

Le sujet est constitué de deux extraits de concours indépendants. Vous êtes priés de rédiger les deux sujets sur des feuilles séparées svp.

E3A PSI 21 Étude d'un haut-parleur électrodynamique

A - Étude générale

On représente ci-dessous un haut-parleur électrodynamique (**figure 1**). Celui-ci est constitué d'une bobine d'axe $(X'X)$, de résistance R , d'inductance propre L , solidaire d'une membrane pouvant se déplacer parallèlement à elle-même suivant la direction $(X'X)$ normale à son plan. Lorsque la bobine s'écarte de sa position d'équilibre d'un écart algébrique $x(t)$, elle est rappelée vers cette position d'équilibre par une force élastique modélisée par un ressort de raideur k . De plus, l'air produit sur la membrane une force de frottement fluide, proportionnelle à sa vitesse de déplacement, qui s'écrit $\vec{F}_f = -\alpha\vec{v}$. On ne tiendra pas compte du poids de l'équipage mobile bobine-membrane.

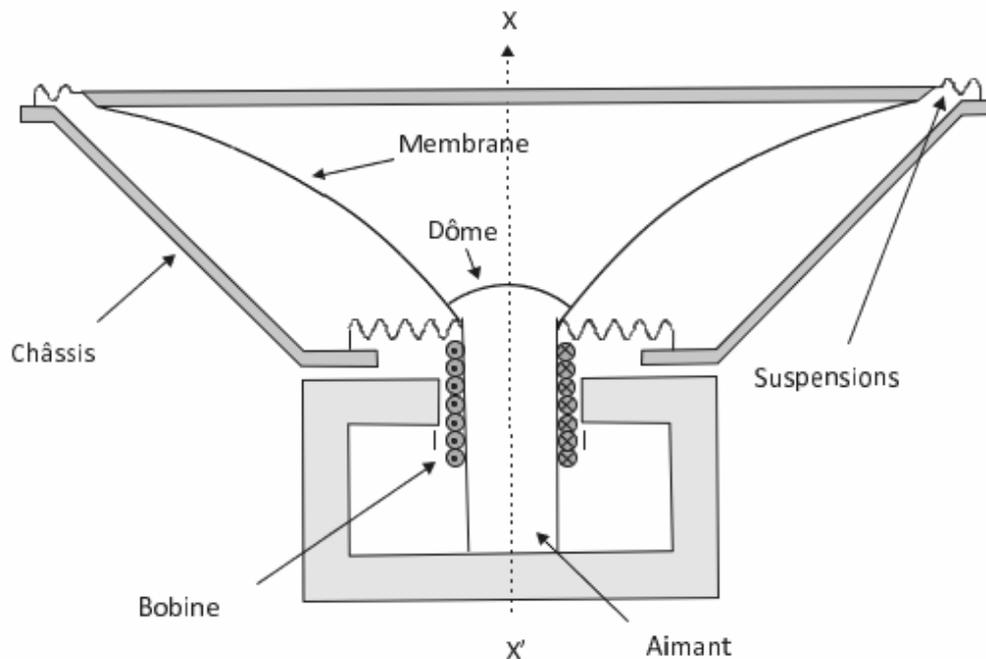


Figure 1 - Schéma du haut-parleur de l'étude

La bobine est placée dans un champ magnétique radial \vec{B} , uniforme en norme, normal à $(X'X)$, créé par un aimant permanent. On se place dans un modèle simplifié de haut-parleur basé sur la configuration des rails de Laplace, représentée sur la **figure 2**. Le générateur de force électromotrice (f.é.m.) $E(t)$ délivre un signal électrique que l'on veut transformer en signal sonore. La membrane et l'air sont mis en mouvement par l'intermédiaire de la barre de largeur ℓ qui se déplace de $x(t)$. Cette grandeur $x(t)$ représente l'élongation du ressort par rapport à la position d'équilibre, elle-même caractérisée par la longueur ℓ_0 . La membrane du haut-parleur est solidaire de la barre. On note m_T la masse du système {barre, haut-parleur}. On suppose donc que la verticale est définie par l'axe z , l'axe x étant horizontal. On note $(\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$ la base des vecteurs unitaires de la **figure 2**.

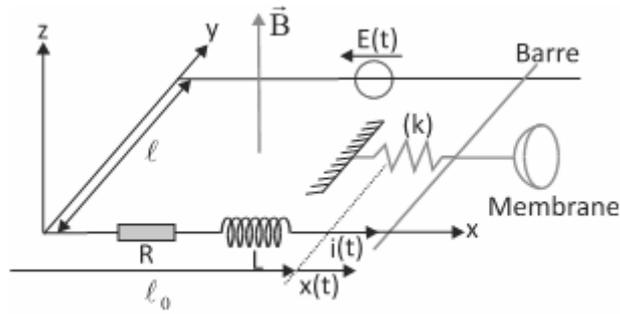


Figure 2 - Configuration des rails de Laplace de l'étude

Q1. Montrer que la f.é.m. induite e dans le cadre vaut $e = -B\ell v(t)$ où $v(t)$ est la vitesse, dérivée de $x(t)$.

Q2. Dédire de la question précédente l'équation électrique (E.E.) traduisant le comportement du circuit. Faire le schéma électrique équivalent en tenant compte de la f.é.m. induite. On notera $i(t)$ le courant induit dans ce circuit.

Q3. Faire le bilan des forces s'exerçant sur l'ensemble {barre + haut-parleur} de masse m_T . En déduire l'équation différentielle mécanique relative au mouvement de la barre (équation E.M.).

Q4. Faire un bilan de puissances en combinant les équations E.E. et E.M. Le commenter.

Q5. Comparer la puissance de la f.é.m. $P_{fem} = ei$ à la puissance de la force de Laplace P_L .

Q6. Le générateur délivre une tension sinusoïdale $E(t)$ de pulsation ω . On utilisera les notations complexes, pour lesquelles $\underline{E}(t) = E_0 e^{j\omega t}$, $E(t)$ s'identifiant alors avec la partie réelle de $\underline{E}(t)$. Montrer que l'on a $\underline{E} = (R + jL\omega + \underline{Z}_m)\underline{i} = \underline{Z}_m \underline{i}$ où \underline{i} est le courant complexe traversant le circuit et \underline{Z}_m est une grandeur, appelée impédance motionnelle, dont on donnera l'expression en fonction de $B, \ell, \alpha, m_T, \omega$ et k .

Q7. Montrer que l'admittance motionnelle $\underline{Y}_m = 1/\underline{Z}_m$ peut s'écrire sous la forme :

$$\underline{Y}_m = \frac{1}{R_m} + jC_m\omega + \frac{1}{jL_m\omega} .$$

Donner l'expression des termes R_m, C_m et L_m en fonction de B, ℓ, α, m_T et k .

Q8. Dédire de ce qui précède le schéma électrique équivalent du haut-parleur.

Le rendement η du haut-parleur est défini comme le rapport de la puissance moyenne émise par l'onde sonore sur la puissance moyenne fournie par la source de tension.

Q9. Montrer que la relation établie à la **question Q4.** devient, en raisonnant sur les moyennes temporelles, en régime périodique établi :

$$\langle Ei \rangle = \langle Ri^2 \rangle + \langle \alpha v^2 \rangle .$$

Commenter ce résultat.

Q10. En identifiant la puissance émise par l'onde sonore $\langle P_{son} \rangle$ à $\langle \alpha v^2 \rangle$, où v est la vitesse de la membrane, montrer que η est de la forme :

$$\eta = \frac{1}{1 + \frac{R}{R_m} \left[1 + Q^2 \left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right)^2 \right]} .$$

On donnera les expressions de Q et ω_0 en fonction de α , m_T et k .

Q11. Commenter la forme obtenue. On pourra par exemple effectuer l'étude asymptotique du comportement en basses et hautes pulsations, ainsi que pour une pulsation proche de ω_0 .

B - Membranes élastiques - Figures de Chladni

On convient d'appeler membrane idéale une structure mince, c'est-à-dire de faible épaisseur devant ses autres dimensions, où la raideur est due exclusivement à une précontrainte, c'est-à-dire à une tension surfacique appliquée sur son pourtour. On peut dire que les membranes sont les équivalents à deux dimensions des cordes. Elles se retrouvent dans les diaphragmes de microphones, les peaux de tambours et timbales, ...

Les figures dites de Chladni sont une découverte célèbre de Ernst Florence Friedrich Chladni (1756-1827), musicien et physicien de Leipzig. Pour les produire, Chladni saupoudrait une plaque métallique carrée avant de la faire vibrer avec un archet. En frottant le bord de la plaque à différents endroits, Chladni a su produire des sons différents. De plus, sous l'action de la vibration, la poudre se déplaçait pour s'accumuler aux points stationnaires de la plaque, donnant ainsi des figures caractéristiques qui portent son nom. On peut aujourd'hui faire vibrer une plaque plus simplement en utilisant un haut-parleur, ce qui permet un contrôle plus précis de la fréquence de vibration, grâce au générateur de tension. On donne ci-dessous quelques figures de Chladni pour une plaque vibrante.

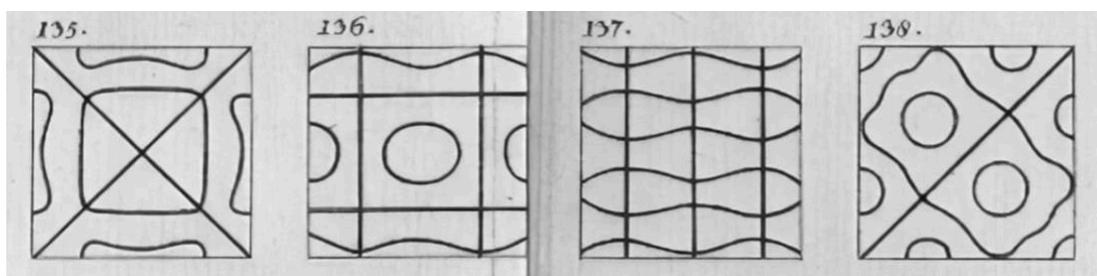


Figure 3 - Quelques figures de Chladni

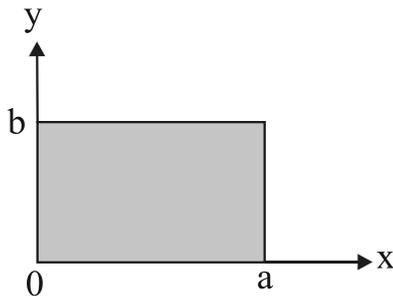
Q12. Que représentent les lignes noires sur les figures ?

Soit une membrane au repos dans le plan (Oxy). On note z le déplacement transversal de la membrane. En négligeant toute force extérieure s'exerçant sur la membrane, on montre que l'équation de propagation est, en coordonnées cartésiennes, pour $z = z(x, y, t)$:

$$\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} \right) - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 z}{\partial t^2} = 0$$

où $c = \sqrt{\frac{\tau}{\mu}}$ est la célérité des ondes sonores dans la membrane, τ la tension par unité de longueur de la membrane et μ la masse surfacique de la membrane.

On considère une membrane rectangulaire de longueur a selon [Ox) et b selon [Oy), conformément à la **figure 4** ci-dessous. On note Γ le contour de la membrane.



La membrane est repliée et étirée uniformément sous le contour Γ de sorte que l'on impose comme conditions limites $z(x, y, t) = 0$ pour $(x, y) \in \Gamma$.

Figure 4 - Modèle géométrique de la membrane

On cherche une solution de l'équation de propagation sous la forme de fonctions à variables séparées :

$$z(x, y, t) = X(x)Y(y)T(t)$$

Q13. Montrer que cela revient à écrire, avec α et β deux constantes :

$$\frac{d^2 X}{dx^2} \pm \alpha^2 X = 0 \quad \text{et} \quad \frac{d^2 Y}{dy^2} \pm \beta^2 Y = 0 .$$

Q14. Montrer que les solutions de $\frac{d^2 X}{dx^2} - \alpha^2 X = 0$ et $\frac{d^2 Y}{dy^2} - \beta^2 Y = 0$ ne satisfont pas aux conditions aux limites, à moins d'avoir identiquement $X(x) = 0$ et $Y(y) = 0$, ce qui ne correspond à aucune solution physique.

Q15. En prenant en compte les conditions aux limites, donner alors les solutions physiquement possibles pour $X(x)$ et $Y(y)$ en fonction de deux entiers strictement positifs m et n , des paramètres géométriques a et b de la **figure 4**, et de deux paramètres d'intégration X_0 et Y_0 .

Q16. Montrer que l'équation en T est de la forme $\frac{d^2 T}{dt^2} + [(\alpha^2 + \beta^2)c^2] T = 0$ et que

les pulsations propres du système sont de la forme $\omega_{mn} = \pi c \sqrt{\left(\frac{m}{a}\right)^2 + \left(\frac{n}{b}\right)^2}$, où m et n sont les entiers positifs introduits à la question précédente.

Q17. Représenter les figures de Chladni obtenues respectivement pour :

- $m = 1$ et $n = 2$;
- $m = 2$ et $n = 1$;
- $m = n = 2$.

C - Filtres répartiteurs

Comme il est très difficile, pour ne pas dire impossible, de réaliser des haut-parleurs couvrant entièrement le spectre acoustique audible, on réalise des haut-parleurs spécialisés dans une zone déterminée de fréquences. On aboutit ainsi à réaliser des enceintes à deux voies (basses – aiguës) ou à trois voies (basse – médium – aiguës). Les filtres électriques chargés d'aiguiller les fréquences correspondant à ces haut-parleurs doivent répondre à trois critères essentiels :

- **1^{er} critère** : atténuer suffisamment les fréquences hors bande ;
- **2^e critère** : présenter une impédance de charge aussi constante que possible à l'amplificateur, de façon à ce que la puissance absorbée par l'ensemble soit constante et indépendante de la fréquence ;
- **3^e critère** : le rayonnement global doit être à intensité acoustique constante.

Pour satisfaire aux conditions ci-dessus, il est nécessaire de faire appel aux filtres de Butterworth, qui sont des filtres d'ordre n dont le module de la fonction de transfert vérifie une condition particulière :

- pour un passe-bas : $H_b(x) = |H_b(jx)| = \frac{1}{\sqrt{1+x^{2n}}}$
avec $H_b(jx) = \frac{1}{1+a_1(jx)+a_2(jx)^2+\dots+a_n(jx)^n}$;

- pour un passe-haut : $H_h(x) = |H_h(jx)| = \sqrt{\frac{x^{2n}}{1+x^{2n}}}$
avec $H_h(jx) = \frac{(jx)^n}{1+a_1(jx)+a_2(jx)^2+\dots+a_n(jx)^n}$.

Dans les deux cas, on a pris $x = \omega/\omega_0$. On a alors $H_b^2 + H_h^2 = 1$: la puissance délivrée par l'amplificateur est constante. En conséquence, seuls les filtres passe-bas et passe-haut répondant à ces formules satisfont à la condition de puissance constante.

Q18. On se place dans le cas où $n = 3$ pour un passe-bas. Calculer les valeurs qu'il faut donner aux différents coefficients **strictement positifs** a_1 , a_2 et a_3 . On trouvera trois entiers.

Les filtres du troisième ordre ont la structure suivante pour un ensemble à deux haut-parleurs :

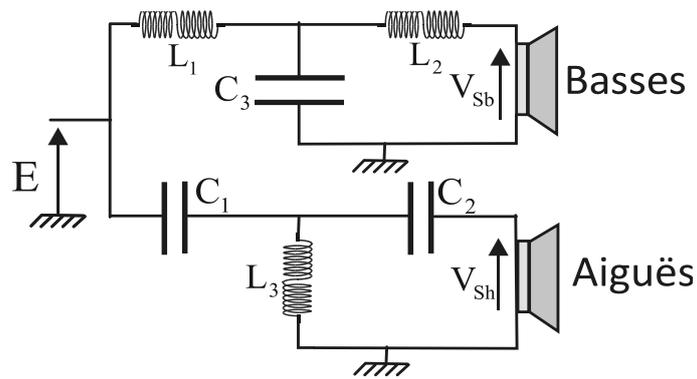


Figure 5 - Structure à deux haut-parleurs

La fonction de transfert du filtre représenté à la **figure 6** est :

$$H_b(j\omega) = \frac{1}{1 + j\omega \frac{L_1 + L_2}{R} + (j\omega)^2 L_1 C_3 + (j\omega)^3 \frac{L_1 L_2 C_3}{R}} = \frac{V_{Sb}}{E} .$$

Q19. Vérifier que cette fonction de transfert est compatible avec le schéma aux basses et hautes fréquences. De quel type de filtre s'agit-il ?

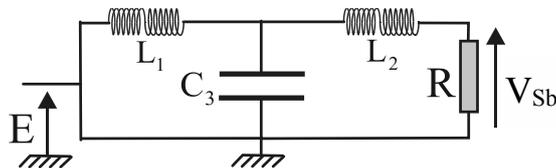


Figure 6 - Partie voie des basses

Q20. Déduire de la question précédente les coefficients L_1 , L_2 et C_3 en fonction de R et de ω_0 sachant qu'il s'agit d'un filtre passe-bas de Butterworth d'ordre trois.

Q21. Justifier la structure retenue ci-dessous sur la **figure 7** pour les aiguës. Sans développer les calculs, proposer les étapes permettant d'établir la function de transfert.

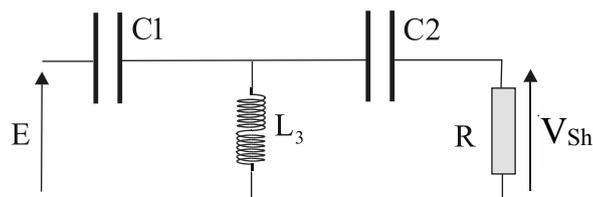


Figure 7 - Partie voie des aiguës

D - Équation de propagation des ondes acoustiques

On considère la propagation d'une onde sonore dans l'air à la vitesse c , selon la direction $(X'X)$. On note μ la masse volumique de l'air, P la pression et \vec{v} la vitesse de déplacement d'une particule élémentaire de fluide. Les grandeurs au repos sont μ_0 et P_0 , tandis que les perturbations apportées par l'onde sonore, supposées au premier ordre, sont μ_1 , P_1 et $\vec{v}_1 = \vec{v}$. Soit ξ_m l'amplitude de déplacement des particules de fluide et λ la longueur d'onde sonore.

P est fonction de x et t : $P(x,t)$

Q22. Préciser ce que l'on appelle l'approximation acoustique.

Q23. On néglige l'effet du champ de pesanteur sur la propagation de l'air. Démontrer, dans le cadre de l'approximation acoustique, la relation :

$$\mu_0 \left(\frac{\partial v_1}{\partial t} \right) = - \left(\frac{\partial P_1}{\partial x} \right)$$

Q24. Toujours dans le cadre de l'approximation acoustique, établir la relation :

$$\left(\frac{\partial \mu_1}{\partial t} \right) = -\mu_0 \left(\frac{\partial v_1}{\partial x} \right)$$

L'onde sonore met en mouvement les particules de fluide selon une transformation isentropique. On introduit donc le coefficient de compressibilité isentropique $\chi_S = \frac{1}{\mu} \left(\frac{\partial \mu}{\partial P} \right)_S$.

Q25. Réécrire le coefficient χ_S dans l'approximation acoustique en fonction de μ_0 , μ_1 et P_1 .

Q26. Dédire des questions précédentes l'équation de propagation relative à la surpression P_1 . En déduire l'expression de la vitesse de propagation c .

Faire l'application numérique pour c dans l'air, de masse volumique $\mu_0 = 1,2 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$ et de compressibilité isentropique $\chi_S = 7,1 \cdot 10^{-6} \text{ Pa}^{-1}$.

E - Effet de l'onde sonore sur le haut-parleur

On considère que la membrane du haut-parleur se déplace selon l'axe des x de la distance $\xi(0, t) = \xi_m \cos(\omega t + \varphi)$. La membrane est supposée de surface S perpendiculaire à l'axe $(X'X)$ et de masse m . L'onde sonore engendrée est plane et progressive. Elle se déplace à la vitesse c selon le sens des x croissants.

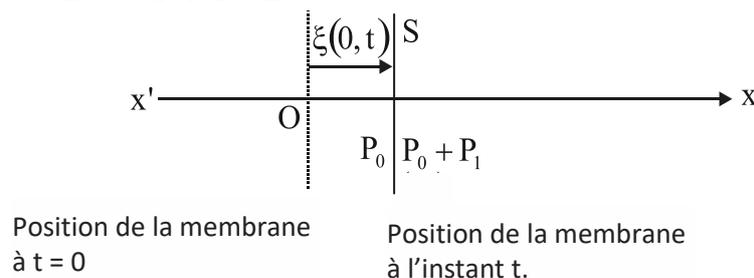


Figure 8 - Schéma des positions

Q27. Écrire l'expression de $\xi(x, t)$, déplacement de l'onde sonore à l'abscisse x .

Q28. On définit l'impédance acoustique pour une onde plane progressive par la relation $Z = \frac{P_1(M, t)}{v_1(M, t)}$. Montrer que l'on a $Z = \mu_0 c$ pour l'onde plane progressive dans le sens des x croissants. On pourra raisonner en utilisant les notations complexes. Faire l'application numérique pour Z dans l'air, de masse volumique $\mu_0 = 1,2 \text{ kg}\cdot\text{m}^{-3}$ et de compressibilité isentropique $\chi_S = 7,1 \cdot 10^{-6} \text{ Pa}^{-1}$.

Q29. Calculer la puissance de la force de surpression s'exerçant sur la membrane en fonction de μ_0 , c , S et v_1 . En déduire que la force que le fluide exerce sur la membrane est de la forme $\vec{F}_f = -\alpha \vec{v}$, où l'on identifiera le coefficient α en fonction de c , S et μ_0 . Il s'agit de la force « de frottement fluide » de la partie A.

F - Intensité acoustique et densité volumique d'énergie sonore

Le vecteur de Poynting acoustique noté $\vec{\Pi}$ est défini par la relation $d^2E = \vec{\Pi} \cdot d\vec{S} dt$ où d^2E est l'énergie sonore transmise à la surface orientée $d\vec{S}$ pendant la durée dt . On considère que la vitesse des particules de fluide est \vec{v}_1 et que p_1 est la surpression acoustique.

Q30. Qu'appelle-t-on intensité acoustique (ou sonore) ? On la note I dans la suite.

Q31. Pourquoi définit-on l'intensité acoustique en décibels par la relation $I_{dB} = 10 \log \left(\frac{I}{I_{ref}} \right)$ (avec $I_{ref} = 10^{-12} \text{ W}\cdot\text{m}^{-2}$) ?

Q32. On considère une onde plane progressive harmonique, d'intensité acoustique $I_{dB} = 120 \text{ dB}$ et de fréquence $f_0 = 1,0 \text{ kHz}$. On rappelle l'expression du vecteur de Poynting acoustique :

$$\vec{\Pi} = P_1 \vec{v}_1.$$

- Calculer la valeur moyenne du vecteur de Poynting acoustique.
- En déduire les amplitudes P_m et v_m de la surpression p_1 et de la vitesse des particules v_1 (on considérera que vitesse et surpression, sinusoidales, sont en phase et on prendra la valeur numérique de Z trouvée à la question 28).
- Vérifier la validité de l'approximation acoustique.
- Déterminer l'amplitude x_m du déplacement des particules de fluide. Commenter.

Q33. Démontrer que $\text{div}(\vec{\Pi}_1) = -\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{2} \chi_S P_1^2 + \frac{1}{2} \mu_0 v_1^2 \right)$.

On fera la démonstration en raisonnant à une seule dimension spatiale, c'est-à-dire en prenant $\vec{v}_1 = v_1(x, t) \vec{e}_x$ et $P_1 = P_1(x, t)$.

Q34. Sachant que l'équation locale de conservation de l'énergie s'écrit $\text{div} \vec{\Pi}_1 + \frac{\partial e}{\partial t} = 0$, où e est l'énergie volumique du système, donner une interprétation physique des termes $\frac{1}{2} \chi_S P_1^2$ et $\frac{1}{2} \mu_0 v_1^2$.

PROBLEME II – Etude d'une plaque à induction (D'après CCINP – PSI)

- Le chauffage du fond métallique (plaque circulaire) des récipients de cuisson peut être directement réalisé au moyen de courants de Foucault induits par un champ magnétique variable.
- Logé dans une table en céramique, un bobinage (inducteur) alimenté en courant sinusoïdal génère ce champ. Le transfert d'énergie électrique s'effectue par induction mutuelle entre ce bobinage et la plaque circulaire assimilable à une spire unique fermée sur elle-même.
- Dans le domaine de la cuisson, il s'agit de créer une forte dissipation Joule dans le fond des récipients tout en limitant au plus bas l'échauffement de l'inducteur. Pour atteindre cet objectif un choix s'impose quant aux propriétés du métal à chauffer.

Avertissements :

a) Ce problème conduit à comparer le comportement d'un fond en acier amagnétique à celui d'un fond en acier magnétique, **pendant aucune connaissance des milieux magnétiques n'est nécessaire**. Les comparaisons seront abordées tout simplement en utilisant les valeurs des perméabilités magnétiques relatives μ_r données ci-après, sachant que la perméabilité magnétique du vide $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ H.m}^{-1}$ doit être systématiquement remplacée par la perméabilité magnétique absolue du métal : $\mu = \mu_0 \cdot \mu_r$

b) On tiendra compte aussi du fait que la conductivité électrique γ des deux métaux considérés n'est pas la même. Les données sont :

- pour l'acier amagnétique : $\mu_r = 1$ et $\gamma = 10^6 \text{ S.m}^{-1}$
- pour l'acier magnétique : $\mu_r = 350$ et $\gamma = 5 \cdot 10^6 \text{ S.m}^{-1}$

c) La permittivité du vide sera prise égale à $\epsilon_0 = 1/(36\pi \cdot 10^9) \text{ F.m}^{-1}$

d) L'expression donnée ci-après du laplacien vectoriel d'un vecteur \vec{j} , pourra être utilisée sans démonstration :

$$\Delta \vec{j} = \text{grad} \left[\text{div} \vec{j} \right] - \text{rot} \left[\text{rot} \vec{j} \right]$$

e) On désignera par \mathbf{i} le nombre complexe de module unité et d'argument $\pi/2$ et à toute grandeur harmonique de pulsation ω : $a(M,t) = a(M) \cos[\omega t + \phi(M)]$ on associera le nombre complexe $\underline{a}(M,t) = \underline{A}(M) \exp[\mathbf{i} \omega t]$ où $\underline{A}(M)$ représente l'amplitude complexe $\underline{A}(M) = a(M) \exp[\mathbf{i} \phi(M)]$.

f)

Laplacien d'un champ scalaire :

$$\Delta U = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2}.$$

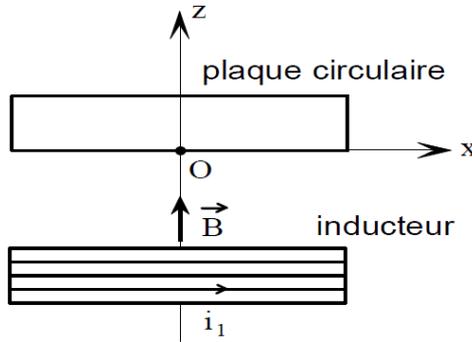
Laplacien d'un champ vectoriel :

$$\Delta \vec{A}(M, t) = \Delta A_x \vec{e}_x + \Delta A_y \vec{e}_y + \Delta A_z \vec{e}_z$$

1) Courants de Foucault - Effet de peau.

Un inducteur alimenté par un courant i_1 génère un champ magnétique \vec{B} sinusoïdal de fréquence compatible avec l'approximation des régimes quasi stationnaires (A.R.Q.S.). Ce champ est globalement orienté suivant un axe Oz (Figure 1) autour duquel il conserve une symétrie de révolution. Il agit sur un disque métallique coaxial dont la face en regard vers l'inducteur est centrée en O.

Dans toute la suite, la fréquence sera prise égale à $f = 25$ kHz. Vous pourrez utiliser cette valeur pour toutes les AN demandées ou que vous jugerez utile de réaliser.



[Fig. 1]

1.1 - Exprimer la loi qui permet de prévoir globalement le sens de rotation des courants induits dans la plaque circulaire. Préciser celui-ci. Quelle est la fréquence des courants induits ?

1.2 - Pour modéliser ces courants, on recherche une solution conforme aux équations de Maxwell et compatible avec l'hypothèse de charges mobiles entraînées en rotation autour de l'axe Oz, avec une vitesse angulaire $\Omega(z)$, uniforme dans chaque section droite de la plaque circulaire.

Toute l'étude se fera en coordonnées cartésiennes dans le référentiel orthonormé Oxyz, l'axe Oy non représenté sur la figure 1 étant orienté normalement au plan du dessin, vers l'arrière.

1.2.1. Exprimer la vitesse linéaire \vec{v} des charges électriques en un point $M(x,y,z)$ du disque, sous forme d'un produit vectoriel fonction du rayon vecteur \vec{OM} et du vecteur axial $\vec{\Omega}(z)$ représentant la vitesse de rotation, orienté selon Oz.

1.2.2. En déduire les composantes j_x et j_y de la densité de courant \vec{j} en fonction du nombre n de charges élémentaires $-e$, mobiles par unité de volume, de la vitesse angulaire $\Omega(z)$ et des coordonnées du point M.

1.2.3. Calculer les dérivées partielles : $\frac{\partial^2 j_x}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 j_x}{\partial y^2}$, $\frac{\partial^2 j_y}{\partial x^2}$ et $\frac{\partial^2 j_y}{\partial y^2}$

1.3 - Equations de Maxwell

1.3.1. Exprimer la loi d'Ohm locale pour un métal de conductivité γ .

1.3.2. Ecrire les équations de Maxwell pour un métal de perméabilité absolue μ .

1.3.3. A partir de ces équations de Maxwell, retrouver l'équation locale de conservation de la charge.

1.3.4. Si les conditions initiales étaient telles qu'une densité volumique de charges ρ_0 soit présente à l'instant $t = 0$, montrer qu'elle disparaîtrait en un temps très court. Evaluer ce temps et conclure qu'en régime établi, le conducteur reste globalement neutre en tout point de son volume. Donner l'expression simplifiée de l'équation de Maxwell-Gauss.

1.3.5. Montrer que, lorsque la fréquence imposée est égale à 25 kHz, les courants de déplacement sont tout à fait négligeables devant les courants de conduction. Dans ce cas, donner l'expression simplifiée de l'équation de Maxwell-Ampère.

1.3.6. Réécrire les équations de Maxwell ainsi obtenues, en utilisant la notation complexe pour les dérivations en fonction du temps. En déduire une relation exprimant la proportionnalité entre la densité de courant \vec{j} et son laplacien vectoriel $\Delta \vec{j}$.

1.4 - On recherche pour les composantes j_x et j_y de la densité volumique de courant, des expressions complexes qui puissent s'écrire : $\underline{J}_x(z) \exp[\mathbf{i} \omega t]$ et $\underline{J}_y(z) \exp[\mathbf{i} \omega t]$.
Monter alors, en utilisant les résultats obtenus en 1.2.3, que ces expressions sont régies par des équations différentielles de la forme :

$$\frac{d^2 \underline{J}_x}{dz^2} = f(\underline{J}_x) \quad [1] \quad \text{et} \quad \frac{d^2 \underline{J}_y}{dz^2} = f(\underline{J}_y) \quad [2]$$

1.5 - Résoudre ces équations et écrire l'expression générale des amplitudes complexes \underline{J}_x et \underline{J}_y en faisant apparaître, dans chaque cas, les deux constantes d'intégration.

1.6 - Introduire une grandeur δ homogène à une longueur et caractéristique de l'atténuation suivant l'axe Oz. Quel nom donne-t-on habituellement à cette grandeur ? Montrer qu'elle peut s'écrire :

$$\delta \approx \frac{503,3}{\sqrt{\gamma \mu_r f}}$$

1.7 - L'inducteur est alimenté par un générateur délivrant une fréquence $f = 25$ kHz.
La plaque a une épaisseur égale à 1 cm.

- Calculer la profondeur de pénétration des courants dans les deux cas, acier amagnétique puis acier magnétique, compte tenu des valeurs numériques données en début de problème.
- Justifier que, malgré la petitesse de son épaisseur, l'on puisse considérer la plaque comme illimitée en z.
- Simplifier alors les expressions de \underline{J}_x et de \underline{J}_y .

1.8 - Donner les expressions des composantes réelles, j_x et j_y , du vecteur densité de courant. On fera apparaître deux constantes dans chacune de ces expressions.
Montrer que l'on peut exhiber une vitesse de propagation de l'onde de courant (vitesse de phase) que l'on exprimera en fonction de δ et ω puis de γ , μ et ω . Faire les AN pour les deux types d'acier.

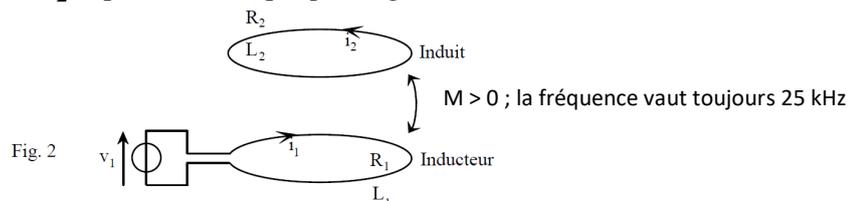
Transfert d'énergie électrique par mutuelle induction

NB : Les questions 2.1 et 2.2 ont été supprimées

L'inducteur est constitué d'un enroulement de spires ; il est caractérisé par sa résistance $R_1 = 18$ m Ω et son coefficient d'auto-induction $L_1 = 30$ μ H. La plaque de cuisson (induit) est assimilée à une spire, caractérisée par sa résistance $R_2 = 8$ m Ω et son coefficient d'auto-induction $L_2 = 0.24$ μ H.

2.3 - L'inducteur est alimenté sous une tension $v_1(t)$. Sachant que l'ensemble inducteur-plaque se comporte comme deux circuits couplés par une mutuelle inductance M :

- Ecrire sans approximation les équations temporelles de couplage entre le courant $i_1(t)$ circulant dans l'inducteur et le courant $i_2(t)$ parcourant la plaque (Figure 2).



- En déduire l'expression littérale du rapport des amplitudes complexes $\frac{\underline{I}_2}{\underline{I}_1}$

- En déduire aussi l'expression littérale de l'impédance d'entrée complexe $\underline{Z}_e = \frac{V_1}{I_1}$ du système.

2.4 - En utilisant les valeurs numériques du texte, et en réalisant les simplifications que vous jugerez nécessaires, donner les valeurs des modules des quantités ci-dessus, b) et c).

On rappelle que pour un dipôle Z , la puissance moyenne dissipée vaut $P = \operatorname{Re}(Z) \cdot I^2$, où I est la valeur efficace du courant traversant le dipôle.

3.1.- Pour des raisons de sécurité, on se fixe comme objectif de limiter les pertes par effet Joule dans l'inducteur à 50 watts. Quelle est alors la valeur efficace du courant maximal admissible

En déduire la valeur efficace maximale de la tension d'alimentation, l'intensité du courant dans la plaque et la puissance de chauffe développée dans celle-ci.

3.2 - Lorsqu'on reprend les mêmes calculs, précisés avec les données de l'acier amagnétique, on trouve que : $R_2 \approx 1 \text{ m}\Omega$, $I_2/I_1 \approx 16,5$ et $Z_e \approx 0,56 \Omega$, les impédances ayant baissé à cause de l'épaisseur de peau plus grande.

Reprendre la question précédente 3.1 et montrer qu'utiliser l'acier amagnétique revient à diminuer nettement la puissance de chauffe de la plaque, malgré une très nette augmentation du courant dans celle-ci.

3.3 - La tension d'alimentation est réglée à $V_1 = 110$ volts, valeur efficace proche du maximum toléré, en vue de recevoir une plaque en acier magnétique. Dans le cas où un utilisateur déposerait sur la table un récipient en acier amagnétique, montrer qu'il existe un risque d'échauffement excessif de l'inducteur. Proposer une solution pour éviter tout accident de ce type.