

Le Ds comporte trois extraits de sujets indépendants que vous rédigerez sur des copies différentes svp.

PROBLÈME 1: E3A Psi 2020

Transmission d'énergie électrique sans fil

L'électricité de demain pourra-t-elle se passer de fils électriques ? La nécessité actuelle de supprimer les fils et réduire l'encombrement, ou encore la multiplication des appareils électriques à faible consommation contribuent au développement des techniques et dispositifs de transmission d'énergie sans fil, inspirés des travaux pionniers de Nikola Tesla au début du XX^e siècle. Les applications sont nombreuses et touchent divers domaines (voir figure 1) : de l'usage domestique (recharge d'appareils avec batteries, alimentation de petits appareils courants) au monde industriel (recharge de voitures électriques, applications diverses de la transmission de puissance, pour les trains par exemple), en passant par la médecine (apport d'énergie électrique aux implants, sans effectuer d'opérations chirurgicales lourdes).



FIGURE 1 – Quelques applications de la transmission d'énergie sans fil, de gauche à droite : recharge de téléphone portable, recharge sans fil d'une voiture Nissan Leaf[®], pacemaker.

Il existe aujourd'hui différents moyens de transmission de puissance sans fil. Citons notamment le couplage inductif non résonant en champ proche, le couplage inductif résonant en champ proche (voir figure 2) et le rayonnement en champ lointain (voir figure 3). Les caractéristiques, avantages et inconvénients de ces techniques sont donnés dans le tableau ci-après. Nous développerons dans cette partie certains aspects du couplage inductif, non résonant puis résonant.



FIGURE 2 – À gauche : couplage inductif non résonant en champ proche ; à droite : couplage inductif résonant en champ proche.

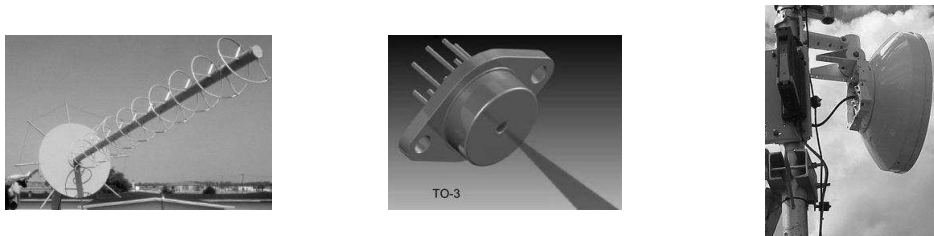


FIGURE 3 – Quelques dispositifs de rayonnement en champ lointain, de gauche à droite : antenne à forte directivité, diode laser, antenne micro-onde.

Mentionnons que le transfert de puissance sans fil par couplage résonant a été récemment mis en évidence par l'équipe de recherche dirigée par Marin Soljačić, au *Massachusetts Institute of Technology* (MIT), en réalisant une transmission de puissance de 60 W avec une distance de 2 m séparant les deux

bobinages, permettant d'allumer une ampoule (voir figure 2). Ces travaux performants ont donné lieu à une publication dans la revue Science en 2007. C'est à cette occasion que le terme « witrlicity », contraction de Wireless Electricity, est apparu.

	Couplage non résonant	Couplage résonant	Rayonnement
Matériel nécessaire	bobines	bobines	antenne à grande directivité
Type de champ	magnétique	magnétique	électrique
Distance de transmission	faible	faible/moyenne	moyenne/grande
Puissance transmissible	faible	moyenne	moyenne/grande
Interactions avec le milieu	faible	faible	forte
Sécurité	élevée	élevée	potentiellement dangereux

TABLE 1 – Comparaison des différentes techniques.

COUPLAGE INDUCTIF NON RÉSONANT

A / Étude des bobines utilisées

Pour établir un couplage inductif non résonant entre une bobine émettrice et une bobine réceptrice, on peut utiliser des solénoïdes ou des bobines « plates » 2D (voir figure 4).



FIGURE 4 – Bobines utilisées.

Considérons tout d'abord le cas d'un solénoïde de longueur ℓ et d'axe de révolution Oz , comportant N spires circulaires jointives de rayon a , et parcourues par un courant d'intensité variable $i(t)$. On fait l'hypothèse d'être dans le cadre de l'Approximation des Régimes Quasi Stationnaires (ARQS) : on calcule le champ magnétique créé par des courants variables $i(t)$, comme en magnétostatique par le théorème d'Ampère.

A1. Rappeler les équations locales de Maxwell relatives au champ magnétique \vec{B} . Comment se simplifient-elles dans l'ARQS ?

A2. Dans le cadre de l'ARQS, indiquer comment on passe de l'équation locale concernée au théorème d'Ampère.

On suppose dans la suite le solénoïde « infini » et on cherche à exprimer le champ magnétique $\vec{B}(M)$ en tout point M de l'espace, repéré par ses coordonnées cylindriques (r, θ, z) . On admet que le champ magnétique est identiquement nul à l'extérieur du solénoïde.

A3. Sous quelle(s) condition(s) l'approximation d'un solénoïde « infini » vous semble-t-elle légitime ?

A4. En invoquant des arguments de symétrie et d'invariance de la distribution de courants, déterminer la direction du champ $\vec{B}(M)$, ainsi que la (ou les) coordonnée(s) dont dépend(ent) son module.

A5. En précisant le contour d'Ampère choisi, montrer tout d'abord que le champ magnétique est uniforme à l'intérieur du solénoïde. En choisissant un second contour d'Ampère, déterminer le champ magnétique à l'intérieur du solénoïde en fonction de ℓ , N et $i(t)$.

Intéressons-nous à présent au cas d'une bobine « plate », constituée (pour simplifier) de N spires circulaires identiques, d'axe de révolution Oz et de rayon a , placées dans le plan $z = 0$ et parcourues par un courant d'intensité $i(t)$. On se place à nouveau dans le cadre de l'ARQS et on considère un point M de l'axe Oz , de cote $z > 0$.

A6. Préciser, en justifiant votre réponse, la direction du champ magnétique $\vec{B}(M)$ au point M .

A7. Que dire du plan d'équation $z = 0$ d'un point de vue des courants ? Qu'en déduire d'un point de vue du champ magnétique ? En déduire une relation simple entre $B_z(-z)$ et $B_z(z)$.

On donne l'expression du champ magnétique créé par la bobine « plate » au point M :

$$B_z(z) = \frac{\mu_0 N i(t) a^2}{2 (z^2 + a^2)^{3/2}}.$$

A8. Représenter l'allure de la fonction $B_z(z)$. Exprimer le champ magnétique maximal $B_{z, \max}$, et déterminer à quelle distance $z_{1/2}$ de la spire le champ magnétique vaut $B_{z, \max}/2$, en fonction de a .

On donne sur la figure 5 les cartes de champ du solénoïde et de la bobine « plate », simulées à l'aide du logiciel FEMM (*Finite Element Method Magnetics*).

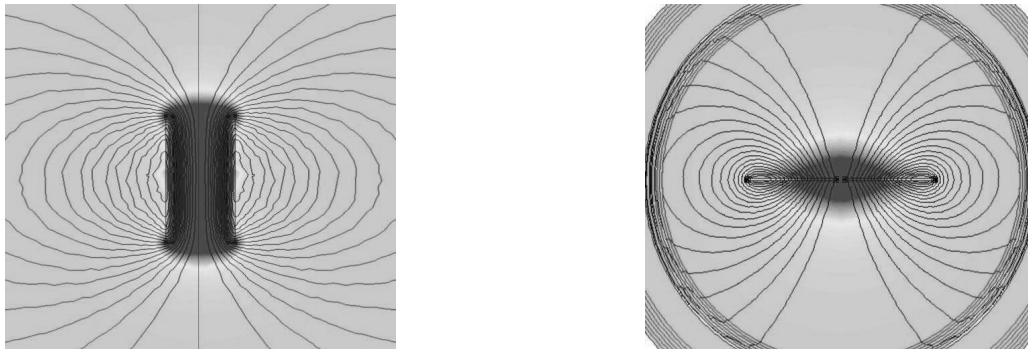


FIGURE 5 – Cartes de champ du solénoïde (à gauche) et de la bobine « plate » (à droite).

A9. Justifier les symétries et/ou antisymétries observées sur chacune de ces cartes de champ.

A10. Sur la carte de champ du solénoïde, on remarque que les lignes de champ se resserrent au sein du solénoïde et qu'elles y sont approximativement parallèles. Que peut-on déduire de ces observations topologiques ? Quelle propriété, relative au flux du champ \vec{B} , permet de le confirmer ?

B / Transfert de puissance : rendement de Yates

Modélisons à présent le transfert inductif de puissance entre deux bobines, comme celles représentées sur la figure 6.



FIGURE 6 – À gauche : système de transmission classique (émetteur et récepteur) utilisé dans les chargeurs sans fil actuels. À droite : schéma et notations utilisées.

Une bobine émettrice « plate », de résistance électrique R_1 et d'inductance propre L_1 , comportant N_1 spires circulaires de rayon a , est parcourue par un courant d'intensité :

$$i(t) = I_0 \cos(\omega t)$$

imposé par un générateur (non représenté sur la figure 6).

B1. Définir et exprimer la puissance instantanée reçue par la bobine émettrice de la part du générateur, notée $P_{\text{reçue}}$, en fonction de L_1 , R_1 , de l'intensité $i(t)$ et de sa dérivée di/dt . En déduire la moyenne temporelle de cette puissance $\langle P_{\text{reçue}} \rangle$ en fonction de R_1 et I_0 .

Considérons également une bobine réceptrice « plate », de résistance électrique R_2 , d'inductance propre L_2 et comportant N_2 spires circulaires de rayon b , située à une distance d de la bobine émettrice. On cherche à définir et exprimer le rendement de transfert de puissance entre les deux bobines, dans le cas d'un alignement parfait. On rappelle l'expression du champ magnétique créé par la bobine émettrice en un point $M(z)$ de l'axe Oz :

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 N_1 i(t) a^2}{2(z^2 + a^2)^{3/2}} \vec{u}_z.$$

Pour simplifier, on suppose ce champ magnétique uniforme dans le plan de la bobine réceptrice.

B2. Exprimer le flux Φ du champ magnétique créé par la bobine émettrice à travers la bobine réceptrice, en fonction de $i(t)$, a , b , d , N_1 et N_2 .

B3. Le courant $i(t)$ étant variable, il apparaît une force électromotrice (fem) $e(t)$ aux bornes de la bobine réceptrice. Quel phénomène est ainsi mis en évidence ? Donner l'équation locale de Maxwell à l'origine de celui-ci.

B4. Après avoir nommé la loi utilisée, exprimer la fem $e(t)$ en fonction de I_0 , ω , t , a , b , d , N_1 et N_2 . On négligera le flux magnétique propre du circuit récepteur devant le flux extérieur.

B5. En négligeant l'inductance propre L_2 de la bobine réceptrice, en déduire la puissance reçue par cette dernière de la part de la bobine émettrice, notée $P_{\text{gén}}$, puis sa moyenne temporelle $\langle P_{\text{gén}} \rangle$ en fonction de I_0 , ω , a , b , d , N_1 , N_2 et R_2 .

On définit le rendement de transmission de puissance par le quotient :

$$\eta = \frac{\langle P_{\text{généré}} \rangle}{\langle P_{\text{reçue}} \rangle}.$$

B6. Montrer que le rendement peut se mettre sous la forme :

$$\eta = k \frac{\mu_0^2 N_1^2 N_2^2 a^4 b^4 \omega^2}{R_1 R_2 (d^2 + a^2)^3}$$

avec k un coefficient sans dimension à expliciter. Ce résultat constitue la loi de Yates.

C / Modélisation du couplage : inductance mutuelle

On propose dans cette sous-partie une modélisation plus générale du couplage magnétique, s'affranchissant des hypothèses faites dans la sous-partie précédente. Le couplage est quantifié par l'inductance mutuelle M entre les deux bobines, d'inductances propres respectives L_1 et L_2 (voir figure 7).

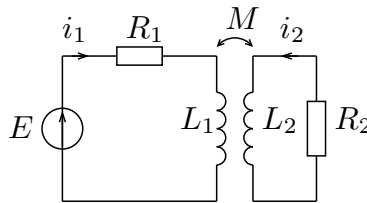


FIGURE 7 – Circuits couplés par mutuelle inductance.

C1. Rappeler la définition de M , ainsi que sa dimension.

C2. En appliquant la loi des mailles dans chacun des deux circuits, établir le système d'équations électriques couplées vérifiées par les intensités $i_1(t)$ et $i_2(t)$.

C3. Montrer que ce système d'équations conduit au bilan de puissance

$$Ei_1 = R_1 i_1^2 + R_2 i_2^2 + \frac{d\mathcal{E}_{\text{mag}}}{dt}$$

avec \mathcal{E}_{mag} une quantité à exprimer en fonction de L_1 , L_2 , M , i_1 et i_2 . Interpréter ce bilan.

C4. On pose la variable adimensionnée $x = i_1/i_2$. Mettre \mathcal{E}_{mag} sous la forme

$$\mathcal{E}_{\text{mag}} = \frac{1}{2} i_2^2 P(x)$$

où $P(x)$ est un polynôme d'ordre 2 que l'on explicitera.

C5. En admettant que \mathcal{E}_{mag} est une quantité positive, montrer que l'inductance mutuelle vérifie une inégalité de la forme $M \leq M_{\text{max}}$. Exprimer son majorant M_{max} en fonction de L_1 et L_2 .

C6. Connaissez-vous d'autres applications de tels circuits couplés par mutuelle induction dans les domaines de l'industrie et de la vie courante ? Deux applications détaillées sont attendues.

D / Résultats expérimentaux

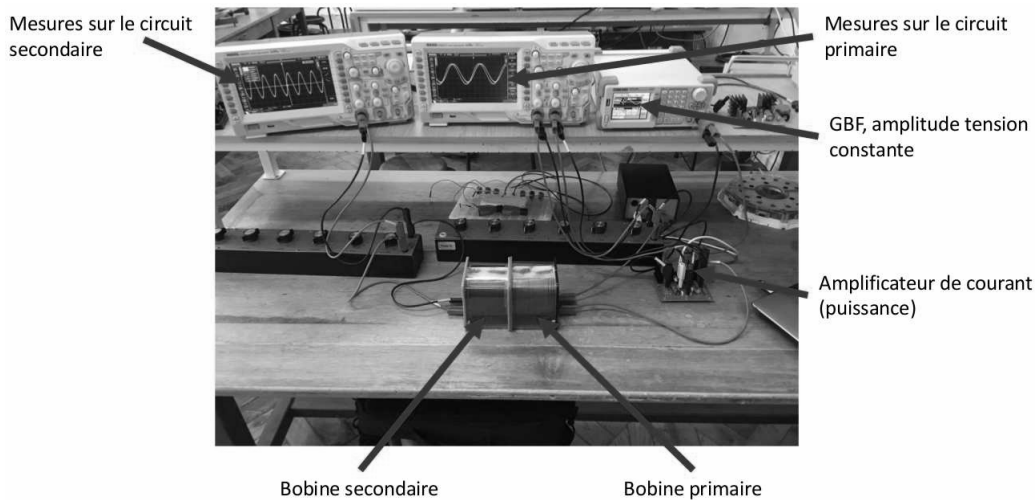


FIGURE 8 – Photographie légendée du montage expérimental.

On cherche à tester expérimentalement, à partir de matériel usuel de travaux pratiques (voir figure 8), la prédiction théorique de Yates obtenue à la question **B6** :

$$\eta = k \frac{\mu_0^2 N_1^2 N_2^2 a^4 b^4 \omega^2}{R_1 R_2 (d^2 + a^2)^3}.$$

Un générateur basse fréquence (GBF), délivrant un signal sinusoïdal de fréquence f , alimente un circuit composé d'une bobine émettrice d'inductance $L = 0,86$ mH, dite « bobine primaire », et d'une résistance. Un amplificateur de courant permet d'augmenter la puissance fournie à la bobine émettrice. On place à une distance d de la bobine émettrice une bobine réceptrice identique, dite « bobine secondaire », mise en série avec une résistance. Deux oscilloscopes permettent de mesurer les puissances moyennes reçues par les bobines émettrice et réceptrice. Les bobines étant accolées, on étudie tout d'abord la variation du rendement η avec la fréquence f imposée par le GBF, tous les autres paramètres demeurant constants (voir figure 9).

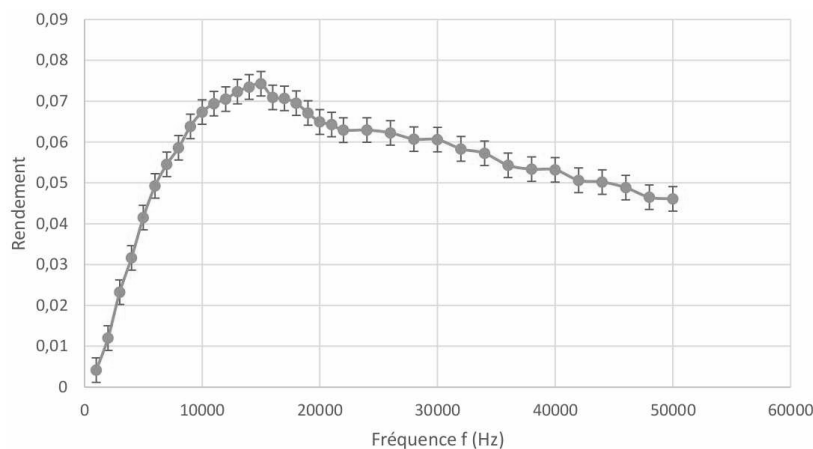


FIGURE 9 – Évolution du rendement en fonction de la fréquence.

D1. Estimer le rendement expérimental maximal η_{\max} , ainsi que la fréquence f_{\max} à laquelle celui-ci est atteint.

D2. Quel comportement en fréquence pouvait-on prévoir par la loi théorique de Yates ? Ce comportement est-il vérifié expérimentalement ? On pourra distinguer le cas des basses et hautes fréquences.

En réalité, chaque bobine souffre d'effets capacitifs associés aux différents matériaux isolants séparant les spires. On propose de déterminer un ordre de grandeur de cette capacité parasite C_p .

D3. Rappeler l'expression de la pulsation propre ω_0 d'un oscillateur électronique LC en fonction de L et C .

D4. En supposant que le rendement soit maximal pour la pulsation ω_0 , en déduire la valeur de C_p .

On cherche ensuite à sonder expérimentalement l'influence d'un désalignement des bobines sur le rendement. Les résultats sont présentés sur la figure 10.

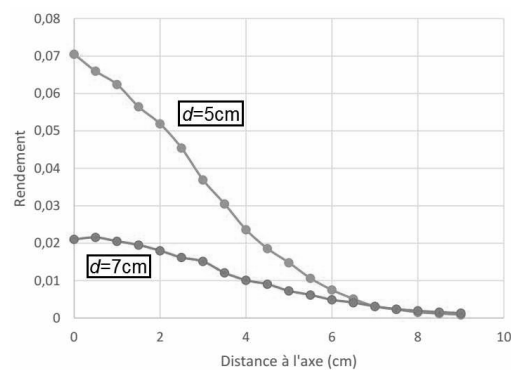
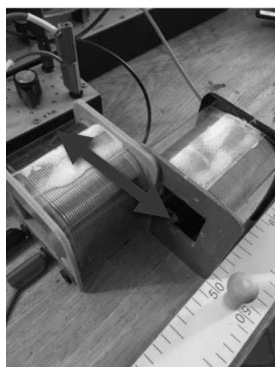


FIGURE 10 – Évolution du rendement en fonction du désalignement entre les bobines. Chaque série de mesures est effectuée à écartement longitudinal entre bobines d fixé.

D5. Interpréter l'évolution observée. Justifier qualitativement que l'effondrement du rendement soit plus important lorsque d est petit.

On sonde enfin l'influence de l'orientation relative des bobines sur le rendement. Les résultats sont reportés sur la figure 11.

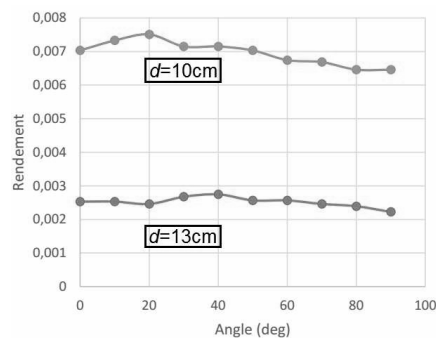
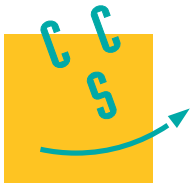


FIGURE 11 – Évolution du rendement en fonction de l'angle entre les bobines.

D6. Commenter les résultats obtenus. Proposer une justification qualitative, en lien avec les cartes de champ représentées sur la figure 5, permettant de comprendre le contraste avec les résultats obtenus à la question **D5**.



Les résultats numériques seront donnés avec un nombre de chiffres significatifs compatible avec celui utilisé pour les données.

À propos du champ magnétique

Dans notre environnement, de nombreux capteurs utilisent les propriétés du champ magnétique dans leur fonctionnement. Ce problème propose l'étude ou la mesure d'effets magnétiques.

- La première partie concerne le champ magnétique et ses propriétés.
- La deuxième partie montre un exemple d'application de l'effet Hall.
- La troisième partie s'intéresse au principe de la variation d'impédance due aux courants de Foucault dans une bobine parcourue par un courant variable dans laquelle on introduit un tube conducteur.

Ces trois parties sont indépendantes.

I Généralités sur le champ magnétique

I.A – Les propriétés du champ magnétique

I.A.1) Le champ magnétique est dit à flux conservatif. Écrire cette propriété sous forme locale, puis sous forme intégrale. Indiquer ce que cela signifie concrètement.

La **figure 1** donne quatre cartes de champ qui représentent une coupe dans un plan perpendiculaire à l'axe Oz d'un champ de vecteur \vec{A} , invariant par translation suivant l'axe Oz . Parmi les cartes de champ proposées ci-dessous, lesquelles sont vraisemblablement celles d'un champ à flux conservatif ?

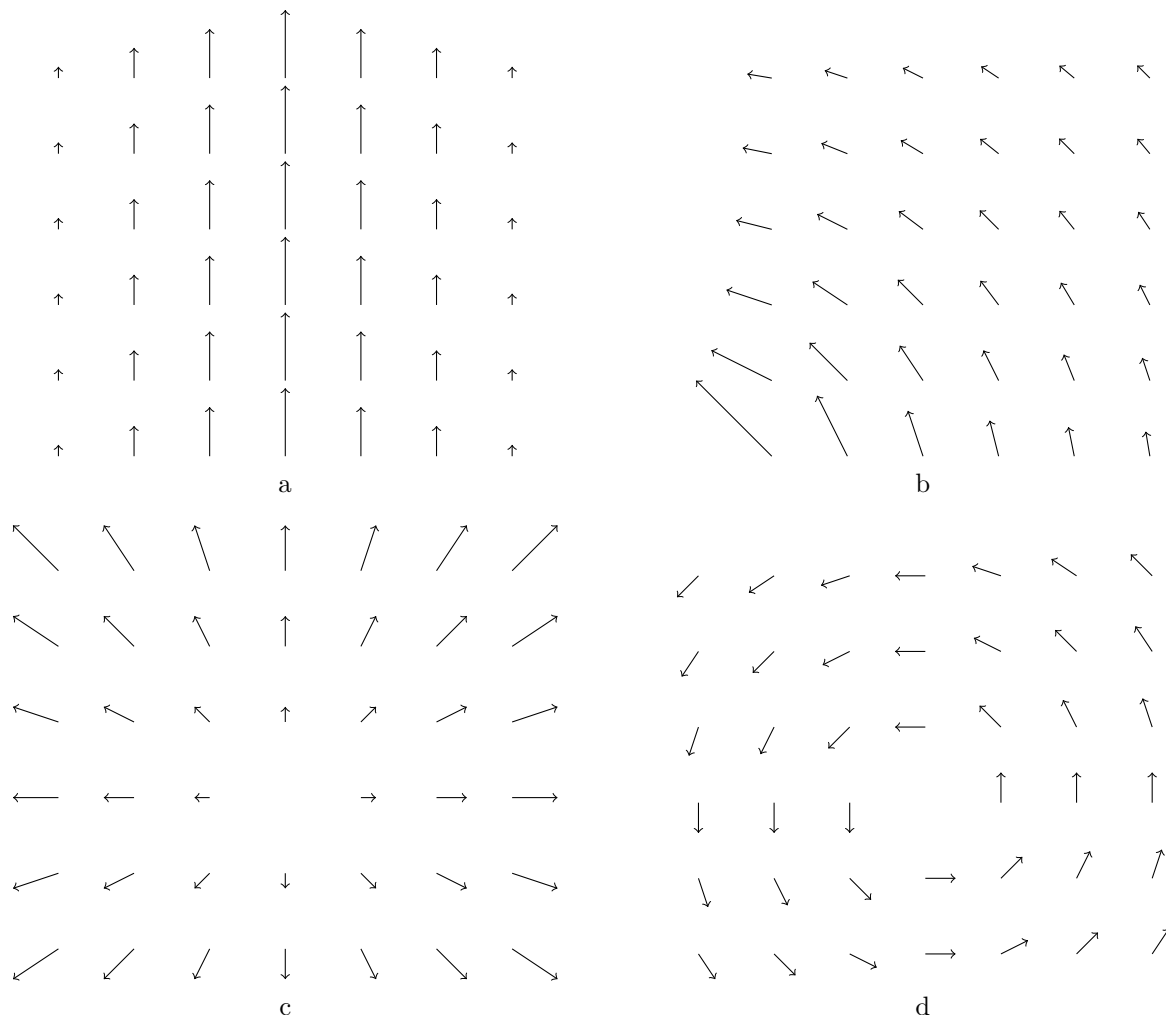


Figure 1

On rappelle que $\text{div } \vec{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$ en coordonnées cartésiennes et que $\text{div } \vec{A} = \frac{1}{r} \frac{\partial r A_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial A_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$ en coordonnées cylindriques.

I.A.2) Énoncer l'équation de Maxwell-Ampère puis le théorème d'Ampère dans le cadre de l'approximation des régimes quasi-stationnaires (ARQS). Parmi les cartes de champs proposées, lesquelles pourraient être celles d'un champ magnétique ?

I.A.3) Définir très brièvement (5 lignes maximum) les notions de plan de symétrie et d'antisymétrie d'une distribution de courant et les propriétés du champ qui en résulte.

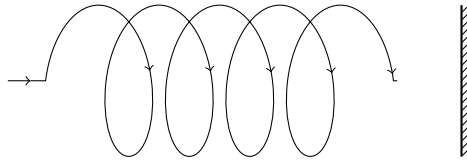


Figure 2

On s'intéresse à l'image dans un miroir d'un solénoïde (voir **figure 2**). Indiquer en la justifiant, la direction et le sens du champ magnétique dans le solénoïde image par rapport à celui du solénoïde initial.

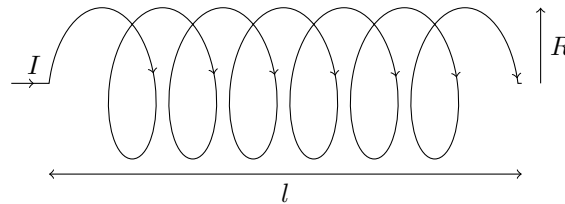


Figure 3

I.A.4) On s'intéresse à un solénoïde de longueur l et de rayon R comportant N spires (voir **figure 3**).

a) À quelle condition peut-on dire que ce solénoïde est infiniment long ? On admettra dans la suite que cette condition est réalisée.

b) Identifier les propriétés de symétrie et d'invariance du champ à l'intérieur du solénoïde.

En déduire la direction du champ et les variables dont il dépend.

c) En appliquant le théorème d'Ampère à un contour bien choisi, calculer le champ à l'intérieur du solénoïde.

d) *Application numérique*

Calculer B pour : $N = 1000$ spires, $l = 1,00$ m, $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7}$ (SI), $I = 1,00$ A.

Commenter. Comment faire pour obtenir un champ plus intense ? (faire une étude rapide et systématique des différents paramètres et critiquer).

I.B – L'effet Hall

Une plaquette parallélépipédique de grande longueur L , suivant Ox , de largeur a , d'épaisseur b , est parcourue par un courant d'intensité I réparti uniformément sur toute sa section droite (voir **figure 4**).

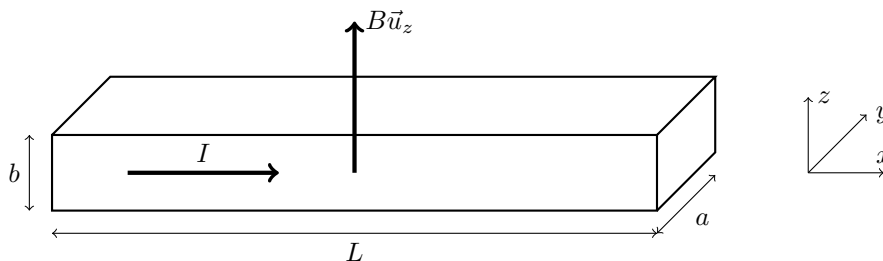


Figure 4

I.B.1) a) Quelle est l'action du champ sur un porteur de charge q supposée < 0 ?

b) Que se passe-t-il pendant le régime transitoire ?

Montrer qu'il apparaît alors une différence de potentiel entre les points A et C se situant sur les faces latérales parallèles au plan Oxz et tels que $\vec{AC} = a\vec{u}_y$. La différence de potentiel $V_C - V_A$ est nommée V_H . Quel est son signe ? Dépend-il de celui de q ?

I.B.2) On se place ensuite en régime permanent. En appliquant le principe fondamental de la dynamique à un porteur de charges, calculer le champ de Hall \vec{E}_H .

I.B.3) Donner la relation liant le vecteur densité de courant volumique \vec{j}_H à la vitesse de déplacement des charges dans la plaquette et à n (nombre de porteurs de charge par unité de volume) et q . Calculer V_H . On montrera que $V_H b = R_H I B$ où R_H est la constante de Hall que l'on explicitera en fonction de n et q . Que peut-on dire du signe de R_H ?

I.B.4) Application numérique

Le matériau est un ruban conducteur de masse volumique ρ , de masse molaire M . Chaque atome met en jeu un électron libre pour la conduction.

Donner la valeur et l'expression de n . En déduire R_H . Calculer V_H si $B = 0,1$ T, $M = 64$ g · mol⁻¹, $\rho = 8,92$ g · cm⁻³, $I = 1,00$ A, $N_A = 6,02 \times 10^{23}$ mol⁻¹, $b = 0,1$ mm et $q = -1,6 \times 10^{-19}$ C. Commenter.

Les valeurs choisies pour I et B sont-elles réalistes ? Le signe des porteurs de charge, s'il est inconnu, peut-il être déterminé dans cette expérience ? Comment ?

I.B.5) L'apparition de matériaux semi-conducteurs comme l'arséniure d'indium InAs a permis d'obtenir des tensions de Hall plus élevées. Pourquoi ? On donne pour $I = 100$ mA, $|V_H| = 126,7$ mV, $n = 1,7 \times 10^{22}$ m⁻³, $b = 0,1$ mm, $a = 1$ cm et $L = 3$ cm. Calculer la valeur du champ \vec{B} . Commenter.

I.B.6) La constante de Hall varie avec la température suivant la loi $R_H(T) = A \exp(\theta/T)$ où θ est une constante homogène à une température, T est la température exprimée en K. Quelles sont les raisons de cette variation ? **le matériau est un semi-conducteur, on se référera au document ci-dessous**

Connaissez-vous d'autres lois, dans d'autres domaines de la physique, similaires à celle-ci ?

Avec θ de l'ordre de 2000 K, calculer la variation relative de la constante de Hall lorsque la température s'élève de 10 K par rapport à la température ambiante prise égale à 300 K.

Quels sont les qualités et les défauts des capteurs à effet Hall ?

Doc 2 : Structure de bande des solides :

Les liaisons assurant la cohérence d'un solide constitué d'un seul élément chimique sont des liaisons de covalence ou des liaisons métalliques. Ces deux types de liaisons correspondent aux deux catégories principales de solides : les isolants et les conducteurs.

Dans un isolant, tous les électrons des couches atomiques externes sont liés. Dans un métal, certains électrons sont libres d'évoluer dans le réseau, assurant ainsi la conduction électrique.

L'énergie des électrons d'un atome est quantifiée. Dans un solide, les interactions entre les atomes font que les niveaux d'énergie se rassemblent et forment des bandes d'énergie : la différence entre les niveaux est si faible que l'on peut considérer que l'énergie évolue de façon continue. Mais, entre différentes bandes d'énergie existe un large domaine d'énergies interdites appelé *gap* (saut en anglais).

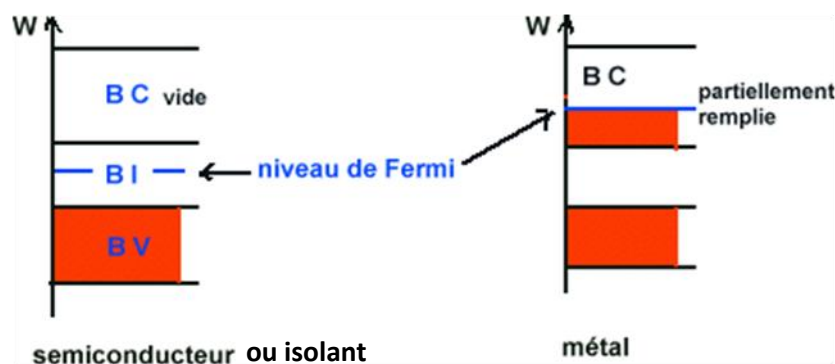


Fig 4 position du niveau de Fermi à $T = 0\text{ K}$ dans le diagramme de bandes

La répartition des électrons sur les niveaux d'énergie satisfait au principe d'exclusion de Pauli et suit une loi de répartition statistique. A basse température (proche de 0 K), seuls les niveaux d'énergie inférieure à une certaine valeur ϵ_f appelée énergie de Fermi sont occupés. La distinction entre isolant et conducteur n'est finalement liée qu'à la position du niveau de Fermi dans le diagramme énergétique des bandes (cf. Fig 4).

Le semi conducteur ne se distingue de l'isolant que par la largeur réduite de sa bande interdite :

	Ge	Si	GaAs	Diamant	Silice
ϵ_g (eV)	0,67	1,14	1,43	5,4	10

Dans un métal, l'influence de la température sur la répartition des électrons reste faible, alors qu'elle est spectaculaire pour un semi conducteur : d'isolant parfait à 0K il devient conducteur à température ambiante. L'énergie nécessaire pour franchir le gap est fournie par l'agitation thermique. L'énergie d'agitation thermique étant de quelques dizaines de meV, à température ambiante, les propriétés semi conductrices ne sont observées que pour des matériaux dont la largeur de bande interdite est faible (autour de 1 eV). Pour de plus grandes largeurs de bande interdite (plusieurs eV) le matériau reste isolant à température ambiante.

Pour les métaux, l'agitation thermique désordonnée va contrarier le déplacement d'ensemble des électrons sous l'effet du champ électrique appliqué, donc la résistivité croît en conséquence.

Problème n°3 – Mécanismes d'une propagation virale et conditions de formation d'un virus

ENS Bio 2022

Cette étude comprend deux parties indépendantes. La première porte sur l'étude des mécanismes physiques dont dépend la propagation d'une infection virale respiratoire telle que celle relative à la pandémie de Covid-19. La seconde s'intéresse aux conditions de formation de virus sur la base de considérations énergétiques.

La première partie n'est pas abordée.

Toutes les données ne sont donc pas utiles.

Dans le sujet initial les calculatrices sont interdites, d'où les approximations numériques.

Formulaire :

Le laplacien scalaire de la fonction scalaire f , en coordonnées sphériques, est :

$$\Delta f = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial f}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial f}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 f}{\partial \varphi^2}$$

On indique aussi que :

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial f}{\partial r} \right) = \frac{1}{r} \frac{\partial^2 (rf)}{\partial r^2}$$

Données numériques :

- Accélération de la pesanteur : $g = 10 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$
- Viscosité dynamique de l'air : $\eta = 2 \times 10^{-5} \text{ Pa}$
- Masse volumique de l'air : $\rho_{air} = 1 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$
- Masse volumique de l'eau : $\rho = 10^3 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$
- Coefficient de diffusion des molécules d'eau dans l'air : $D_w = 2 \times 10^{-5} \text{ m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$
- Concentration de l'air en molécules d'eau (état de vapeur saturante) : $c_{vs} = 10^{24} \text{ m}^{-3}$
- Volume d'une molécule d'eau : $v_w = 10^{-29} \text{ m}^3$
- Nombre : $\pi = 3$

A. Étude des mécanismes physiques dont dépend une propagation virale.

Non traitée.

B. Conditions de formation d'un virus

Un virus est un auto-assemblage de protéines, de lipides et, dans le cas de SARS-CoV-2, d'ARN. Dans cette partie, nous étudierons les conditions qui favorisent cet assemblage, du seul point de vue énergétique.

Il s'agit d'abord de caractériser l'interaction électrostatique² entre les protéines qui composent la coque virale. Cette coque est représentée par une surface³ sphérique de centre O et de rayon R_v . Nous notons : Q la charge électrique totale (positive) qu'elle porte, σ la densité surfacique de charge correspondante supposée uniforme, r la distance entre le centre O et le point M considéré de l'espace, ε la permittivité diélectrique de la solution dans laquelle la coque est immergée. Ce paramètre joue le rôle de ε_0 lorsque le milieu est vide.

18. Montrer que la charge Q portée par la coque crée le potentiel électrostatique V suivant :

$$\begin{cases} V(r) = \frac{\sigma R_v}{\varepsilon} & \text{pour } r \in [0, R_v] \\ V(r) = \frac{\sigma R_v^2}{\varepsilon r} & \text{pour } r \in [R_v, +\infty[\end{cases} \quad (1)$$

Représenter l'allure du graphique de la dépendance de ce potentiel vis-à-vis du rayon r .

19. L'énergie électrostatique de la coque s'exprime par la relation suivante :

$$U_{elec} = \frac{1}{2} Q V(R_v) \quad (2)$$

Exprimer U_{elec} en fonction de σ , ε et R_v .

2. Électrostatique et électrique sont, dans toute cette étude, des termes équivalents.
3. L'épaisseur de la coque est très faible en comparaison à son rayon.

La cohésion des protéines formant la coque du virus résulte d'un équilibre entre répulsion électrostatique, correspondant à l'énergie U_{elec} donnée par l'équation (2), et une attraction par effet hydrophobe. L'énergie associée à cette dernière prend la forme suivante :

$$U_{hp} = -\gamma R_v^2 \quad \text{où} \quad \gamma = \text{Cte} > 0 \quad (3)$$

20. Représenter l'allure graphique de la dépendance de l'énergie totale $U_{tot} = U_{elec} + U_{hp}$ d'un virus vis-à-vis de son rayon R_v . En déduire qu'il existe un rayon privilégié R_v^* que l'on définira et exprimera en fonction de σ , ε et γ .

Jusqu'à présent, nous n'avons pas pris en compte la présence d'espèces ioniques en solution (à l'intérieur et à l'extérieur de la coque virale). Ces ions sont supposés de très petite taille par rapport à celle de la coque virale. La théorie de POISSON-BOLTZMANN permet de considérer leur participation par une approche à la fois électrostatique et statistique. En vertu de l'aspect statistique, les concentrations c_+ et c_- des ions portant respectivement les charges $+e$ ($e > 0$) et $-e$ en solution, dans un potentiel électrostatique $V = V(r)$, s'expriment selon les relations suivantes :

$$c_+(r) = c_\infty \exp\left(\frac{-eV(r)}{k_B T}\right) \quad \text{et} \quad c_-(r) = c_\infty \exp\left(\frac{eV(r)}{k_B T}\right) \quad (4)$$

où k_B désigne la constante de BOLTZMANN, T la température du milieu et c_∞ la concentration (identique pour les cations et les anions) à l'infini où $V \rightarrow 0$. La variable r représente la distance du centre O de la coque virale au point M considéré de l'espace. La figure 3 illustre cette situation.

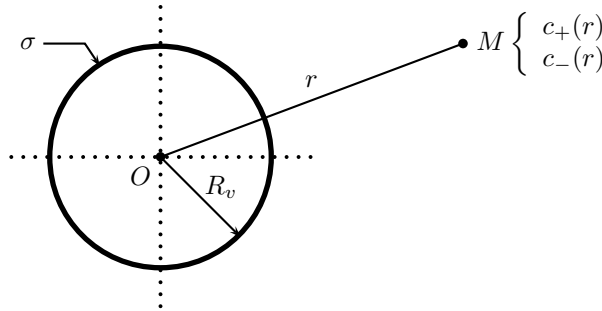


FIGURE 3 – Coque virale dans une solution ionique

21. Montrer que, dans ces conditions, le potentiel électrostatique V vérifie l'équation différentielle suivante :

$$\Delta V = \frac{2ec_\infty}{\varepsilon} \sinh\left(\frac{eV(r)}{k_B T}\right) \quad (5)$$

Indiquer dans quelle limite l'équation différentielle (5) tend vers une équation différentielle linéaire.

22. Nous travaillons dans le cas limite défini à la question précédente. Montrer que l'équation (5) prend la forme suivante :

$$\Delta V(r) = \kappa^2 V(r) \quad (6)$$

Donner l'expression du paramètre κ (défini positif) et préciser sa dimension.

23. Montrer que le potentiel vérifiant l'équation (6) est donné par la forme :

$$V(r) = B \frac{\exp(-\kappa r)}{r} \quad \text{où} \quad B = \text{Cte} \quad (7)$$

Interpréter la dépendance du potentiel vis-à-vis de la distance r , de la présence des espèces ioniques en solution, puis celle de la température.

Le potentiel V défini par les équations suivantes est la solution correspondant à la situation étudiée (charge Q immergée dans une solution ionique) :

$$\begin{cases} V(r) = W \frac{\sinh(\kappa r)}{r} & \text{pour } r \in]0, R_v] \\ V(r) = W \sinh u \frac{\exp(-\kappa(r - R_v))}{r} & \text{pour } r \in [R_v, +\infty[\end{cases} \quad (8)$$

où $W = \frac{Q}{4\pi\epsilon u (\sinh u + \cosh u)}$ et $u = \kappa R_v$.

24. Vérifier que cette solution est cohérente avec celle donnée par l'équation (1) (situation où les espèces ioniques sont absentes).

25. Représenter l'allure graphique de la dépendance du potentiel $V(r)$ donnée par le système d'équation (8) vis-à-vis du rayon.

Données : Les développements limités, à l'ordre 3, et au voisinage de 0, des fonctions cosinus hyperbolique $x \rightarrow \cosh x$ et sinus hyperbolique $x \rightarrow \sinh x$, sont les suivants :

$$\begin{cases} \cosh x = 1 + \frac{x^2}{2} \\ \sinh x = x + \frac{x^3}{6} \end{cases} \quad (9)$$

26. Proposer une représentation, dans un système d'axes commun, de l'allure graphique de la dépendance de chacune des concentrations ioniques c_+ et c_- vis à vis du rayon r . Commenter ces tracés.

27. Nous supposons que l'énergie électrostatique totale $U_{elec,tot}$, c'est-à-dire tenant compte de la présence des ions en solutions, s'exprime toujours selon la relation (2). Exprimer cette énergie en fonction de σ , ϵ , κ et R_v .

28. Indiquer à quelle condition l'énergie électrostatique totale $U_{elec,tot}$ peut s'écrire sous la forme approximative suivante :

$$U_{elec,tot} = \frac{\pi\sigma^2 R_v^2}{\epsilon\kappa} \quad (10)$$

29. Apparaît-il une taille particulière du virus favorisée, comme ce fut le cas dans la situation étudiée dans la question **20**. ? Définir la concentration ionique de seuil c_∞^* au-delà de laquelle les virus se forment. L'exprimer en fonction de σ , ϵ , e , $k_B T$ et γ .

L'ARN viral présent à l'intérieur de la coque protéique modifie l'énergie totale $U_{tot} = U_{tot,elec} + U_{hp}$ en lui apportant une contribution attractive. Celle-ci résulte de l'interaction entre la charge (positive) de la coque et celle (négative) de l'ARN. Nous admettons que cette contribution s'exprime selon la relation suivante :

$$U_{ARN} = -\frac{\pi q \sigma^3 R_v^2}{k_B T \epsilon^2 \kappa^4 \ell^2} \quad (11)$$

où $(-q)$ représente la charge (négative) d'un nucléotide de l'ARN et ℓ sa longueur caractéristique.

30. Établir que la condition de formation du virus, en présence d'ARN, prend la forme suivante :

$$X > 1 - \frac{A}{X^3} \quad \text{où} \quad X = \frac{\kappa}{\kappa^*} \quad \text{et} \quad \kappa^* = \frac{\pi\sigma^2}{\epsilon\gamma} \quad (12)$$

On exprimera la constante positive A en fonction de σ , ϵ , $k_B T$, q , κ^* et ℓ .

31. Traduire graphiquement l'inégalité (12) (on se placera dans le cas où A est assez petit pour que cette inégalité ne se trouve pas satisfaite pour tout X strictement positif). Commenter ce résultat.

32. Pour A assez petit (selon le sens défini à la question précédente), la condition traduite par l'inégalité (12) peut s'écrire sous la forme :

$$X < X^{**} \quad \text{ou} \quad X > X^* \quad (13)$$

En supposant que $A \ll 1$ et en s'aidant du tracé effectué en réponse à la question précédente, établir l'expression approchée de chacun des seuils X^* et X^{**} , en fonction de A .

33. Reproduire le graphe représenté sur la figure 4 et y situer les domaines propices à la formation des virus, d'une part sans tenir compte de la présence d'ARN, d'autre part en la considérant (toujours pour $A \ll 1$).

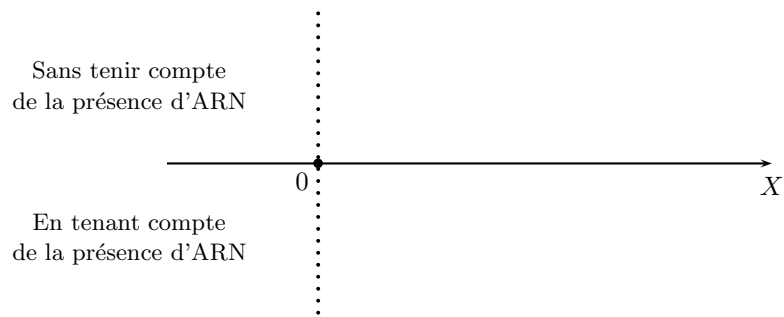


FIGURE 4 – Domaines de formation des virus, selon la valeur du paramètre $X = \kappa/\kappa^*$.