E3A PSI 16

Télémétrie par ultrasons

A. Détecteur à ultrasons

A1. 10 m (portée US) semblent > à 2 m (portée IR)

A2 détecteurs IR : La nature des matériaux n'induit pas de différence de détection, mais un contraste important est nécessaire entre la couleur de l'objet et du fond

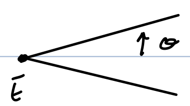
détecteurs US : Les couleurs des matériaux ne modifient pas la détection mais l'état de surface (absorbant surtout) oui.

A3 facteurs perturbants : US : courant d'air brusque / gradient de température

IR : faible contraste entre l'objet et le fond.

A4. domaine audible : $20 < f < 20\,kHz$. US : $f \geq 20\,kHz$, $40\,kHz$ en général

A5. Il s'agit de la diffraction (au niveau de l'émetteur)



$\sin\theta \simeq \frac{\lambda}{a}$ a : dim de l'émetteur

la valeur exacte dépend de la forme de la surface diffractante

or : $\lambda_{US} \simeq 8{,}5\,mm$ à $(40\,kHz)$; $\lambda_{IR} \simeq 900\,nm \ll \lambda_{US}$ } $\theta_{IR} \ll \theta_{US}$ la directivité est donc meilleure en IR.

A6. US : échographies, sonar de sous-marins

IR : caméra thermique, détecteur de présence, télécommandes

B. Célérité de l'onde US.

B1. On a : $PV = nRT \Rightarrow \frac{P}{\mu} = \frac{RT}{M_a} \Rightarrow p_0 + p_1(x,t) = \frac{RT}{M_a}(\mu_0 + \mu_1(x,t))$

donc : $\begin{cases} p_0 = \mu_0 \frac{RT}{M_a} \\ p_1 = \mu_1 RT/M_a \end{cases}$ et $p_1 \ll p_0 \Rightarrow \mu_1 \ll \mu_0$

B_2 $\quad dm(t) = \mu(x,t)\,S\,dx$ et $dm(t+dt) = \mu(x,t+dt)\,S\,dx$

B_3 $\quad \delta m_e = \mu(x,t)\,v_1(x,t)\,dt$ et $\delta m_s = \mu(x+dx,t)\,v_1(x+dx,t)\,dt$

$\simeq \mu_0 v_1(x,t)\,dt\,S \qquad \simeq \mu_0 v_1(x+dx,t)\,dt\,S$ au 1^{er} ordre

B_4. Le bilan de masse s'écrit : $\delta m_e + dm(t) = \delta m_s + dm(t+dt) \Rightarrow d^2m = dm(t+dt) - dm(t) = \delta m_e - \delta m_s$

$$\frac{\partial \mu}{\partial t}\,dt\,S\,dx = -\mu_0\,dt\,\frac{\partial v_1}{\partial x}\,dx\,S \Rightarrow \frac{\partial \mu_1}{\partial t} + \mu_0 \frac{\partial v_1}{\partial x} = 0 \qquad (R_1)$$

B_5. $\quad \mu \dfrac{\partial \vec{v}}{\partial t} = -\overrightarrow{\text{grad}}\,p \xrightarrow{1D} \mu \dfrac{\partial v}{\partial t}\vec{e_x} = -\dfrac{\partial p}{\partial x}\vec{e_x} \xrightarrow[ac]{approx} \mu_0 \dfrac{\partial v_1}{\partial t} = -\dfrac{\partial p_1}{\partial x} \qquad (R_2)$

B_6. la succession de compression / détente créée par l'onde sonore est supposée suffisamment rapide pour que l'évolution soit adiabatique

B_7 $\quad \chi_s = \dfrac{1}{\mu} \left.\dfrac{\partial \mu}{\partial p}\right|_S = \dfrac{1}{\mu}\dfrac{d\mu}{dP}$ car S est cst $\left(\text{si } S = cst,\ d\mu = \dfrac{\partial \mu}{\partial S}dS + \dfrac{\partial \mu}{\partial P}dP = \dfrac{\partial \mu}{\partial P}dP\right)$

$$= \frac{1}{\mu_0 + \mu_1}\frac{\mu_1}{P_1} \simeq \frac{1}{\mu_0}\frac{\mu_1}{P_1} \qquad (R_3)$$

B_8

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \mu_1}{\partial t} + \mu_0 \dfrac{\partial v_1}{\partial x} = 0 \\ \mu_0 \dfrac{\partial v_1}{\partial t} = -\dfrac{\partial p_1}{\partial x} \\ \chi_s = \dfrac{1}{\mu_0}\dfrac{\mu_1}{P_1} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \dfrac{\partial v_1}{\partial x} = -\dfrac{1}{\mu_0}\dfrac{\partial \mu_1}{\partial t} \\ \dfrac{\partial v_1}{\partial t} = -\dfrac{1}{\mu_0}\dfrac{\partial P_1}{\partial x} \\ \mu_1 = \mu_0 \chi_s P_1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \dfrac{\partial v_1}{\partial x} = -\chi_s \dfrac{\partial P_1}{\partial t} \\ \dfrac{\partial v_1}{\partial t} = -\dfrac{1}{\mu_0}\dfrac{\partial P_1}{\partial x} \end{cases}$$

équations de couplage

Il vient : $\dfrac{\partial^2 v_1}{\partial t \partial x} = -\chi_s \dfrac{\partial^2 P_1}{\partial t^2} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{(th. de Schwartz)}}}{\overset{\text{comm}}{=}} \dfrac{\partial^2 v_1}{\partial x \partial t} = -\dfrac{1}{\mu_0}\dfrac{\partial^2 P_1}{\partial x^2} \Rightarrow \boxed{\dfrac{\partial^2 P_1}{\partial x^2} = \overbrace{\mu_0 \chi_s}^{c^{-2}} \dfrac{\partial^2 P_1}{\partial t^2}}$

B_9 $\quad$ On a : $PV^{\gamma} = cst \Rightarrow P\mu^{-\gamma} = cst' \Rightarrow \dfrac{dP}{P} - \gamma\dfrac{d\mu}{\mu} = 0 \Rightarrow \dfrac{P_1}{P_0} = \gamma \dfrac{\mu_1}{\mu_0} \Rightarrow \chi_s = \dfrac{1}{\mu_0}\dfrac{\mu_1}{P_1} = \dfrac{1}{\gamma P_0}$

$$c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \chi_s}} = \sqrt{\frac{\gamma P_0}{\mu_0}} = \sqrt{\gamma \frac{RT}{Ma}}$$

B_{10}. Graphiquement on obtient : $\begin{cases} a \simeq 0{,}58 \text{ m.s}^{-1}.°C^{-1} \\ b = 331 \text{ m.s}^{-1} \end{cases}$

B11 On a donc : $c^2(\theta) = b^2 + 2ab\theta = \frac{\gamma R}{\Pi a}(T_{273} + \theta)$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2ab\theta = \frac{\gamma R}{\Pi a}\theta \\ b^2 = \frac{\gamma R}{\Pi a} T_{273} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} b = \sqrt{\frac{\gamma R T_{273}}{\Pi a}} = c_0 \rightarrow c_0 = 331\ m.s^{-1} \\ a = \frac{1}{2b}\frac{\gamma R}{\Pi a} = \frac{1}{2c_0} \times \frac{c_0^2}{T_{273}} = \frac{c_0}{2T_{273}} \quad \gamma = 1,4 \end{cases}$$

B12 A la ligne 14 du script, on ajoute à 1 liste vide e[ ], N termes de valeur :

$$100 \cdot d_j \left(\frac{c(20°C)}{c(\theta_i)} - 1\right)$$

or l'écart e vaut $e = d_m - d_r = (c(\theta_{ref}) - c(\theta))\Delta t = c(\theta)\left(\frac{c(\theta_{ref})}{c(\theta)} - 1\right)\Delta t$

$$e = d_r\left(\frac{c(\theta_{ref})}{c(\theta)} - 1\right) \qquad \theta_{ref} = 20°C$$

B13. Il y a 1 facteur 100 à ligne 14 ⇒ e est en cm

la liste de températures crées en L7 contient les valeurs : 0, 10, 20 et 30 °C

$e(\theta_4) < 0$ car la vitesse de l'onde est ≥ à celle de référence du robot

donc $\underbrace{d_m}_{\text{mesurée}} < \underbrace{d_r}_{\text{réelle}} \Rightarrow e < 0$

B14. Si $d_r = 1,5\,m$ alors (cf fig 3) $e(30°C) \simeq -2,5\,cm \Rightarrow \mathcal{E}_r = \left|\frac{e}{d_r}\right| = 1,7\%$

l'écart est faible. Sauf à avoir un besoin fort de précision, il semble raisonnable de s'affranchir d'1 capteur de température

C. Réflexion de l'onde ultrasonore

C1. Nous avons montré en cours qu'il y a continuité de la pression à l'interface

$$p_1(0^-, t) = p_2(0^+, t) \Rightarrow \underline{p_i}(0,t) + \underline{p_r}(0,t) = \underline{p_t}(0,t)$$

$$p_{i0} + p_{r0} = p_{t0} \qquad (R_1)$$

C2 De même : $v_1(0^-, t) = v_2(0^+, t) \Rightarrow V_{i0} + V_{r0} = V_{t0} \quad (R_T)$

C3. $(R_T) \Rightarrow 1 + \frac{V_{r0}}{V_{i0}} = \frac{V_{t0}}{V_{i0}} \Rightarrow 1 + r = t$

$(R_4) \Rightarrow 1 + \frac{p_{r0}}{p_{i0}} = \frac{p_{t0}}{p_{i0}} \Rightarrow 1 - \frac{V_{r0}}{V_{i0}} = \frac{z_2}{z_1}\frac{V_{t0}}{V_{i0}} \Rightarrow 1 - r = \frac{z_2}{z_1} t$

$$\Rightarrow \begin{cases} r = \frac{z_1 - z_2}{z_1 + z_2} \\ t = \frac{2 z_1}{z_1 + z_2} \end{cases}$$

C4. Le vecteur de Poynting traduit le déplacement de l'énergie acoustique.

Son flux à travers une surface S vaut la puissance rayonnée à travers celle-ci

$$P_S = \iint_S \vec{\Pi}\cdot\vec{dS} = \langle \vec{\Pi} \rangle \vec{S} \quad , \quad \vec{\Pi} \text{ en } W.m^{-2}$$

C5. $\| \langle \vec{\Pi} \rangle \| = \| \frac{1}{2} \mathrm{Re}(\underline{p}^* \cdot \underline{\vec{v}}) \| = \frac{1}{2} Z v^2 \Rightarrow \| \langle \vec{\Pi}_i \rangle \| = \frac{1}{2} Z_1 v_{i0}^2$ et $\| \langle \vec{\Pi}_t \rangle \| = \frac{1}{2} Z_2 v_{t0}^2$

$\| \langle \vec{\Pi}_r \rangle \| = 1/2\, Z_1 v_{r0}^2$

Il vient : $\boxed{R = r^2 = \left(\frac{Z_1 - Z_2}{Z_1 + Z_2}\right)^2 \text{ et } T = \frac{Z_2}{Z_1} t^2 = \frac{4 Z_1 Z_2}{(Z_1 + Z_2)^2}}$

C6. $R + T = 1$ traduit la conservation de l'énergie acoustique

C7. Les milieux que le robot détectera sont tels que $T \ll R$, ceux tels que $T \simeq 1$ et donc $R \simeq 0$ le seront moins bien.

La condition de mauvaise détection est donc $Z_1 \simeq Z_2$

Le matériau le - bien détecté est donc le polystyrène expansé : $R \simeq 0{,}75$ et $T \simeq 0{,}25$

D. Détection d'un obstacle mobile

D1. On écrit que les solutions étudiées vérifient l'équation de propagation

↳ on obtient donc la relation de dispersion $\boxed{k_i = \frac{\omega_0}{c} \text{ et } k_r = \frac{\omega_r}{c}}$

D2. Il faut donc qu'en $x_p = -Vt$: $\vec{v}_i(x_p, t) + \vec{v}_r(x_p, t) = \vec{0}$

Ce qui donne : $V_{i0}\, e^{j(\omega_0 t - k_i x_p)} + V_{r0}\, e^{j(\omega_r t + k_r x_p)} = 0$ (proj. sur Ox)

$V_{i0}\, e^{j(\omega_0 + k_i V)t} + V_{r0}\, e^{j(\omega_r - k_r V)t} = 0$ (car $x_p = -Vt$)

or $t = 0$ (pas d'onde transmise), donc $r = -1 \Rightarrow V_{r0} = -V_{i0}$ (astuce)

↳ $e^{j(\omega_0 + k_i V)t} = e^{j(\omega_r - k_r V)t} \quad \forall t \Rightarrow \omega_0 + k_i V = \omega_r - k_r V$

D3. En combinant D1 et D2 $\Rightarrow \omega_0 \left(1 + \frac{V}{c}\right) = \omega_r \left(1 - \frac{V}{c}\right) \Rightarrow \boxed{\omega_r = \omega_0 \frac{1 + V/c}{1 - V/c}}$

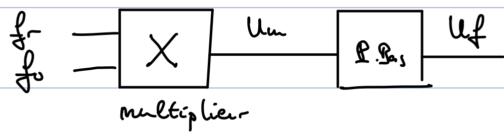
D4 On a : $V/c \ll 1 \Rightarrow \frac{\omega_r}{\omega_0} \simeq (1 + V/c) \times \underbrace{(1 + V/c)}_{DL\ o(1)} = (1 + V/c)^2 \simeq \underbrace{1 + 2V/c}_{DL\ o(1)}$ cqfd.

Rem : attent° à ne pas ≪ v/c devant 1 au numérateur (DL $o(v)$) et garder v/c au dénominateur, les DL doivent être menés au même ordre partout !

D5. Le robot perçoit un signal de fréquence : $f_r = f_0\left(1+\frac{2v}{c}\right)$

par X par f_0, le spectre obtenu est f_r+f_0, $f_r-f_0 = 2f_0\frac{v}{c}$

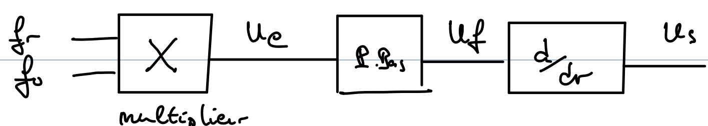
Il faut donc extraire par un filtre passe-bas la fréquence f_r-f_0.



$u_m(t) = k u_0 u_r \cos(\omega_0 t)\cos(\omega_r t+\varphi) = \frac{1}{2} k u_0 u_r\left[\cos((\omega_0+\omega_r)t+\varphi) + \cos((\omega_r-\omega_0)t+\varphi)\right]$

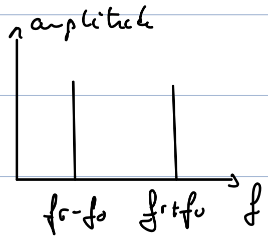
$u_f = \frac{k}{2} u_0 u_r \underbrace{H_0}_{\text{du filtre}} \cos\left(\left(2\omega_0\frac{v}{c}\right)t+\varphi\right)$

Il faut donc dériver u_f pour que l'amplitude soit ∝ à v



$u_s = \underbrace{\omega_0 u_0 u_r H_0 \frac{v}{c}}_{\propto v} \sin\left(\frac{2\omega_0 v t}{c}+\varphi'\right)$

D6. cf D5 (début)



D7. Le sujet se répète. cf D5. Il faut : $\omega_r-\omega_0 < \omega_c \ll \omega_r+\omega_0$

$1.5 \cdot 10^3 < \omega_c \ll 5\cdot 10^5 \ \mathrm{rad.s^{-1}}$

D8. L'étude asymptotique (HF, BF) montre que seul le filtre 2 est 1 passe bas

(1 est 1 P haut, 3 est 1 passe bande)

D9 : $\underline{H}_2 = \frac{Z_C}{Z_C+R} = \frac{1}{1+jRC\omega} = \frac{1}{1+jx}$ avec $x = \frac{\omega}{\omega_0}$, $\omega_0 = 1/RC = \omega_c$

D10. Un passe bas d'ordre 1 atténue en HF d'1 facteur 10 par décades (cf cours)

Il faut donc 2 décades ⇒ $\omega_c = 5 \cdot 10^3 \ \mathrm{rad.s^{-1}}$ ⇒ $H(\omega_r-\omega_0) = 0.96$ → pas d'atténuat°

Mines Ponts PSI Physique 1, extrait :

□ - 1.

On peut estimer le nombre total N_0 de caractères à coder, à $N_0 = 32 + 10 + 5 = 47$, la puissance de deux directement supérieur à N_0 est $64 = 2^6$, il faut 6 bits pour coder tous les caractères voulus.

Chaque ligne comporte environ 10^2 caractères en ordre de grandeur, et il y a 5.10^1 lignes environ dans une page.

Au total le codage d'une page nécessite de coder environ 5.10^3 caractères, il faut donc à l'opérateur environ 10^4 secondes, comme une heure totalise 3600 secondes, il faut un peu moins de 3 heures pour coder la page.

□ - 2.

Les termes d'une somme étant nécessairement homogène, on déduit des équations fournies :

$$\begin{cases} -1- \quad \left[\dfrac{R_0}{\chi_0}\right] = \dfrac{Ut}{IL} \\[2ex] -2- \quad \left[\dfrac{R_0}{\ell_0}\right] = \dfrac{U}{IL} \\[2ex] -3- \quad \left[R_0\chi_0\right] = \dfrac{UL}{It} \end{cases}$$

On déduit, en multipliant terme à terme $-1-$ et $-3-$: $\left[R_0^2\right] = \left(\dfrac{U}{I}\right)^2$, donc l'unité usuelle de R_0 est l'"ohm".

Puis avec $-2-$, l'unité de ℓ_0 est le "mètre".

Enfin de $-3-$ on déduit $\left[\chi_0\right] = \dfrac{L}{t}$, l'unité de χ_0 est celle d'une vitesse donc "mètre par seconde".

□ - 3.

Le modèle reste valable dans la mesure où le circuit électrique est effectivement fermé en passant par la Terre.

□ - 4.

On commence par dériver partiellement par rapport à z les deux membres de la première équation couplée :

$$\frac{\partial}{\partial z}\left(-\frac{\partial u}{\partial z}\right) = \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{R_0}{\chi_0}\frac{\partial i}{\partial t} + \frac{R_0}{\ell_0} i\right)$$

$$-\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \frac{R_0}{\chi_0}\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial i}{\partial z}\right) + \frac{R_0}{\ell_0}\frac{\partial i}{\partial z} \quad \text{en inversant l'ordre de dérivation de i par rapport à z et t}$$

On obtient ainsi l'équation de propagation :

$$\boxed{\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \frac{1}{\chi_0^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \frac{1}{\chi_0\ell_0}\frac{\partial u}{\partial t}} \quad \text{en utilisant la deuxième équation couplée}$$

L'énoncé fait référence à un vecteur d'onde $\overrightarrow{k}$, qui se révèlera être complexe, la notation est donc peu claire.
(Il y a ici, beaucoup d'implicite...)
De plus le vecteur d'onde complexe, $\overrightarrow{k} = \overline{k}\overrightarrow{e_z}$, intervient dans l'expression de la tension complexe non donnée $\overline{u}(z,t)$:

$$\overline{u}(z,t) = U_0 \exp\left(j\left(\omega t - \overrightarrow{k}\cdot\overrightarrow{OM}\right)\right),$$

soit, puisque dans le milieu unidimensionnel que constitue la ligne, $\overrightarrow{OM} = z\overrightarrow{e_z}$:

$$\overline{u}(z,t) = U_0 \exp\left(j\left(\omega t - \overline{k}z\right)\right).$$

L'équation de dispersion se déduit de l'équation de propagation en y remplaçant $\overline{u}$ par son expression, comme celle-ci est linéaire, en simplifiant par $\exp\left(j\left(\omega t - \overline{k}z\right)\right)$, on obtient :

$$\boxed{-\overline{k}^2 = \frac{-\omega^2}{\chi_0^2} + \frac{j\omega}{\chi_0\ell_0}}.$$

Remarque : On peut écrire cette relation de dispersion en remplaçant $\overline{k}$ par $\overrightarrow{k}$.

☐ - **5.**

L'équation de dispersion montre que $\overline{k}$ est complexe, puisque ω est réel.

$$\overline{k}^2 = \frac{\omega^2}{\chi_0^2}\left(1 - \frac{j\chi_0}{\omega\ell_0}\right)$$

le terme correspondant à la limitation de la propagation est : $\dfrac{j\chi_0}{\omega\ell_0}$

$$\overline{k} = \frac{\omega}{\chi_0}\left(1 - \frac{j\chi_0}{\omega\ell_0}\right)^{1/2}$$

soit, à l'ordre 1 par rapport au terme limitant :

$$\overline{k} = \frac{\omega}{\chi_0}\left(1 - \frac{1}{2}\frac{j\chi_0}{\omega\ell_0}\right)$$

$$\boxed{\overline{k} = \frac{\omega}{\chi_0} - \frac{j}{2\ell_0}}$$

Lorsque le vecteur d'onde est complexe, $\overline{k} = k_1 + jk_2$, k_1 et k_2 étant respectivement les parties réelle et imaginaire de $\overline{k}$.
La vitesse de phase est définie par :

$$v_\varphi = \frac{\omega}{k_1}.$$

Dans le cas de $\overline{k} = \dfrac{\omega}{\chi_0} - \dfrac{j}{2\ell_0}$, on identifie $k_1 = \dfrac{\omega}{\chi_0}$, donc la vitesse de phase est :

$$\boxed{v_\varphi = \chi_0}.$$

Ainsi, à cet ordre de développement, il n'y a pas de dispersion, puisque la vitesse de phase ne dépend pas de la fréquence de l'onde.

☐ - **6.**

La puissance électrique instantanée transportée par la ligne est définie par :

$$p(z,t) = u(z,t)\, i(z,t),$$

et $\mathscr{P}_m = \dfrac{1}{T}\int_0^T p\,\mathrm{d}t$.
On cherche $u(z,t)$ et $i(z,t)$.
Comme le vecteur d'onde est complexe, on commence par exprimer $\overline{u}(z,t)$ et $\overline{i}(z,t)$.

$$\overline{u}(z,t) = \overline{u}\left(0, t - \frac{\overline{k}}{\omega}z\right) \quad \text{l'onde en } z \text{ se déduit de l'onde en } z = 0$$

$$\overline{u}(z,t) = U_0 \exp\left(j\left(\omega t - \overline{k}z\right)\right)$$

$$\boxed{u(z,t) = U_0 \exp\left(\frac{-z}{2\ell_0}\right)\cos\left(\omega t - \frac{\omega}{\chi_0}z\right)}$$

Pour l'expression de $\overline{i}$, on part d'une équation couplée :

$$\frac{\partial \overline{i}}{\partial z} = \frac{-1}{R_0\chi_0}\frac{\partial \overline{u}}{\partial t}$$

$$\frac{\partial \overline{i}}{\partial z} = \frac{-j\omega}{R_0\chi_0}\overline{u}$$ soit, en intégrant par rapport à z :

$$\overline{i} = \frac{j\omega}{j\overline{k}R_0\chi_0}\overline{u} + f(t)$$

$f(t)$ est nécessairement nul,

puisqu'une fonction du temps seulement ne peut pas représenter une onde.

Avec $\phi_{\overline{k}} = Arg\left(\overline{k}\right)$, en prenant la partie réelle de $\overline{i}$, on déduit $i(z,t)$:

$$\boxed{i(z,t) = \frac{\omega U_0}{|\overline{k}|R_0\chi_0}\exp\left(\frac{-z}{2\ell_0}\right)\cos\left(\omega t - \frac{\omega}{\chi_0}z - \phi_{\overline{k}}\right)}$$

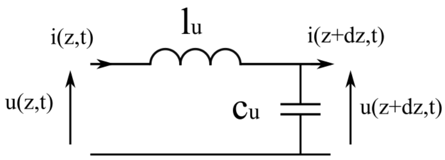
Avec les expressions obtenues pour u et i, il vient immédiatement que :

$$\mathscr{P}_m = \mathscr{P}_{m_0}\exp\left(\frac{-z}{\ell_0}\right).$$

La distance caractéristique d'atténuation de la puissance transmise est ℓ_0.

Remarque :à l'ordre 1 par rapport à la perturbation, $|\overline{k}| = \dfrac{\omega}{\chi_0}$, et on peut préciser, bien que cela ne soit pas demandé, l'expression de $\mathscr{P}_{m0} = \dfrac{U_0^2}{2R_0}$.

□ - **7.**



Voir le cours...qui établit les équations couplées :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial z} = -\ell_u\dfrac{\partial i}{\partial t} \\[2ex] \dfrac{\partial i}{\partial z} = -c_u\dfrac{\partial u}{\partial t} \end{cases}$$

En combinant ces deux équations on obtient l'équation de d'Alembert :

$$\boxed{\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \ell_u c_u \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}}.$$

On identifie donc la célérité des ondes sur le câble coaxial sans pertes :

$$\boxed{c = \frac{1}{\sqrt{\ell_u c_u}}}$$

□ - **8.**

L'application numérique donne : $c = 2{,}4.10^8\ \mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$.

Le délai donné dans la fiche technique est en "temps par distance", son inverse correspond donc à la célérité des ondes, soit $\frac{1}{4} = 0{,}25\ \mathrm{m{\cdot}ns^{-1}} = 2{,}5.10^8\ \mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$.

La célérité correspond bien à l'inverse du délai.

□ - **9.**

L'impédance caractéristique Z_0 du câble est définie par :

$$Z_0 = \frac{u^+}{i^+},$$

où u^+ et i^+ sont les ondes strictement progressives, respectivement de tension et de courant sur le câble.

On déterminer Z_0 à l'aide d'une des deux équations couplées.

Considérons les représentations complexes d'ondes progressives sinusoïdales :

$$\overline{u}^+ = \overline{U}_0 \exp\left(j\left(\omega t - kz\right)\right) \quad \text{et} \quad \overline{i}^+ = \overline{I}_0 \exp\left(j\left(\omega t - kz\right)\right)$$

dans la première équation couplée :

$$\frac{\partial \overline{u}^+}{\partial z} = -\ell_u \frac{\partial \overline{i}^+}{\partial t}$$

$$-jk\overline{u}^+ = -\ell_u j\omega \overline{i}^+$$

$$\frac{\overline{u}^+}{\overline{i}^+} = \frac{\ell_u \omega}{k}$$

finalement :

$$\boxed{Z_0 = \ell_u c = \sqrt{\frac{\ell_u}{c_u}}}$$

La valeur numérique de Z_0 est : $Z_0 = 78\ \Omega$. On remarque une légère différence entre Z_0 et l'impédance du câble, égale à $75\ \Omega$ dans la documentation.

□ - **10.**

En utilisant l'impédance caractéristique, l'expression de $\overline{i}^+$ est :

$$\overline{i}^+ = \frac{\overline{U}^+}{Z_0} \exp\left(j\left(\omega t - kz\right)\right).$$

Pour établir les expressions des ondes de tension et de courant réfléchies, on écrit la condition limite sur l'impédance $\overline{Z_e}$, en $z = 0$:

$$\overline{u}^+(0,t) + \overline{u}^-(0,t) = \overline{Z}_e \left(\overline{i}^+(0,t) + \overline{i}^-(0,t)\right)$$

$$\overline{u}^+(0,t) + \overline{u}^-(0,t) = \frac{\overline{Z}_e}{Z_0} \left(\overline{u}^+(0,t) - \overline{u}^-(0,t)\right)$$

$$\overline{u}^-(0,t) \left(1 + \frac{\overline{Z}_e}{Z_0}\right) = \overline{u}^+(0,t) \left(-1 + \frac{\overline{Z}_e}{Z_0}\right)$$

On en déduit l'onde de tension réfléchie en (z,t) :

$$\boxed{\overline{u}^-(z,t) = \frac{\overline{Z}_e - Z_0}{\overline{Z}_e + Z_0} \overline{U}^+ \exp\left(j\left(\omega t + kz\right)\right)}$$

et

$$\boxed{\overline{i}^{\,-}(z,t) = \frac{\overline{Z}_e - Z_0}{-Z_0\left(\overline{Z}_e + Z_0\right)}\overline{U}^{\,+}\exp\left(j\left(\omega t + kz\right)\right)}.$$

☐ - **11.**

L'onde de tension résultant de la superposition de l'onde incidente et de l'onde réfléchie est :

$$\overline{u}(z,t) = \overline{u}^{\,+}(z,t) + \overline{u}^{\,-}(z,t)$$

$$\overline{u}(z,t) = \overline{U}^{\,+}\exp\left(j\left(\omega t - kz\right)\right) + \frac{\overline{Z}_e - Z_0}{\overline{Z}_e + Z_0}\overline{U}^{\,+}\exp\left(j\left(\omega t + kz\right)\right)$$

$$\overline{u}(z,t) = \overline{U}^{\,+}\exp\left(j\omega t\right)\left[\exp\left(-jkz\right) + \frac{\overline{Z}_e - Z_0}{\overline{Z}_e + Z_0}\exp\left(jkz\right)\right]$$

dans l'onde incidente on remplace 1 dans le terme facteur de $\exp\left(-jkz\right)$ par : $\dfrac{2Z_0}{\overline{Z}_e + Z_0} + \dfrac{\overline{Z}_e - Z_0}{\overline{Z}_e + Z_0}$

$$\overline{u}(z,t) = \frac{2Z_0}{\overline{Z}_e + Z_0}\overline{U}^{\,+}\exp\left(j\left(\omega t - kz\right)\right) + \frac{\overline{Z}_e - Z_0}{\overline{Z}_e + Z_0}\overline{U}^{\,+}\exp\left(j\omega t\right)\left(\exp\left(-jkz\right) + \exp\left(+jkz\right)\right)$$

Sur cette dernière expression, l'onde de tension est la somme d'une onde progressive incidente et d'une onde stationnaire, dont les amplitudes respectives sont :

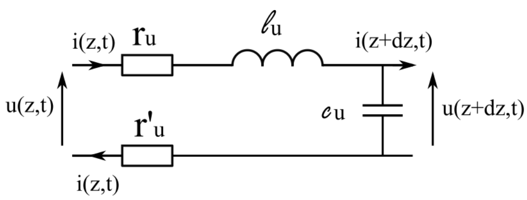
$$U_p = |\frac{2Z_0}{\overline{Z}_e + Z_0}\overline{U}^{\,+}| \quad \text{et} \quad U_s = 2|\frac{\overline{Z}_e - Z_0}{\overline{Z}_e + Z_0}\overline{U}^{\,+}|,$$

on en déduit :

$$\boxed{\rho = \frac{|\overline{Z}_e - Z_0|}{Z_0}},$$

on constate que $\rho = 0$ si $\overline{Z}_e - Z_0 = 0$, c'est à dire que $\boxed{\overline{Z}_e = Z_0}$

☐ - **12.**



On établit les équations couplées, en écrivant la loi des nœuds (LDN) et la loi des mailles (LDM) :

$$\begin{cases} \text{LDM} : u(z,t) = l_u \mathrm{d}z\dfrac{\partial i}{\partial t} + r_u \mathrm{d}z\, i(z,t) + u(z+\mathrm{d}z,t) + r'_u \mathrm{d}z\, i(z,t) \\ \text{LDN} : i(z,t) = c_u \mathrm{d}z\dfrac{\partial u}{\partial t}(z+\mathrm{d}z) + i(z+\mathrm{d}z,t) \end{cases}$$

soit, en se limitant à l'ordre 1 en $\mathrm{d}z$:

$$\begin{cases} -\dfrac{\partial u}{\partial z}\mathrm{d}z = l_u \mathrm{d}z\dfrac{\partial i}{\partial t} + \left(r_u + r'_u\right)\mathrm{d}z\, i(z,t) \\ -\dfrac{\partial i}{\partial z}\mathrm{d}z = c_u \mathrm{d}z\dfrac{\partial u}{\partial t}(z,t) \end{cases}$$

enfin, en simplifiant par dz :

$$\left\{\begin{array}{l} -\dfrac{\partial u}{\partial z} = l_u \dfrac{\partial i}{\partial t} + \left(r_u + r'_u\right) i\,(z,t) \\ \\ -\dfrac{\partial i}{\partial z} = c_u \dfrac{\partial u}{\partial t}\,(z,t) \end{array}\right.$$

En combinant les équations couplées on déduit l'équation de propagation :

$$\boxed{\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = l_u c_u \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \left(r_u + r'_u\right) c_u \frac{\partial u}{\partial t}}.$$

Pour identifier la distance d'atténuation, on peut remarquer que l'équation de propagation obtenue dans le cas du câble coaxial avec résistance propre du cœur et de la gaine est analogue à l'équation aux dérivées partielles obtenue à la question 4 : $\dfrac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \dfrac{1}{\chi_0^2}\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \dfrac{1}{\chi_0 \ell_0}\dfrac{\partial u}{\partial t}$.

Ainsi on identifie :

- la célérité χ'_0 sur le câble coaxial : $\chi'_0 = \dfrac{1}{\sqrt{l_u c_u}}$
- la longueur $2l'_0$ d'atténuation de l'amplitude des ondes, avec : $l'_0 = \dfrac{1}{\chi_0 c_u \left(r_u + r'_u\right)}$,

La distance d'atténuation est donc :

$$\boxed{2l'_0 = 2\frac{\sqrt{\dfrac{l_u}{c_u}}}{\left(r_u + r'_u\right)} = \frac{2Z_0}{\left(r_u + r'_u\right)}}$$

On peut remarquer que cette expression est cohérente, en effet si $\left(r_u + r'_u\right) = 0$, c'est à dire si le câble était sans pertes, la distance caractéristique serait infinie, il n'y aurait pas d'atténuation, et inversement si la résistance était infinie, la distance d'atténuation serait nulle.

□ - 13.

L'application numérique donne, pour le câble Belden 8213, une distance d'atténuation $2l'_0 = 1{,}3.10^4$ m.

Cette distance montre qu'un tel câble peut être utilisé tel quel pour une distance très inférieure à $2l'_0$, donc impossible pour traverser l'atlantique. Pour des distance plus grandes, il faut insérer des amplificateurs de signaux.

À très haute fréquence, l'effet de peau réduit la section utile du câble et augmente la résistance linéique, ainsi la distance d'atténuation diminue avec la fréquence.

□ - 14.

Ici on considère les câbles sans résistance interne, à cause de leur faible longueur.

L'énoncé dit que les décodeurs D et D' sont adaptés aux câbles, cela signifie que vus des câbles qui les déservent, ils apparaissent comme des impédances caractéristiques, donc il n'y a pas d'onde réfléchie sur ces deux câbles.

Par contre en $z < 0$, le câble est relié à deux autres câbles qui apparaissent en parallèle, donc le branchement équivaut à deux impédance Z_0 en parallèles, c'est à dire une impédance équivalente égale à $Z_0/2$. Donc il y a une onde réfléchie.

Pour le montrer, on écrit les conditions limites en $z = 0$:

$$\left\{\begin{array}{l} u_i\,(0,t) + u_r\,(0,t) = u_t\,(0,t) \\ \\ i_i\,(0,t) + i_r\,(0,t) = 2i_t\,(0,t) \end{array}\right.$$

soit :

$$\left\{\begin{array}{l} u_i\,(0,t) + u_r\,(0,t) = u_t\,(0,t) \\ \\ \dfrac{1}{Z_0}\left(u_i\,(0,t) - u_r\,(0,t)\right) = \dfrac{2}{Z_0} u_t\,(0,t) \end{array}\right.$$

en éliminant u_t, on obtient :

$$u_i\,(0,t) - u_r\,(0,t) = 2\left(u_i\,(0,t) + u_r\,(0,t)\right),$$

soit

$$u_r\,(0,t) = \frac{-1}{3} u_i\,(0,t),$$

donc l'amplitude, qui correspond à la valeur maximale, donc positive, de l'onde réfléchie est égale à $\dfrac{U_0}{3}$.

☐ - **15.**

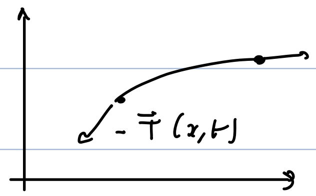
L'amplitude de l'onde transmise, au niveau de $z = 0$ est $u_t(0,t) = U_0 - \dfrac{U_0}{3} = \dfrac{2U_0}{3}$.

En effet, en mesurant l'amplitude de l'onde au niveau du décodeur, on mesure une tension plus faible que ce qu'elle devrait être, à savoir $\dfrac{2U_0}{3}$ au lieu de U_0, cela permet de déceler la présence d'une installation frauduleuse.

La mesure de ρ doit aussi permettre d'identifier la présence d'une dérivation en $z = 0$, mais comment accède-t-on à la mesure de U_s et U_p...?

III. Produire de la musique

15. $\mathcal{S} = \{$ port° du fil, longueur $ds \}$



$ds = \sqrt{dx^2 + dz^2} = dx \sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2} \simeq dx$

approximat° géométriques

$\cos(\alpha(x,t)) = dx/ds \simeq 1$

$\sin(\alpha(x,t)) = \partial z/\partial x$

En project° sur Ox on obtient : $0 = -T_x(x,t) + T_x(x+dx,t)$

mouvem^t selon Oz $\Rightarrow T_x(x,t)$ ne dépend pas de x

par ailleurs : $T_x(x,t) = T\cos\alpha \simeq T$; T ne dépend pas de $x \Rightarrow$ uniforme $\}$ constante

rem : on néglige la dépendance temporelle de $T \Rightarrow$ stationnaire

16. En project° sur Oz : $dm \frac{\partial^2 z}{\partial t^2} = \mu ds \frac{\partial^2 z}{\partial t^2} = T_z(x+dx,t) - T_z(x,t)$

$$\mu dx \frac{\partial^2 z}{\partial t^2} = T\,(\underbrace{\sin\alpha(x+dx,t) - \sin\alpha(x,t)}_{\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}dx})$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial t^2} = \frac{T}{\mu}\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \quad \text{et} \quad c = \sqrt{T/\mu}$$ vitesse de propagat° de la déformation verticale

17. $f(x-ct) \rightarrow \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = c^2 f''$; $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = f'' \rightarrow c^2 f'' = c^2 f''$ ✓

de même pour $g(x+ct)$

$f(x-ct)$ est 1 onde plane progressive, $g(x+ct)$ est 1 OP régressive

18. la corde étant fixée, on a : $z(x=0,t) = z(x=L,t) = 0$

Il vient : $A+B=0 \Rightarrow B=-A$; $z(x,t) = A\left(e^{j(\omega t-kx)} - e^{j(\omega t+kx)}\right)$

en $x=L$: $e^{-jkL} - e^{jkL} = 0 \Rightarrow \sin(kL) = 0 \Rightarrow k_n L = n\pi \Rightarrow \omega_n = \frac{n\pi c}{L}$

$z_n(x,t) = -Ae^{j\omega t}\left(e^{jk_n x} - e^{-jk_n x}\right) = -2Ai\,e^{j\omega t}\sin(k_n x)$

$z_n(x,t) = 2A\sin(\omega t + \varphi_n)\sin(kx) \Rightarrow$ découplage spatio-temporel : ondes stationnaires

19. On a : $\omega_n = \frac{n\pi c}{\ell} = 2\pi f_n \Rightarrow f_1 = \frac{c}{2\ell} = \frac{1}{2\ell}\sqrt{\frac{T_0}{\mu}} \Rightarrow T_0 = 4\ell^2 f_1^2 \mu \Rightarrow T = 20N$

$T > T_e$: le déformation n'est plus élastique

20. relat° de dispers°

$$\mu \frac{\partial^2 z}{\partial t^2} - T\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + E\frac{\pi a^4}{4}\frac{\partial^4 z}{\partial x^4} = 0 \xrightarrow[\text{solut°}]{\text{OPPM}} \mu(j\omega)^2 - T(-jk)^2 + E\frac{\pi a^4}{4}(-jk)^4 = 0$$

$$-\omega^2\mu + Tk^2 + E\frac{\pi a^4}{4}k^4 = 0$$

par ailleurs les modes propres vérifient $k_n = n\pi/\ell$

Il vient : $\mu\omega_n^2 = T\frac{n^2\pi^2}{\ell^2} + En^4\frac{\pi}{4}\frac{\pi^4 a^4}{\ell^4} \rightarrow \omega_n = 2\pi f_n = n\sqrt{\frac{c^2\pi^2}{\ell^2} + \frac{En^2\pi^5 a^4}{\mu 4\ell^4}}$

$$f_n = \frac{nc}{2\ell}\sqrt{1 + \frac{E\pi^3 a^4}{4c^2\ell^2\mu}n^2}$$

$$B = \frac{\pi^3 a^4}{4c^2\ell^2}\frac{E}{\mu} = \frac{a^4\pi^3}{4\ell^2}\frac{E}{T}$$

Il vient : $\frac{B_{ar}}{B_{cl}} = \frac{E_{ar}a_{ar}^4}{E_{cl}a_{cl}^4} > 1$ donc $f_{1,ar} > f_{1,cl} \Rightarrow$ le son est + aigu

Rem : (pour les musiciens) à hautes fréquences le terme Bn^2 devient important, et le son n'est plus harmonique car f_n n'est plus multiple du fondamental, et ce pour les 2 types de cordes.