{\kappa} - \frac{H \rho_0}{\kappa} e^{-L_c/H} \right) z + \frac{H^2 \rho_0}{\kappa} (1 - e^{-z/H}) + 0_0$

13. $j_s = -\kappa \frac{dT}{dz}(z=0) = -\kappa \left(C_1 + \frac{H \rho_0}{\kappa} \right) = -\kappa \left(\frac{j_u}{\kappa} - \frac{H \rho_0}{\kappa} e^{-L_c/H} + \frac{H \rho_0}{\kappa} \right)$

$$j_s = H \rho_0 (e^{-L_c/H} - 1) - j_u$$

14. *for more:* $\frac{j_u}{H \rho_0 e^{-L_c/H}} = \frac{j_u e^{L_c/H}}{H \rho_0} = \frac{35 \cdot 10^{-3} \times e^{4,5}}{10^4 \times 2,5 \cdot 10^{-6}} \approx 100$

$\Rightarrow T(z) \approx \frac{j_u}{\kappa} z + \frac{H^2 \rho_0}{\kappa} (1 - e^{-z/H}) + 0_0$

AN: $T(z = 1,7 \text{ km}) = 32,8^\circ\text{C}$

$j_s = -60 \text{ mW/m}^2 \Rightarrow j_s < 0$, le sol immer de la chaleur

I.C prise en compte du relief: partie difficile, assez peu suivie

$T(x, z=0) = T_s + T_1 \cos\left(\frac{2\pi x}{\lambda_1}\right) \rightarrow$ variant sinusoidale du relief.

15. A présent T dépend de x et de z: $T(x, z)$

l'équation est alors: $\frac{\partial T}{\partial t} = D \Delta T = \frac{k}{\rho c} \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right) \rightarrow$ R.S. $\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} = 0$

Méthode de séparation des variables: posons $T(x, z) - T_s = f(x)g(z)$
(on étudie que la partie variable)

on cherche f et g solution de l'éq. et vérifiant les C.A.L. propriétés.

Il vient: $f''(x)g(z) + f(x)g''(z) = 0 \Rightarrow \underbrace{\frac{f''(x)}{f(x)}}_{\text{dépend de } x} = - \underbrace{\frac{g''(z)}{g(z)}}_{\text{dépend de } z} = \text{Cst} = C$

$$\begin{cases} f''(x) - C f(x) = 0 \\ g''(z) + C g(z) = 0 \end{cases}$$

La C.A.L. en $z=0$ impose à $f(x)$ d'être sinusoidale

donc $C < 0$. Posons $d / \frac{1}{d^2} = -C$
(en m)

$\hookrightarrow \begin{cases} f''(x) + \frac{1}{d^2} f(x) = 0 \\ g''(z) - \frac{1}{d^2} g(z) = 0 \end{cases}$ d est 1 distance

Les solutions sont: $f(x) = A \cos(x/d) + B \sin(x/d)$

$g(z) = C' e^{z/d} + D e^{-z/d} = D e^{-z/d}$ avec $C'=0$ pour éviter 1 divergence

Au final: $T(x, z) = T_s + D e^{-z/d} (A \cos(x/d) + B \sin(x/d))$

$\underset{z=0}{=} T_s + T_1 \cos(2\pi x / \lambda_1) \Rightarrow \begin{cases} B=0 \\ AD=T_1 \end{cases}$ et $d = \lambda_1 / 2\pi$

$$T(x, y) = T_s + T_1 e^{-\beta y/d} \cos\left(\frac{2\pi x}{\lambda_1}\right)$$

variant spatiale de T
 c'est ϕ des initiales

16. il faut interpréter ! Je comprends qu'il faut faire la somme des solutions trouvées à Q.12 et Q.14, en adaptant l'écriture exacte en fonction des CAL en $y=0$

$$\text{soit } T(x, y) = T_1 e^{-\beta y/d} \cos\left(\frac{2\pi x}{\lambda_1}\right) + j\omega \frac{\rho_0}{k} + \frac{H^2 \rho_0}{k} (1 - e^{-\beta y/d}) + \underbrace{C_3 T}_{T_s}$$

rem: on peut aussi établir l'ED avec les sources internes mais cela ne semble pas correspondre à l'esprit de la question

17. DL O(1) en $y=0+h$: $T(x, h) \approx T(x, 0) + h \left. \frac{\partial T}{\partial y} \right|_{y=0}$
 ($f(x_0+h) \approx f(x_0) + h f'(x_0)$)

$$\Rightarrow T(x, y=0) = T(x, y=h) - h \left. \frac{\partial T}{\partial y} \right|_{y=0}$$

De plus: $\beta_s = -\kappa \left. \frac{\partial T}{\partial y} \right|_{y=0} \Rightarrow T(x, 0) = T(x, h) + \frac{h}{\kappa} \beta_s = T_s(y=h) + \frac{j\omega \rho_0}{k} \cos\left(\frac{2\pi x}{\lambda_1}\right)$
 $= \theta_0 + (\beta + j\omega \frac{\rho_0}{k}) h_0 \cos\left(\frac{2\pi x}{\lambda_1}\right)$

or le sujet a dit au début que $T(x, 0) = T_s(y=0) + T_1 \cos\left(\frac{2\pi x}{\lambda_1}\right)$

donc $T_1 = (j\omega \frac{\rho_0}{k} + \beta) h_0$

Au final:

$$T(x, y) = (\beta + j\omega \frac{\rho_0}{k}) h_0 e^{-\beta y/d} \cos\left(\frac{2\pi x}{\lambda_1}\right) + j\omega \frac{\rho_0}{k} + \frac{H^2 \rho_0}{k} (1 - e^{-\beta y/d}) + \theta_0 + \beta y$$

$$C_1 = \beta + j\omega \frac{\rho_0}{k}$$

$$C_3 = j\omega \frac{\rho_0}{k} + \beta$$

$$C_2 = H^2 \frac{\rho_0}{k}$$