

Sujet 1: E3a Psi, 2016, épreuve de modélisation (extrait)

« Un robot est une machine équipée de capacités de perception, de décision et d'action qui lui permettent d'agir de manière autonome dans son environnement en fonction de la perception qu'il en a. » David Filliat – ENSTA ParisTech

La robotique est donc un très bon exemple de domaine pluridisciplinaire qui implique de nombreuses thématiques. Le but de ce problème est **d'étudier quelques caractéristiques d'un robot autonome**. Il comporte deux volets : le premier étudie les propriétés de la télémétrie par ultrasons et le second a pour but de déterminer les principaux paramètres physiques du moteur qui alimente le robot.

PREMIERE PARTIE TÉLÉMÉTRIE PAR ULTRASONS

A / DÉTECTEUR À ULTRASONS

La recherche du maximum d'information sur l'environnement est une quête perpétuelle en robotique.

Pour se faire, la télémétrie, qui consiste à mesurer des distances, est extrêmement importante. Elle permet au robot de déterminer la position des obstacles (ou leur absence) et ainsi de prendre la décision adéquate.

Dans un premier temps, on compare à l'aide du Cahier Technique suivant deux types de télémétrie.

Les différentes technologies de détecteurs

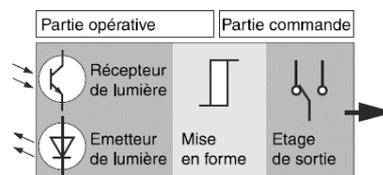
A. Les détecteurs photoélectriques

Leur principe les rend aptes à détecter tous types d'objets, qu'ils soient opaques, réfléchissants ou même quasi-transparents.

Principe : Une diode électroluminescente (LED) émet des impulsions lumineuses, généralement dans l'infrarouge proche (850 à 950 nm). Cette lumière est reçue ou non par une photodiode ou un phototransistor en fonction de la présence ou l'absence d'un objet à étudier.

Il existe différents systèmes de détection, le système à réflexion directe (sur l'objet) consiste par exemple, à utiliser la réflexion directe (diffuse) de l'objet à détecter.

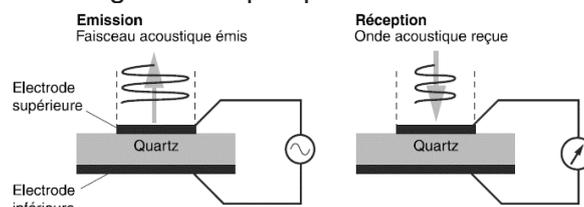
Points faibles : la distance de détection de ce système est faible (jusqu'à 2 m). De plus elle varie avec la couleur de l'objet à « voir » et du fond dans lequel il se trouve (pour un réglage donné, la distance de détection est plus grande pour un objet blanc que pour un objet gris ou noir) et un arrière-plan plus clair que l'objet à détecter peut rendre le système inopérant.



Principe d'un détecteur photoélectrique

B. Les détecteurs à ultrasons

Les ultrasons sont produits électriquement à l'aide d'un transducteur électroacoustique (effet piézoélectrique) qui convertit l'énergie électrique qui lui est fournie en vibrations mécaniques.



Principe d'un transducteur électroacoustique

Le principe est de mesurer le temps de propagation entre le capteur et la cible. L'avantage des capteurs ultrasons est de pouvoir fonctionner à grande distance (jusqu'à 10 m), mais surtout d'être capable de détecter tout objet réfléchissant le son indépendamment de la forme et de la couleur.

Facteurs d'influence : les détecteurs à ultrasons sont particulièrement adaptés à la détection d'objet dur et présentant une surface plane et perpendiculaire à l'axe de détection. Cependant le fonctionnement du détecteur à ultrasons peut être perturbé par différents facteurs :

- Les courants d'air brusques et de forte intensité peuvent accélérer ou dévier l'onde acoustique.
- Les gradients de température importants dans le domaine de détection : une forte chaleur dégagée par un objet crée des zones de température différentes qui modifient le temps de propagation de l'onde et empêchent une détection fiable.
- Les isolants phoniques : les matériaux tels le coton, les tissus, le caoutchouc, absorbent le son.
- L'angle entre la face de l'objet à détecter et l'axe de référence du détecteur.

Cahier Technique Schneider Electric n°209

Pour choisir la solution la plus adaptée à l'utilisation du robot autonome, on choisit de présenter les principaux avantages et inconvénients des deux solutions dans un tableau.

	Ultrason	Infrarouge
Portée	<i>Abordé dans la question A1</i>	<i>Abordé dans la question A1</i>
Nature des matériaux compatibles	<i>Abordé dans la question A2</i>	<i>Abordé dans la question A2</i>
Facteurs d'influence	<i>Abordé dans la question A3</i>	<i>Abordé dans la question A3</i>
Directivité	<i>Les ultrasons sont très évasifs (cône d'émission large d'environ 30°), ce qui peut être un avantage (détection d'obstacle rapprochée) ou un inconvénient (détection d'obstacles sur les côtés alors que la route en face est dégagée).</i>	<i>La directivité est très précise (cône d'émission d'environ 5°).</i>
Coût	<i>Quelques dizaines d'euros</i>	<i>Quelques dizaines d'euros</i>

A1. À l'aide des informations apportées par ce Cahier Technique, comparer les portées de ces deux détecteurs.

A2. Comparer les capacités de détection des deux capteurs en fonction de la nature du matériau et de la couleur de l'obstacle.

A3. Relever au moins un facteur d'influence perturbant la détection par ultrasons et un perturbant la détection par infrarouges.

Pour produire les ultrasons, on utilise l'effet piézoélectrique inverse que possède une lame de quartz. Si ses deux faces sont soumises à une tension alternative de haute fréquence f_0 , soit $u_0(t) = U_0 \cos(2\pi f_0 t)$, elle se met à vibrer à la même fréquence f_0 , ce qui engendre une onde ultrasonore dans le milieu environnant.

A4. Pour obtenir des ultrasons, donner l'ordre de grandeur caractéristique de la fréquence f_0 de la tension alternative à laquelle il faut soumettre la lame de quartz. On précisera les limites du domaine des fréquences des signaux acoustiques audibles par l'homme.

A5. Quel est le nom du phénomène physique à l'origine de l'élargissement des ondes émises ? Dans le tableau, ce phénomène est caractérisé par le cône d'émission. Quelle(s) est (sont) le(s) grandeur(s) physique(s) qui permettent d'expliquer l'écart entre les cônes d'émission ?

A6. Nommer un autre exemple d'utilisation de détecteurs par ultrasons, ainsi qu'un autre exemple d'utilisation de détecteurs infrarouges.

Tournez la page S.V.P.

Dans toute la suite de la première partie sur la télémétrie, on considère que le détecteur par ultrasons a été choisi et on cherche à comprendre les facteurs perturbant le fonctionnement du détecteur à ultrasons. Dans la sous-partie **B**, on étudie pourquoi « les forts gradients de température [...] empêchent une détection fiable » ; puis on s'intéresse, dans la sous-partie **C**, au problème « des isolants phoniques » et pour finir, on analyse le problème de la détection d'obstacles mobiles dans la sous-partie **D**.

B / CÉLÉRITÉ DE L'ONDE ULTRASONORE

On étudie la propagation d'une onde ultrasonore produite dans l'air.

L'air est assimilé à un gaz parfait, initialement au repos de vitesse $\vec{v}_0 = \vec{0}$, et qui en l'absence de toute perturbation possède une masse volumique μ_0 , une pression P_0 et à une température T_0 .

On suppose que la lame de quartz, positionnée à l'abscisse $x = 0$, transmet ses vibrations aux couches d'air environnantes et crée ainsi une onde ultrasonore sinusoïdale de fréquence f_0 se propageant suivant $(0, \vec{e}_x)$ à la célérité c .

Le passage de l'onde perturbe l'équilibre.

En un point M de l'air d'abscisse x , à l'instant t , on note ainsi :

- $p(x, t)$ la pression avec :

$$p(x, t) = P_0 + p_1(x, t),$$

- $\mu(x, t)$ la masse volumique avec :

$$\mu(x, t) = \mu_0 + \mu_1(x, t),$$

- $\vec{v}(x, t) = v(x, t) \vec{e}_x$ le champ des vitesses avec :

$$\vec{v}(x, t) = \vec{v}_0 + v_1(x, t) \vec{e}_x \quad \text{où } v_1(x, t) \text{ est petit devant } c.$$

L'écoulement du fluide est considéré parfait et on néglige l'action de la pesanteur.

On donne la constante des gaz parfaits : $R = 8,31 \text{ J} \cdot \text{mol}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$.

Dans toute la suite, on se place dans l'approximation acoustique. Cela signifie que :

- on considère des ondes de faible amplitude, pour lesquelles la surpression p_1 est très petite par rapport à la pression P_0 de l'air au repos : $|p_1| \ll P_0$;
- on mène les calculs au premier ordre.

B1. L'air étant assimilé à un gaz parfait de masse molaire M_a , à la température T_0 supposée (dans un premier temps) constante, retrouver l'expression de la pression p de l'air en fonction de μ , M_a , T_0 et R . En déduire que l'approximation acoustique se traduit aussi par la relation $\mu_1 \ll \mu_0$.

Bilan de masse

On considère un volume élémentaire d'air $d\tau$, fixe dans le référentiel du laboratoire, contenu dans un cylindre de section S constante, d'axe $(0, \vec{e}_x)$ et compris entre les surfaces situées en x et en $x + dx$. Ce système est ouvert.

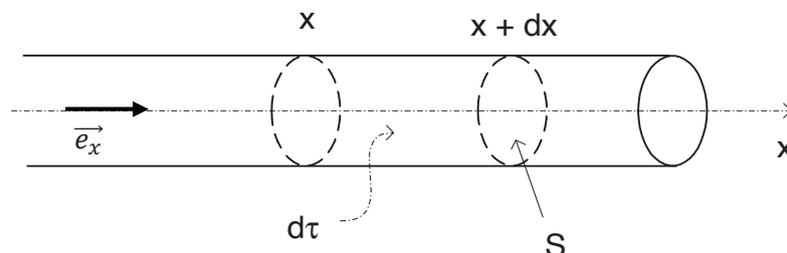


Figure 1 – Volume élémentaire d'air

B2. Donner l'expression de la masse $dm(t)$ présente dans le volume $d\tau$ à l'instant t . De même pour la masse $dm(t + dt)$ présente dans le volume $d\tau$ à l'instant $t + dt$.

B3. Exprimer la masse δm_e entrant dans $d\tau$ pendant la durée dt par la surface située en x . Même question pour la masse δm_s sortant de $d\tau$ pendant la durée dt par la surface située en $x + dx$.

B4. Montrer que, dans le cas de l'approximation acoustique, la conservation de la masse pour le système étudié se traduit par la relation **(R1)** :

$$\frac{\partial \mu_1}{\partial t} + \mu_0 \frac{\partial v_1}{\partial x} = 0. \quad (\mathbf{R1})$$

Équation du mouvement

La loi de la quantité de mouvement, appliquée à la particule de fluide contenue dans le cylindre précédemment défini, conduit à la relation suivante :

$$\mu \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = -\overrightarrow{\text{grad}} p.$$

B5. Que devient l'expression précédente, dans le cas unidimensionnel et dans le cadre de l'approximation acoustique ? On appelle **(R2)** la relation ainsi obtenue.

Évolution isentropique

Historiquement, Isaac Newton a supposé que les particules d'air subissent une transformation isotherme lors du passage d'une onde sonore. Cette hypothèse s'est avérée en désaccord avec les valeurs expérimentales de la célérité des ondes sonores. Ce fut Pierre Simon de Laplace qui montra que l'hypothèse d'une transformation isentropique est plus adéquate.

B6. On considère que, pour des ondes ultrasonores se propageant dans des fluides, l'hypothèse adiabatique est adéquate. Justifier succinctement et sans calculs, la raison de cette hypothèse.

Les particules d'air subissant une transformation isentropique lors du passage de l'onde ultrasonore, on définit alors l'expression du coefficient de compressibilité isentropique :

$$\chi_s = \frac{1}{\mu} \left(\frac{\partial \mu}{\partial p} \right)_s.$$

B7. Établir, dans le cas de l'approximation acoustique, la relation liant μ_1 à μ_0 , p_1 et χ_s . Cette relation constitue la relation **(R3)**.

Équation de propagation

B8. En utilisant les relations **(R1)**, **(R2)** et **(R3)**, montrer que la surpression p_1 vérifie l'équation de d'Alembert à une dimension :

$$\frac{\partial^2 p_1}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 p_1}{\partial t^2} = 0.$$

On donnera l'expression de la célérité c de l'onde ultrasonore en fonction de μ_0 et χ_s .

B9. L'air étant assimilé à un gaz parfait de coefficient γ (rapport des capacités thermiques à pression et volume constant), exprimer χ_s en fonction de γ et P_0 et en déduire que l'expression de la célérité c est :

$$c(T_0) = \sqrt{\frac{\gamma R T_0}{M_a}}.$$

On notera par la suite c_0 , la valeur de $c(T_{273})$ pour une température $T_{273} = 273 \text{ K}$.

Précision des mesures par télémétrie par ultrasons

On suppose, dans cette partie, que l'onde est bien réfléchiée sur un obstacle. La mesure du temps de propagation de l'onde, connaissant sa célérité, permet de déterminer la distance parcourue par l'onde lors d'un aller-retour entre le robot et l'obstacle.

Sur un document technique concernant la télémétrie par ultrasons dans le cas d'un robot autonome, on trouve le graphe suivant :

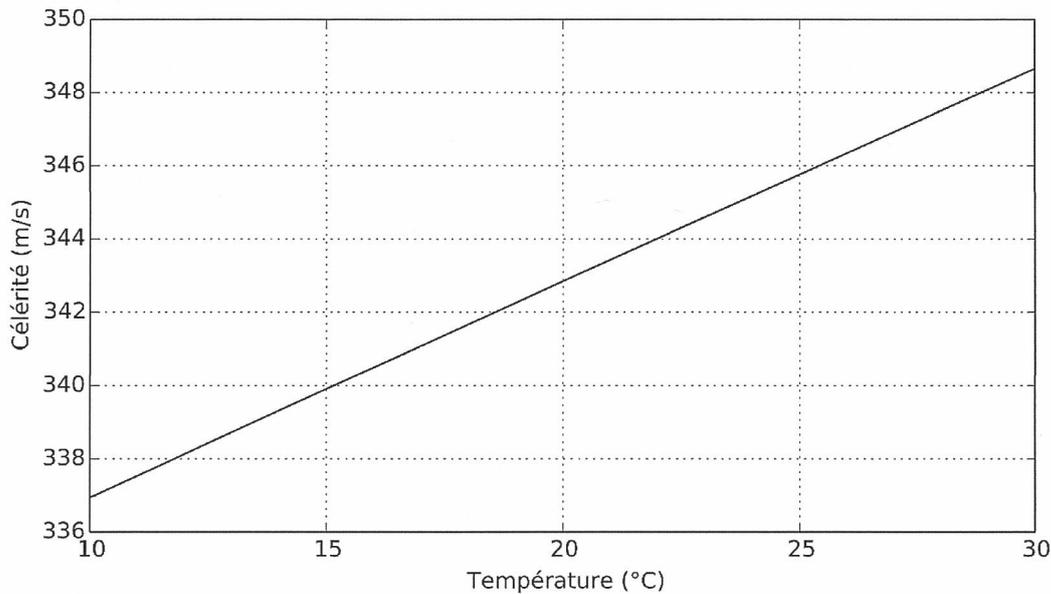


Figure 2 – Célérité des ultrasons en fonction la température

- B10.** Sur l'intervalle envisagé de température (voir figure 2) l'évolution de la célérité des ultrasons est fonction de la température θ mesurée en degré Celsius suivant la relation : $c(\theta) = a \cdot \theta + b$. Déterminer graphiquement les valeurs de a et de b .
- B11.** Sur l'intervalle envisagé de température de la figure 2, linéariser la relation obtenue à la question **B9**. Déterminer les expressions de a et de b en fonction de c_0 et $T_{273} = 273 \text{ K}$. Déduire de b les valeurs numériques de c_0 et γ , sachant que dans le cas de l'air, $M_a = 29,0 \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1}$.

Le robot n'est pas équipé d'un capteur de température, les distances sont donc calculées avec une célérité $c(\theta_{ref})$ correspondant à une température de référence θ_{ref} . Sur la figure 3, on trace l'écart entre la distance réelle d_r parcourue par l'onde lors d'un aller-retour et la distance mesurée d_m par le robot.

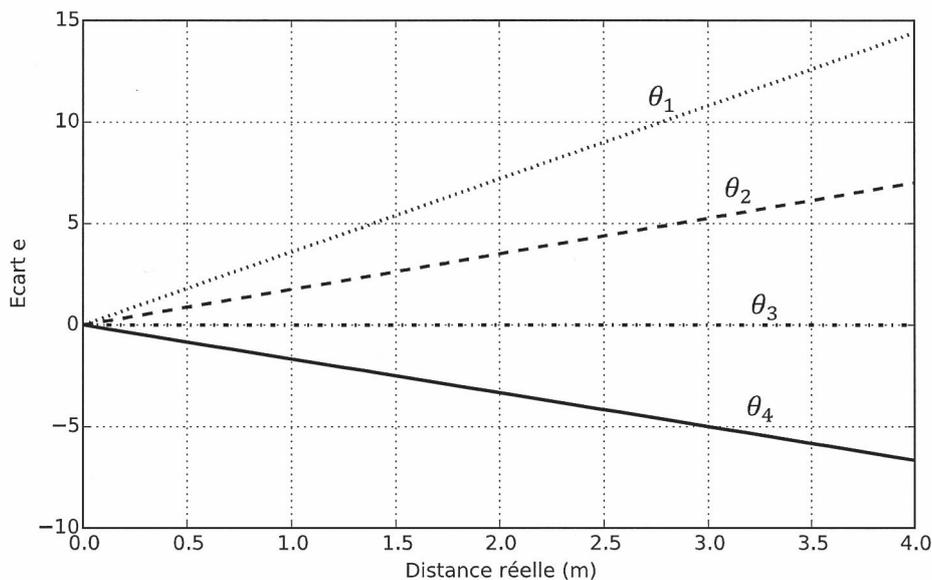


Figure 3 – Écart systématique e entre la distance réelle d_r parcourue par l'onde lors d'un aller-retour et la distance mesurée d_m par le robot pour différentes températures

En python 3		En scilab
<pre> import numpy as np import matplotlib.pyplot as plt def c(temp) : return 330.938*(1+temp/273)**0.5 Temp=[0,10,20,30] n=len(Temp) d=np.linspace(0,4,41) N=len(d) e=[] for i in range(n) : e.append([]) for j in range(N): e[i].append(d[j]*(c(20)/c(Temp[i])-1)*100) plt.plot(d,e[i]) </pre>	<pre> 1 2 function[ecart]=c(temp) 3 ecart=330.938*(1+temp/273)^0.5 4 endfunction 5 Temp=[0,10,20,30] 6 n=length(Temp) 7 d=0:0.1:4 8 N=length(d) 9 e=[] 10 11 for i=1:n 12 for j=1:N 13 e(i,j)=d(j)*(c(20)/c(Temp(i))-1)*100 14 end 15 plot(d,e(i,:)) 16 end </pre>	

Le programme proposé permet de tracer l'écart $e = d_m - d_r$ sur la mesure de distance induite par la variation de température.

- B12.** Justifier l'expression mathématique (lignes 13 et 14) du programme qui calcule la valeur de l'écart e . Quelle est la valeur de la température de référence θ_{ref} ?
- B13.** D'après le programme, quelle est l'unité de l'écart e qui devrait être précisée sur la figure 3 ? Quelles sont les valeurs numériques de θ_1 , θ_2 , θ_3 et θ_4 ? Pourquoi e est-il négatif pour θ_4 ?
- B14.** Que vaut l'écart relatif pour une distance réelle robot-obstacle de 1,5 m et une température $\theta = 30^\circ\text{C}$? Est-il pertinent d'intégrer un capteur de température au robot pour estimer les perturbations dues aux variations de température pouvant exister dans le domaine de détection ?

Dans toute la suite du problème, on prendra pour valeur de la célérité des ondes ultrasonores $c = 343 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ pour une température de l'air de 20°C .

C / RÉFLEXION DE L'ONDE ULTRASONORE

On désire, dans cette partie, vérifier que l'onde ultrasonore est bien réfléchiée par les matériaux usuels rencontrés dans une maison.

Pour cela, on étudie la réflexion et la transmission d'une onde ultrasonore sur une interface plane séparant l'air (milieu 1) d'un milieu solide (milieu 2), les deux milieux sont supposés s'étendre à l'infini.

On considère que l'interface plane est de masse négligeable, imperméable, perpendiculaire à la direction de propagation et au repos dans le référentiel d'étude en l'absence d'onde acoustique. On place désormais l'origine du repère à l'interface.

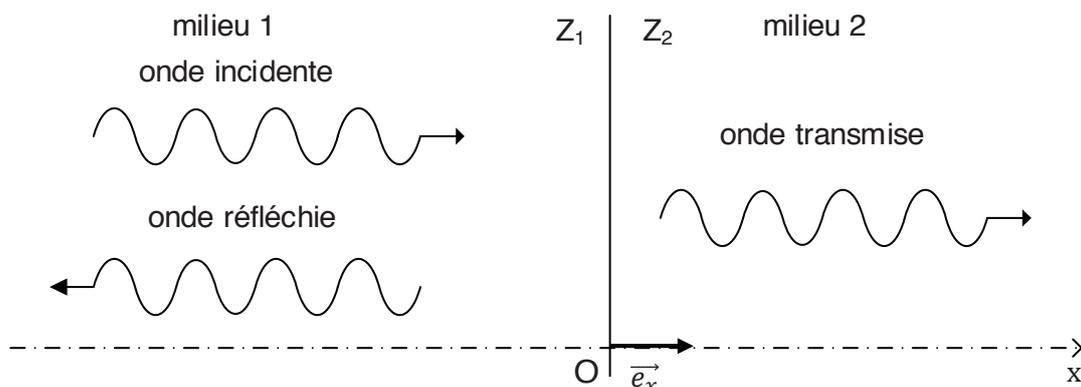


Figure 4 – Réflexion et transmission sur une interface plane

On considère le cas d'ondes planes progressives, harmoniques se propageant suivant l'axe $(0, \vec{e}_x)$ à la célérité c .

On adopte la notation complexe pour les surpressions instantanées et pour les vitesses instantanées.

De plus, on introduit l'impédance acoustique Z_i d'un milieu i , coefficient supposé réel positif.

On a donc pour l'onde incidente :

- $\vec{v}_i(x, t) = \underline{v}_i(x, t) \vec{e}_x = v_{i0} \exp[j(\omega_0 t - k_i x)] \vec{e}_x$
- $\underline{p}_i(x, t) = p_{i0} \exp[j(\omega_0 t - k_i x)] = Z_1 \cdot v_{i0} \exp[j(\omega_0 t - k_i x)]$;

pour l'onde réfléchie :

- $\vec{v}_r(x, t) = \underline{v}_r(x, t) \vec{e}_x = v_{r0} \exp[j(\omega_0 t + k_r x)] \vec{e}_x$
- $\underline{p}_r(x, t) = p_{r0} \exp[j(\omega_0 t + k_r x)] = -Z_1 \cdot v_{r0} \exp[j(\omega_0 t + k_r x)]$;

et pour l'onde transmise :

- $\vec{v}_t(x, t) = \underline{v}_t(x, t) \vec{e}_x = v_{t0} \exp[j(\omega_0 t - k_t x)] \vec{e}_x$
- $\underline{p}_t(x, t) = p_{t0} \exp[j(\omega_0 t - k_t x)] = Z_2 \cdot v_{t0} \exp[j(\omega_0 t - k_t x)]$;

où toutes les amplitudes v_{i0} , v_{r0} et v_{t0} sont des coefficients supposés réels.

C1. Expliciter la condition aux limites à l'interface pour la pression et montrer qu'elle conduit à la relation :

$$p_{i0} + p_{r0} = p_{t0}. \quad (\mathbf{R4})$$

C2. Expliciter la condition aux limites à l'interface pour la vitesse et montrer qu'elle conduit à la relation :

$$v_{i0} + v_{r0} = v_{t0}. \quad (\mathbf{R5})$$

C3. Dédire des relations **(R4)** et **(R5)** les expressions des coefficients de réflexion $r = \frac{v_{r0}}{v_{i0}}$ et de transmission $t = \frac{v_{t0}}{v_{i0}}$ en amplitude, en fonction de Z_1 et de Z_2 .

On introduit le vecteur de Poynting acoustique réel $\vec{\pi}$ associé au vecteur de Poynting acoustique complexe $\underline{\pi}$ défini par $\underline{\pi} = \underline{p}^* \cdot \underline{v}$ où \underline{p}^* est le nombre complexe conjugué de \underline{p} . Le module de la valeur moyenne temporelle de $\vec{\pi}$ est donnée par la relation :

$$\|\langle \vec{\pi} \rangle\| = \left\| \frac{1}{2} \text{Re} (\underline{\pi}) \right\|$$

où Re est la partie réelle d'un nombre complexe.

Au niveau de l'interface, en $x = 0$, on définit les coefficients de réflexion et de transmission en puissance par :

$$R = \frac{\|\langle \vec{\pi}_r \rangle\|}{\|\langle \vec{\pi}_i \rangle\|} \quad T = \frac{\|\langle \vec{\pi}_t \rangle\|}{\|\langle \vec{\pi}_i \rangle\|}.$$

C4. Quelle est la signification physique du vecteur de Poynting $\vec{\pi}$? Quelle est son unité usuelle ?

C5. Exprimer R et T en fonction de Z_1 et de Z_2 .

C6. En déduire que $R + T = 1$. Que traduit cette relation ?

Le tracé du coefficient de transmission en puissance entre deux milieux en fonction du rapport de leur impédance acoustique donne la courbe suivante :

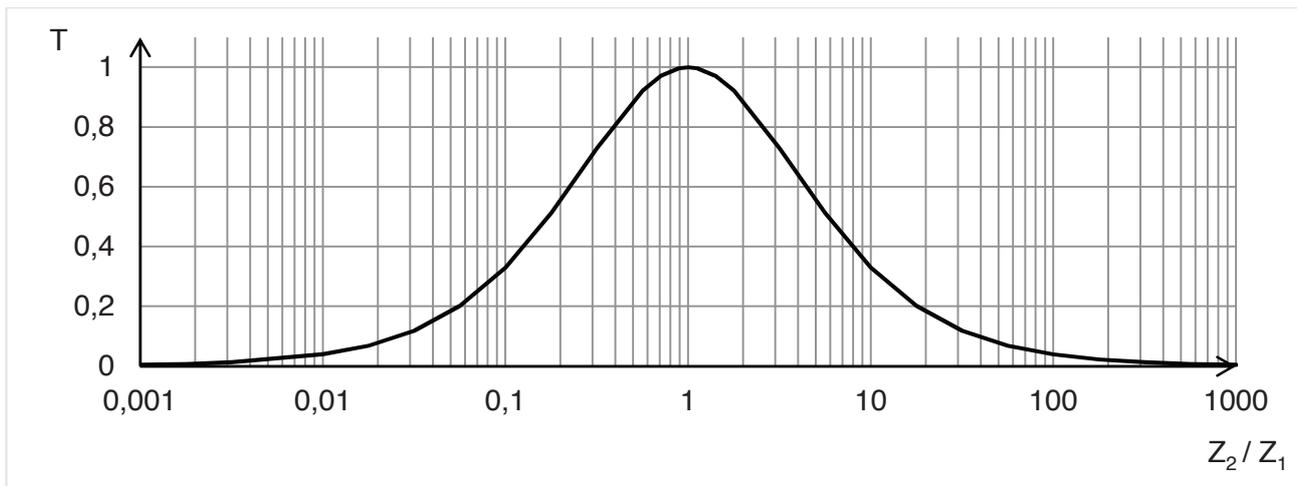


Figure 5 – Coefficient de transmission en puissance en fonction du rapport des impédances

Le tableau ci-dessous donne les valeurs de l'impédance acoustique de quelques milieux présents dans une maison.

Milieu	Impédance acoustique Z ($\text{kg} \cdot \text{m}^{-2} \cdot \text{s}^{-1}$)
air	$4,2 \cdot 10^2$
béton	$8,8 \cdot 10^6$
bois dur	$2,8 \cdot 10^6$
verre	$1,4 \cdot 10^7$
polystyrène expansé	$6,0 \cdot 10^3$
milieu biologique	$1,5 \cdot 10^6$

Figure 6 – Impédance acoustique de quelques milieux

C7. En utilisant les figures 5 et 6, et en expliquant votre raisonnement, déterminer le milieu que le robot autonome détectera le moins. Pour ce milieu, déterminer les valeurs des coefficients de réflexion et de transmission. L'onde est-elle bien réfléchi par les matériaux usuels rencontrés dans une maison ?

D / DÉTECTION D'UN OBSTACLE MOBILE

Effet Doppler

Le robot doit aussi être capable de détecter des obstacles mobiles : enfant ou animal domestique se déplaçant.

On étudie donc, dans cette partie, la réflexion d'une onde ultrasonore sur un obstacle (ou paroi) assimilé à une interface plane, imperméable, perpendiculaire à la direction de propagation.

L'obstacle se déplace en direction de l'émetteur à vitesse constante $\vec{V} = -V \vec{e}_x$.

On place l'origine du repère à la position initiale de l'obstacle, la position de ce dernier est donc : $x_p(t) = -Vt$

On admet, dans cette partie, qu'il n'y a pas d'onde transmise.

On néglige l'effet de l'écoulement de l'air engendré par le déplacement de la paroi, c'est-à-dire que l'on considère que les ondes incidentes et réfléchies se propagent comme si l'air était au repos.

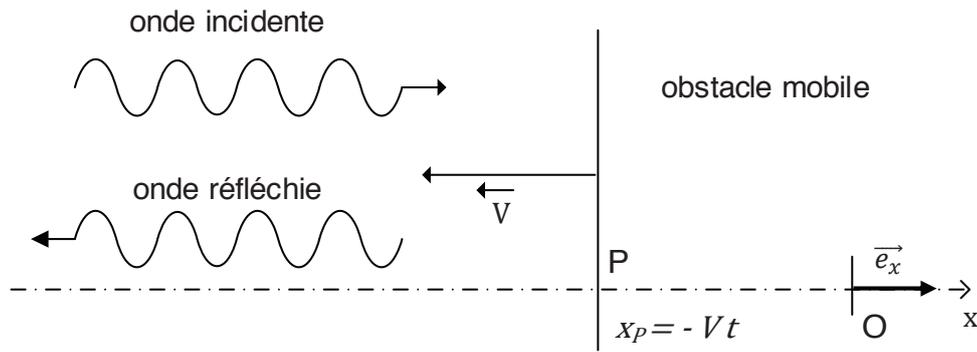


Figure 7 – Réflexion sur une interface plane mobile

On considère le cas d'ondes planes progressives, harmoniques se propageant suivant l'axe (O, \vec{e}_x) à la célérité c .

On adopte la notation complexe pour les surpressions instantanées et pour les vitesses instantanées.

On a donc pour l'onde incidente :

- $\underline{p}_i(x, t) = p_{i0} \exp[j(\omega_0 t - k_i x)]$
- $\underline{\vec{v}}_i(x, t) = \underline{v}_i(x, t) \vec{e}_x = v_{i0} \exp[j(\omega_0 t - k_i x)] \vec{e}_x$;

pour l'onde réfléchie :

- $\underline{p}_r(x, t) = p_{r0} \exp[j(\omega_r t + k_r x)]$
- $\underline{\vec{v}}_r(x, t) = \underline{v}_r(x, t) \vec{e}_x = v_{r0} \exp[j(\omega_r t + k_r x)] \vec{e}_x$.

D1. Sachant que les vitesses instantanées incidentes $\underline{\vec{v}}_i(x, t)$ et réfléchies $\underline{\vec{v}}_r(x, t)$ vérifient l'équation de d'Alembert à une dimension : $\frac{\partial^2 \underline{\vec{v}}}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \underline{\vec{v}}}{\partial t^2} = \vec{0}$, déterminer la relation reliant ω_0 et k_i ainsi que celle reliant ω_r et k_r .

D2. En considérant qu'au voisinage de l'interface la vitesse de la particule de fluide suivant l'axe (O, \vec{e}_x) est nulle dans le référentiel du laboratoire, déterminer la relation entre ω_0 , ω_r , k_i , k_r et V .

D3. En déduire que la pulsation ω_r de l'onde reçue par le récepteur à ultrasons, après réflexion de l'onde sonore émise à la pulsation ω_0 sur un obstacle mobile à la vitesse V est :

$$\omega_r = \omega_0 \frac{1 + \frac{V}{c}}{1 - \frac{V}{c}}$$

D4. Dans le cas où l'obstacle mobile est un chien voulant jouer avec le robot et se déplaçant à une vitesse de $V = 3,6 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}$ vers ce dernier, justifier la relation : $\omega_r \simeq \omega_0 \left(1 + 2 \frac{V}{c}\right)$.

Pour la suite du problème, on considère que $\omega_r = \omega_0 \left(1 + 2 \frac{V}{c}\right)$.

Détection hétérodyne

Pour prendre la décision adéquate : rebrousser immédiatement son chemin ou continuer encore son trajet, le robot doit déterminer la vitesse V de l'obstacle mobile. Pour cela on va effectuer une détection hétérodyne, c'est-à-dire qui exploite un décalage de fréquence. Dans un premier temps on multiplie la tension u_0 à laquelle a été soumise la lame de quartz par la tension u_r délivrée par le récepteur à ultrasons. Puis on filtre le signal u_e ainsi obtenu.

Formulaire mathématique : $\cos a \cos b = \frac{1}{2} [\cos(a + b) + \cos(a - b)]$

D5. Représenter sur un schéma-bloc les opérations effectuées sur les signaux $u_0(t)$ et $u_r(t)$ par la détection hétérodyne pour obtenir un signal dont l'amplitude est proportionnelle à la vitesse V recherchée.

On a : $u_0(t) = U_0 \cos(\omega_0 t)$, $u_r(t) = U_r \cos(\omega_r t + \varphi)$ et $u_e(t) = k \cdot u_0(t) \cdot u_r(t)$.

D6. Exprimer $u_e(t)$ comme une somme de composantes harmoniques puis représenter l'allure de son spectre en pulsation.

D7. Dans le cas où l'obstacle mobile est un chien voulant jouer avec le robot et se déplaçant à une vitesse de $V = 3,6 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}$, avec $c = 343 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ et $f_0 = 40 \text{ kHz}$, on désire ne conserver que la composante $\omega_r - \omega_0$ pour accéder à la valeur de V . Justifier ce choix. En déduire la nature du filtre nécessaire. Dans quel domaine de valeurs numériques doit se situer la pulsation de coupure ?

On cherche une réalisation simple de ce filtre, pour cela on étudie les 3 quadripôles suivants, pour lesquels on considère que l'intensité i_s du courant de sortie est nulle :

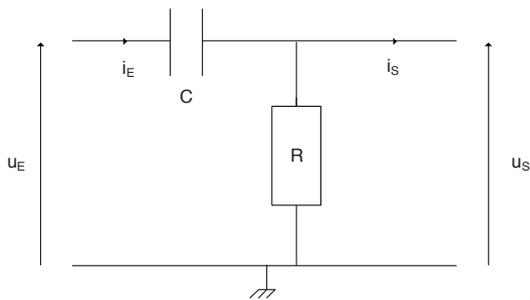


Figure 8-1 – Filtre n°1

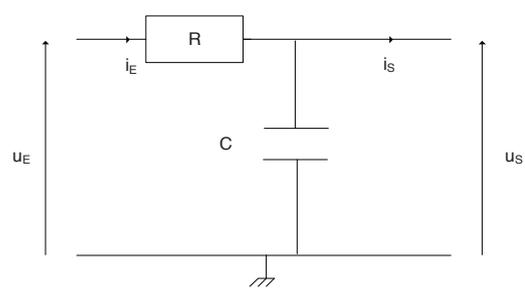


Figure 8-2 – Filtre n°2

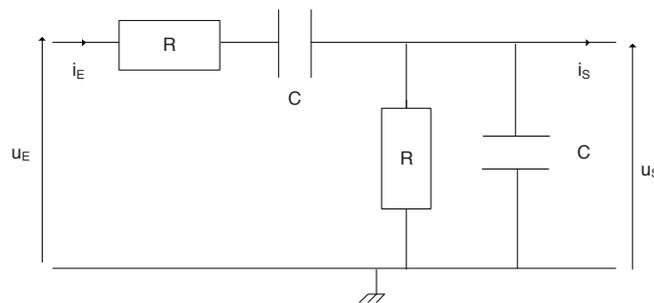


Figure 8-3 – Filtre n°3

D8. Analyser le comportement à basses et hautes fréquences des 3 quadripôles. Lequel de ces quadripôles réalise la fonction de filtrage désirée ?

D9. Déterminer l'expression de la fonction de transfert harmonique du filtre choisi. Exprimer la pulsation de coupure ω_c du filtre en fonction de R et C .

D10. On désire atténuer d'un facteur 100 l'amplitude de la composante haute fréquence du signal $u_e(t)$, déterminer la valeur de la pulsation de coupure ω_c du filtre. Quel est alors la valeur du facteur d'atténuation de la composante basse fréquence du signal ? Commenter.

Télécommunications

Ce sujet est consacré à l'étude de modes de communication à distance, relevant de plusieurs domaines de la physique ; les différentes parties sont totalement indépendantes et, à l'intérieur même de celles-ci, de nombreuses questions sont également indépendantes. Pour toutes les applications numériques, repérées par les initiales *A.N.*, on se contentera d'un ou deux chiffre(s) significatif(s). A l'exception de i tel que $i^2 = -1$, les nombres complexes sont repérés par une notation avec barre : $\bar{z} \in \mathbb{C}$. Une grandeur sinusoïdale de pulsation ω sera associée à la représentation $e^{i\omega t}$.

Données numériques et constantes physiques

- Célérité de la lumière dans le vide : $c = 3,0 \times 10^8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$
- Masse d'un électron : $m_e = 9,1 \times 10^{-31} \text{ kg}$
- Constante d'AVOGADRO : $\mathcal{N}_A = 6,0 \times 10^{23} \text{ mol}^{-1}$
- Perméabilité du vide : $\mu_0 = 1,3 \times 10^{-6} \text{ H} \cdot \text{m}^{-1}$
- Constante de BOLTZMANN : $k_B = 1,4 \times 10^{-23} \text{ J} \cdot \text{K}^{-1}$
- Permittivité du vide : $\varepsilon_0 = 8,8 \times 10^{-12} \text{ F} \cdot \text{m}^{-1}$
- Charge élémentaire : $e = 1,6 \times 10^{-19} \text{ C}$
- Rayon de la Terre : $R_T = 6\,400 \text{ km}$

I Le fil du télégraphe

- Sire, une nouvelle dépêche.
- D'où vient-elle ?
- De Tomsk.
- Le fil est coupé au-delà de cette ville ?
- Il est coupé depuis hier.
- D'heure en heure, général, fais passer un télégramme à Tomsk, et que l'on me tienne au courant.

Dans le roman de JULES VERNE, *Michel Strogoff*, publié en 1876, l'année même de la fondation à Paris de l'École Supérieure de Télégraphie (actuellement Télécom Paris), les télécommunications électriques (le télégramme) jouent, dès la première page, un rôle essentiel.

- – 1. L'alphabet cyrillique utilisé par Michel Strogoff comporte 32 lettres, plus les chiffres et quelques symboles de ponctuation. Combien de symboles binaires (les bits ou les points et traits du code MORSE) faut-il prévoir pour coder chaque caractère d'un document écrit en cyrillique contenant du texte, des chiffres et de la ponctuation ?

A.N. : sachant qu'un opérateur compose 3 symboles binaires par seconde, combien de temps faut-il pour transmettre une page complète de texte comme celle-ci par exemple ?
On détaillera l'évaluation proposée.

Le premier télégraphe électrique terrestre a été mis en service en 1838 par WHEATSTONE en Angleterre et le premier câble sous-marin posé en 1851 entre la France et l'Angleterre. La suite de ce sujet explore quelques propriétés de la transmission d'informations le long d'un tel fil électrique.

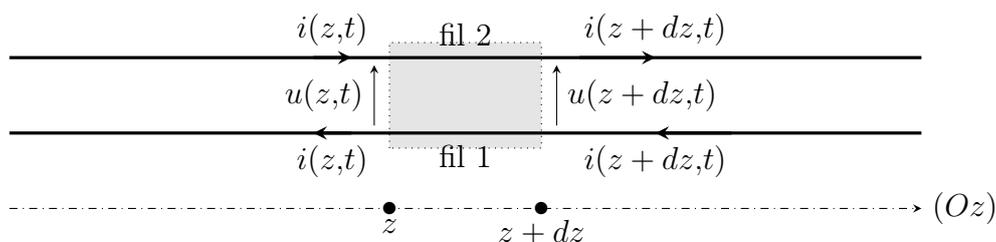


FIGURE 1 – Modèle de ligne bifilaire

I.A Transmission par une ligne bifilaire

Le modèle électrique d'une ligne télégraphique est représenté figure 1 : la transmission a lieu dans le sens de l'axe (Oz) et un élément de ligne de longueur dz transmet la tension aux bornes de la ligne $u(z, t)$ et le courant de ligne $i(z, t)$ selon les *équations des télégraphistes*, R_0 , ℓ_0 et χ_0 étant des constantes positives :

$$-\frac{\partial u}{\partial z} = \frac{R_0}{\chi_0} \frac{\partial i}{\partial t} + \frac{R_0}{\ell_0} i(z, t) \qquad -\frac{\partial i}{\partial z} = \frac{1}{R_0 \chi_0} \frac{\partial u}{\partial t}$$

- – 2. Déterminer les unités usuelles des grandeurs R_0 , χ_0 et ℓ_0 .
- – 3. Dans le cas du télégraphe terrestre du XIX^e siècle, l'installation comportait en général un seul fil tendu sur des poteaux. Le modèle de transmission par ligne bifilaire reste-il applicable ? Expliquer.
- – 4. Déterminer l'équation aux dérivées partielles (équation de propagation) vérifiée par la seule fonction $u(z, t)$, puis l'équation de dispersion associée reliant la pulsation ω au vecteur d'onde \vec{k} .

Ici et dans toute la suite, on étudie une ligne bifilaire permettant le transport du signal sur une assez grande distance ; les phénomènes limitant la propagation seront donc traités comme une perturbation et leur étude limitée au premier ordre du développement.

- – 5. En déduire la vitesse de phase des ondes de courant et de tension. Y a-t-il dispersion à cet ordre du développement ?
- – 6. On considère une onde de tension progressant le long de l'axe (Oz) caractérisée par $u(z = 0, t) = U_0 \cos(\omega t)$, montrer que la puissance électrique moyenne $\mathcal{P}_m(z)$ transportée par la ligne décroît lors de la propagation et déterminer la distance caractéristique de cette atténuation.

I.B Câble coaxial

Depuis l'installation de lignes télégraphiques sous-marines, l'obligation d'isoler la ligne conduit à utiliser une forme géométrique particulière : le câble est coaxial, formé d'une armature centrale métallique formant un cylindre de rayon a , entouré d'une gaine isolante et d'un second câble métallique de rayon $b > a$. Les photographies de la figure 2 représentent les extrémités dénudées de deux câbles de ce type qui relie la télévision à l'antenne ; quelques éléments de la fiche technique du plus performant des deux sont repris dans la table 1.

Un tel câble est d'abord modélisé comme un milieu continu sans pertes caractérisé par une inductance linéique l_u et une capacité linéique c_u .

- – 7. Représenter le schéma équivalent à une longueur infinitésimale dz du câble. Établir les équations de propagation des ondes de courant et de tension.

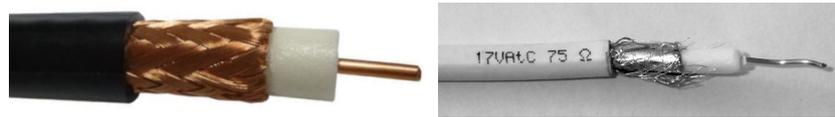


FIGURE 2 – Câble coaxial professionnel (à gauche) et bas de gamme (à droite)

Conducteur interne :	cuivre, $\varnothing 1,6$ mm	Impédance :	75 Ω
Isolant :	Polyéthylène, $\varnothing 7,2$ mm	Capacité nominale :	53 pF/m
Tresse externe :	cuivre, couverture > 95%	Inductance nominale :	0,32 μ H/m
Gaine :	Polyéthylène	Résistance nominale câble :	8,5 Ω /km
Délai :	4,0 ns/m	Résistance nominale tresse :	3,6 Ω /km

TABLE 1 – Extraits de la fiche technique du câble Belden 8213

- – 8. Définir, exprimer, calculer et commenter la célérité de propagation des ondes électriques dans le câble Belden 8213. Comparer au « délai » de la fiche technique.
- – 9. Définir et exprimer l'impédance caractéristique Z_0 du câble. Les données de la fiche technique ci-dessus sont-elles compatibles avec ce modèle ?

Lorsqu'un tel câble relie un générateur (par exemple l'antenne de réception du signal TV) à un récepteur (ici, l'étage d'entrée de l'amplificateur TV) modélisé par une impédance complexe \bar{Z}_e en $z = 0$ sur la figure 3, on observe en général la superposition d'ondes de tension et de courant incidente et réfléchie, donc la superposition d'une onde strictement progressive, d'amplitude $u_p = U_p \cos(\omega t - kz + \varphi_p)$ et d'une onde stationnaire, d'amplitude $u_s = U_s \cos(\omega t - \varphi_s) \sin(kz - \psi_s)$. L'importance de cette dernière est caractérisée par le rapport $\rho = U_s/U_p$, qui peut être mesuré pour indiquer le degré de désaccord entre le câble et sa charge.

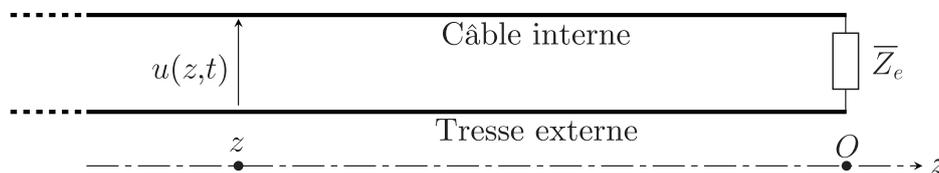


FIGURE 3 – Câble TV alimentant un étage électronique

- – 10. On impose d'abord dans la partie $z < 0$ du câble une onde de tension incidente $\bar{u}_+(z,t)$ d'amplitude complexe \bar{U}_+ , de pulsation ω et de vecteur d'onde k .
Exprimer l'onde de courant $\bar{i}_+(z,t)$ associée en fonction de Z_0 , \bar{U}_+ , k et ω .
Exprimer les ondes de tension $\bar{u}_-(z,t)$ et de courant $\bar{i}_-(z,t)$ réfléchies par le câble en fonction de \bar{Z}_e , Z_0 , \bar{U}_+ , k et ω .
- – 11. Exprimer ρ en fonction de Z_0 et \bar{Z}_e . À quelle condition aura-t-on $\rho = 0$? On parle dans ce cas d'adaptation (ou accord) entre le câble et sa charge.

Dans tout ce qui suit, on choisit une valeur de \bar{Z}_e qui assure cet accord. On souhaite évaluer l'importance des pertes en ligne dues aux résistances électriques par unité de longueur r_u et r'_u du câble et de la tresse.

- – 12. Proposer un schéma modifié de l'élément de longueur dz de câble. Établir la nouvelle équation de propagation de l'onde de tension ; définir et exprimer la longueur caractéristique d'atténuation de l'amplitude des ondes en fonction de Z_0 , r_u et r'_u .
- – 13. *A.N.* : calculer et commenter la valeur de la distance caractéristique.
En pratique, on évite d'utiliser de tels câbles à très haute fréquence (1 GHz et plus). Pourquoi ?

Dans une installation de captage de télévision, un câble coaxial (\mathcal{C}) relie l'antenne P au décodeur D . Un voisin indélicat, souhaitant bénéficier du signal sans payer, réalise le branchement en dérivation de la figure 4 en dénudant partiellement le câble (\mathcal{C}) pour y souder son propre câble (\mathcal{C}') relié à son détecteur D' . Les soudures relient entre elles les câbles centraux d'une part et les tresses externes d'autre part. Les décodeurs D et D' sont tous deux adaptés aux câbles. Tous les câbles sont assez courts pour négliger l'atténuation du signal.

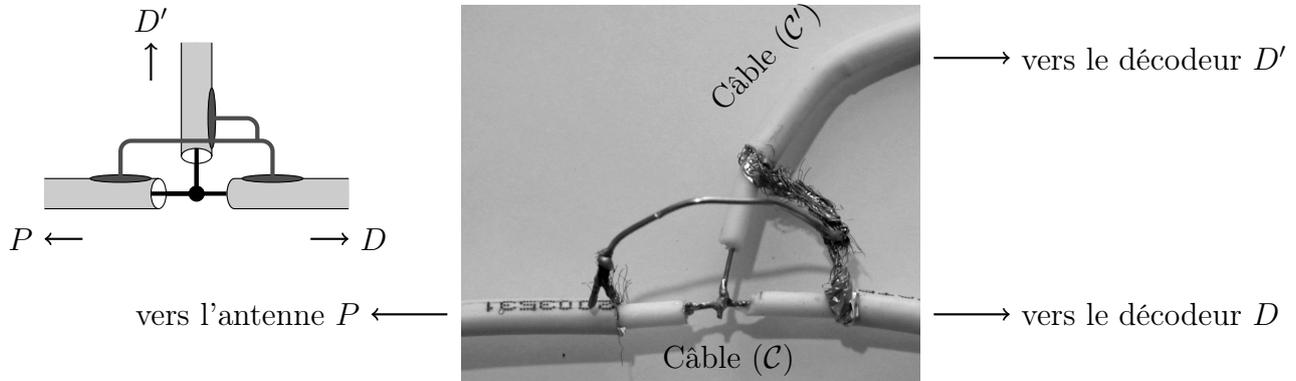


FIGURE 4 – Branchement illégal d'un câble coaxial (\mathcal{C}') sur une installation préexistante (\mathcal{C})

Un onde de tension $u_i = U_0 \cos(\omega t - kz)$ provient de l'antenne P dans la partie $z < 0$ du câble ; elle atteint en $z = 0$ la soudure ainsi réalisée. Dans les deux câbles situés en parallèle dans le domaine $z > 0$ apparaît la même onde de tension $u_t = U'_0 \cos(\omega t - kz)$, avec $|U'_0| < |U_0|$.

- – 14. Pourquoi n'y a-t-il *pas d'onde réfléchie* dans les câbles situés en $z > 0$? Montrer qu'il en existe une dans le câble situé en $z < 0$ et déterminer son amplitude.
- – 15. L'introduction de cette dérivation « pirate » est-elle détectable par une mesure de ρ ou bien par celle de l'atténuation du signal incident au niveau du détecteur D ?

À propos des araignées

Les araignées ou Aranéides sont des prédateurs invertébrés arthropodes. À ce jour, plus de 47 000 espèces subdivisées en 117 familles sont repertoriées et 1700 d'entre elles vivent en France. Les araignées produisent des fils de soie constitués d'un entrelacement de nombreuses fibrilles élémentaires. Le diamètre de ces fils varient typiquement de 1 jusqu'à $70 \mu\text{m}$. À diamètre équivalent, ces fils sont plus résistants que l'acier et possèdent de nombreuses autres propriétés qui les rendent intéressants pour l'industrie, pour la confection par exemple de nouveaux textiles, de gilets pare-balles ou encore de cordes d'instruments de musique. Dans la nature, l'usage que les araignées en font est multiple et dépend des espèces considérées : fil de sécurité pendant un saut pour fuir ou pour se déplacer (fil d'Ariane), tissage de toile pour piéger des proies, moyen de s'élever dans les airs et de voyager au gré des courants aériens pour les araignées montgolfières (fil de la Vierge), confection de catapultes pour la chasse, création de dômes pour le stockage d'air sous l'eau douce pour les espèces subaquatiques ...

Nous proposons d'aborder quelques problèmes de physique relatifs aux araignées et plus particulièrement aux trois espèces représentées dans la figure ci-dessous (Fig. 1). Les applications numériques seront données avec un chiffre significatif. Les vecteurs sont indiqués par des flèches (\vec{v}) sauf s'ils sont unitaires et sont alors surmontés d'un chapeau ($\|\hat{e}_x\| = 1$). Les nombres complexes sont soulignés à l'exception de j tel que $j^2 = -1$. Un formulaire est fourni en fin d'énoncé.

Les 3 parties de ce problème sont indépendantes.

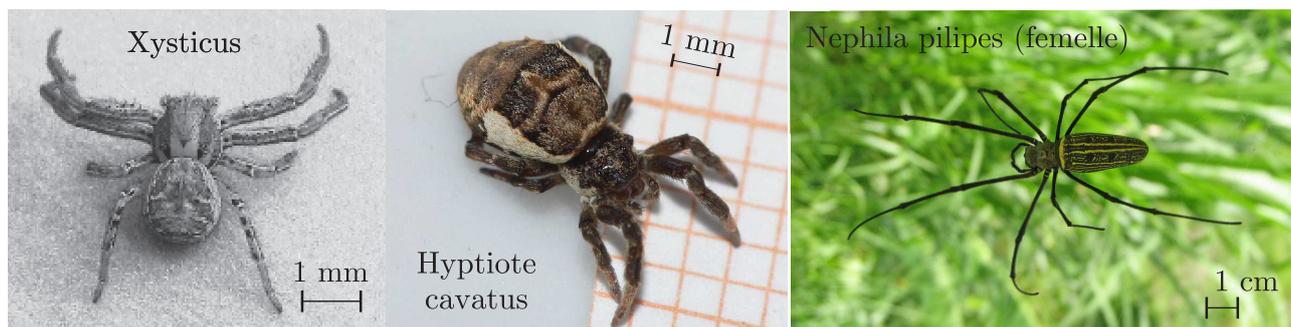


FIGURE 1 – *Xysticus sp.* est une araignée-crabe volante. *Hyptiote cavatus* est une araignée catapulte, tisseuse de toiles triangulaires. Les araignées *Nephila pilipes* fabriquent des fils dont les propriétés mécaniques rivalisent avec les meilleures fibres artificielles : ils peuvent être assemblés pour former des cordes de violon produisant un son au timbre exceptionnel. Source des images : Wikipédia.

III Produire de la musique avec des fils d'araignée

Du fait de leurs propriétés mécaniques si particulières (valeur importante du module de Young, large domaine d'élasticité et faible masse linéique), des physiciens ont récemment eu l'idée d'assembler des milliers de fils de l'araignée *Nephila pilipes*, particulièrement résistants, pour fabriquer des cordes de violon.

Lorsque la corde fabriquée est utilisée pour produire du son, il convient de s'assurer que sa tension soit bien sûr inférieure à sa tension de rupture T_r , mais également que la corde fonctionne dans son régime élastique. Les premiers résultats obtenus se sont révélés très encourageants et prometteurs notamment en ce qui concerne la qualité du timbre puisque le spectre du son produit présente de nombreux pics d'amplitude importante à hautes fréquences.

On étudie les mouvements d'un fil d'araignée de longueur ℓ de masse linéique μ , autour de sa position d'équilibre. Au repos, le fil est rectiligne et parallèle à l'axe horizontal (Ox). On note $z(x,t)$ le déplacement du point du fil à l'abscisse x à l'instant t par rapport à sa position d'équilibre $z = 0$. On ne considère que les mouvements latéraux de faible amplitude s'effectuant dans le plan Oxz (Fig. 8). Le fil étant accroché en ses deux extrémités en deux points fixes. La tension du fil au point d'abscisse x à l'instant t est notée : $\vec{T}(x,t) = T_x(x,t)\hat{e}_x + T_z(x,t)\hat{e}_z$.

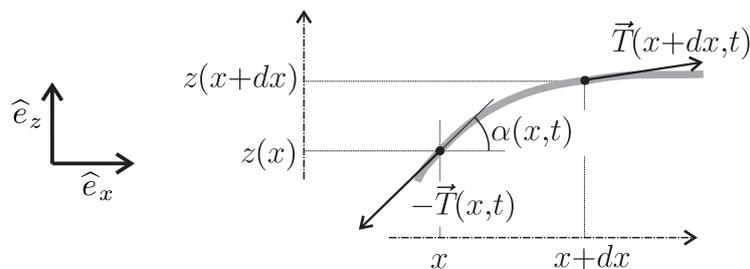


FIGURE 8 – Fil horizontal subissant des déformations de faible amplitude.

On effectue les deux hypothèses suivantes :

- La déflexion est de faible amplitude de même que l'angle $\alpha(x,t)$ que fait le fil avec l'horizontale à la position x et à l'instant t (voir Fig. 8), ce qui entraîne : $|\frac{\partial z}{\partial x}| \ll 1$;
- On néglige les effets de la pesanteur.

□ – 15. On considère la portion de fil comprise entre les plans d'abscisses x et $x + dx$. Exprimer la longueur de portion de fil ds , $\cos[\alpha(x,t)]$ et $\sin[\alpha(x,t)]$ en fonction de dx et $\frac{\partial z}{\partial x}$.

En appliquant le théorème de la résultante cinétique à cette portion de fil, montrer que $T_x(x,t)$ ne dépend pas de x .

Que peut-on conclure pour la norme T de la tension dans le fil ?

- – 16. Montrer que le déplacement du fil $z(x,t)$ vérifie alors l'équation aux dérivées partielles :

$$\frac{\partial^2 z}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 0. \quad (1)$$

On exprimera c en fonction de T et μ . Que représente cette grandeur physique ?

- – 17. Montrer que des fonctions de la forme $z(x,t) = f(x-ct) + g(x+ct)$ sont des solutions de cette équation. Interpréter le sens physique des fonctions f et g .

On cherche les solutions correspondant à un régime purement sinusoïdal. On utilise la représentation complexe de ces solutions sous la forme

$$z(x,t) = \underline{A}e^{j(\omega t - kx)} + \underline{B}e^{j(\omega t + kx)}$$

où ω est la pulsation du signal, k l'amplitude du vecteur d'onde, \underline{A} et \underline{B} des amplitudes complexes.

- – 18. Traduire les conditions aux limites imposées au fil en des contraintes sur $z(x,t)$.
En déduire la relation entre \underline{A} et \underline{B} ainsi que les valeurs de ω permises.
Comment appelle-t-on ce type d'onde et pourquoi ?
- – 19. Sachant que la fréquence de vibration de la note jouée (correspondant à la fréquence de la note fondamentale) vaut 300 Hz, que la longueur du fil est $\ell = \frac{1}{3}$ m et que sa masse linéique est $\mu = 0,5 \text{ mg} \cdot \text{m}^{-1}$, quelle doit être la tension T appliquée à la corde ?
Sachant que la tension T_e au-delà de laquelle la corde n'est plus dans son régime élastique est de l'ordre de 10 newtons, que pouvez vous conclure ?

Dans le cadre d'un modèle plus élaboré on prend en compte la raideur du fil à travers son module de Young E . L'équation de propagation des ondes de déformation de faible amplitude dans un fil de rayon a devient alors :

$$\mu \frac{\partial^2 z}{\partial t^2} - T \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{E\pi a^4}{4} \frac{\partial^4 z}{\partial x^4} = 0 \quad (2)$$

- – 20. En supposant que la déformation $z(x,t)$ de la corde est de la même forme que précédemment, établir la relation de dispersion donnant k en fonction de ω et des paramètres du problème.

Montrer que les fréquences propres de la corde s'écrivent alors sous la forme :

$$f_n = \frac{nc}{2\ell} \sqrt{1 + Bn^2}, \quad (3)$$

où B est une grandeur physique que l'on exprimera en fonction de E , T , ℓ et a .

Sachant que pour la corde fabriquée à partir des fils d'araignée $E = 6,0 \text{ GPa}$ et $a = 350 \mu\text{m}$ et que pour une corde classique $E = 2,5 \text{ GPa}$ et $a = 400 \mu\text{m}$, que pouvez-vous conclure sur la nature du son produit à T et ℓ fixées ?

Formulaire

Détail de la représentation graphique de la fonction logarithme népérien

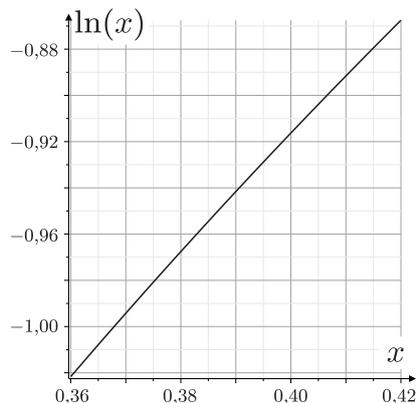


FIGURE 9 – Graphe de la fonction $\ln x$ pour $x \in [0,36; 0,42]$.

Opérateur gradient en coordonnées cylindriques :

$$\vec{\text{grad}}(f) = \frac{\partial f}{\partial r} \hat{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \theta} \hat{e}_\theta + \frac{\partial f}{\partial z} \hat{e}_z$$

(toutes les données ne sont pas nécessairement utiles)

Rayon terrestre	$R_t = 6400 \text{ km}$
Permittivité électrique du vide	$\epsilon_0 = 8,9 \times 10^{-12} \simeq \frac{1}{36\pi} \times 10^{-9} \text{ F} \cdot \text{m}^{-1}$
Accélération de pesanteur terrestre	$g = 10 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$
Masse volumique de l'eau	$\rho_e = 1,0 \times 10^3 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$

FIN DE L'ÉPREUVE