

Étude physique d'un capteur de position

Le contrôle d'un système ou d'un processus physique présent dans un grand nombre de dispositifs technologiques nécessite de connaître à chaque instant, le plus précisément possible, un certain nombre de grandeurs physiques intervenant dans ce contrôle.

Ces grandeurs sont donc mesurées par des capteurs qui convertissent la grandeur physique mesurée en une grandeur électrique utilisée afin de réguler le processus.

La réalisation de capteurs doit prendre en compte divers éléments tels que la précision, la miniaturisation, le poids, le traitement numérique des données, etc.

Ce problème étudie dans un premier temps le principe physique selon lequel le capteur inductif linéaire « LVDT » (Linear Variable Differential Transformer) convertit un déplacement de position en une grandeur électrique (parties **I** et **II**). Dans un deuxième temps, il étudie le conditionnement de cette grandeur électrique en une tension proportionnelle au déplacement (partie **III**). Dans un dernier temps, il développe une application utilisant ce capteur (partie **IV**).

Pour les applications numériques, on ne conservera au plus que 2 chiffres significatifs.

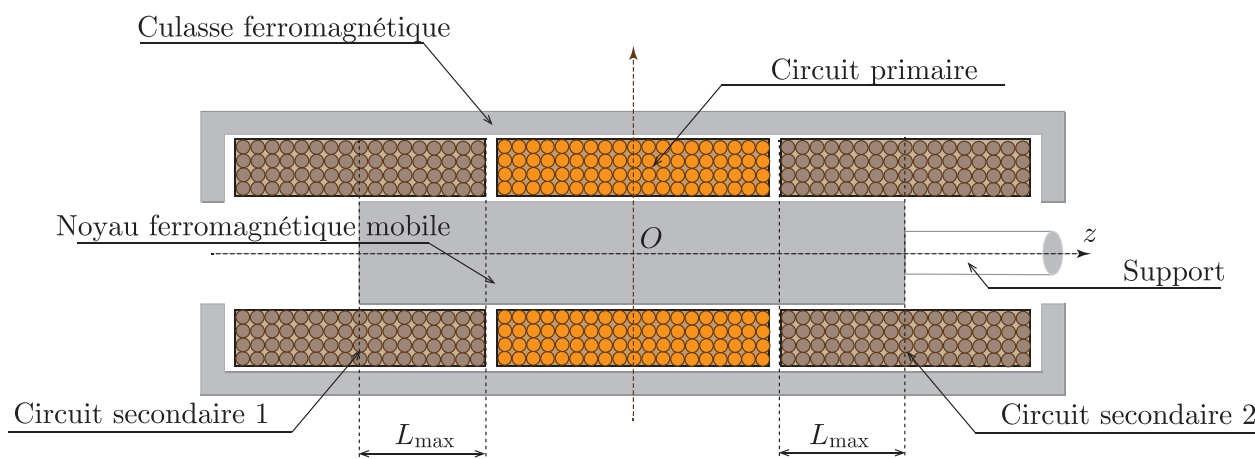


FIGURE 1 – Schéma descriptif du LVDT.

Le LVDT est un transformateur différentiel comportant trois circuits, un circuit primaire et deux circuits secondaires. Les bornes homologues de ces circuits, mentionnées sur la figure 2 à l'aide d'un point, sont telles que les courants algébriques entrants par ces bornes génèrent un flux magnétique algébrique orienté selon $\vec{u}_z$.

Les deux circuits secondaires sont identiques, constitués de fils de cuivre bobinés autour du noyau et portent n spires par unité de longueur.

Le circuit magnétique du transformateur est formé d'une culasse cylindrique externe ferromagnétique et d'un noyau cylindrique ferromagnétique de section S , de rayon a , relié à un support non magnétique qui permet de le translater selon l'axe Oz . Le déplacement de ce noyau cylindre par rapport à la position de référence représentée en figure 1 est limité à $\pm L_{\max}$.

L'ensemble présente une symétrie de révolution autour de l'axe Oz et on repérera l'espace par le système de coordonnées cylindriques $(O, \vec{u}_r, \vec{u}_\theta, \vec{u}_z)$.

Le but de ce dispositif est de fournir une grandeur électrique permettant de caractériser le déplacement du cylindre.

Dans toute la suite, on supposera que le matériau magnétique constituant le noyau cylindrique et la culasse est parfait, de perméabilité magnétique μ_r infinie et de conductivité électrique nulle. Les matériaux non magnétiques (air, support, cuivre) ont une perméabilité magnétique relative égale à 1.

La figure 2 représente le système pour un déplacement algébrique z du centre C du cylindre tel $\vec{OC} = z\vec{u}_z$. Sur l'exemple de la figure 2, $z > 0$ et, de façon générale, z vérifie $|z| < L_{\max}$.

Le circuit primaire est alimenté par la tension $u_p(t)$ et parcouru par le courant d'intensité $i_p(t)$. Les deux circuits secondaires sont connectés en série et la tension utile vaut $u_s = u_2 - u_1$ (voir figure 2).

La tension d'excitation u_p est sinusoïdale de fréquence f variant de 20 Hz à 20 kHz. La position du noyau magnétique affecte la répartition du champ magnétique et modifie les inductances mutuelles entre les circuits secondaires et le circuit primaire.

On notera :

- L_p , l'inductance propre du circuit primaire,
- M_1 , l'inductance mutuelle entre le circuit secondaire 1 et le circuit primaire,
- M_2 , l'inductance mutuelle entre le circuit secondaire 2 et le circuit primaire.

Le courant dans les deux circuits secondaires est supposé nul.

On désignera par état de référence, la configuration du dispositif où le circuit primaire est alimenté par la tension $u_p = U_p \sin(\omega t)$ et où la position du noyau ferromagnétique est telle que $z = 0$.

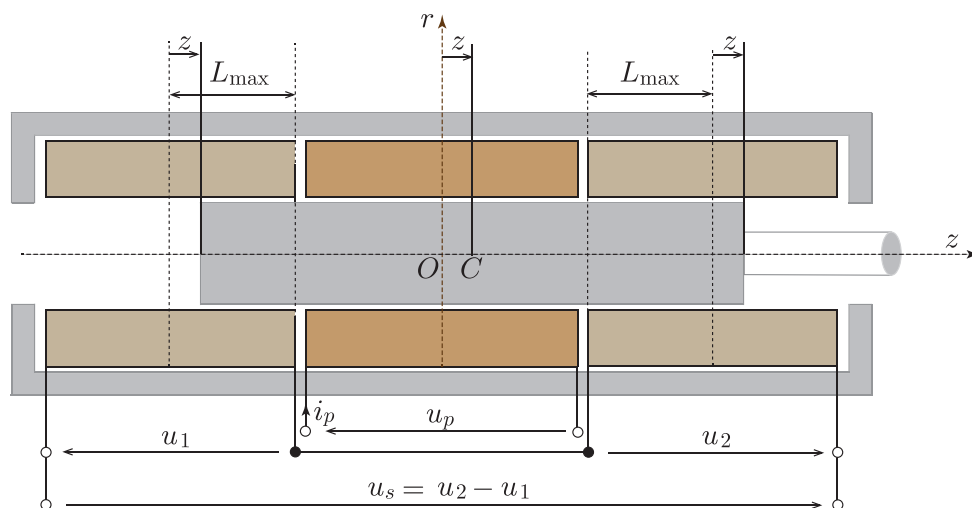


FIGURE 2 – Définition des paramètres

I Étude de l'état de référence

Dans tout le problème, on supposera la fréquence f suffisamment faible pour que l'étude s'inscrive dans le cadre de l'approximation des régimes quasi-permanents (ARQP).

- – 1. Énoncer dans le cadre de ce régime l'équation Maxwell-Ampère reliant le vecteur excitation magnétique $\vec{H}$ et $\vec{j}$, on précisera la nature de $\vec{j}$. En déduire la forme générale de l'énoncé du théorème d'Ampère.
- – 2. Énoncer l'équation de Maxwell-Thomson (également appelée Maxwell-Flux) et en déduire la propriété correspondante du flux du champ magnétique.
- – 3. Quelle est la direction du champ magnétique en tout point du plan passant par O et orthogonal à $\vec{u}_z$?
- – 4. En un point M de coordonnées (r, θ, z) quelconques, que peut-on dire des coordonnées (B_r, B_θ, B_z) du champ magnétique compte tenu des symétries du problème ?

La résolution numérique des équations locales permet de représenter, en figure 3, quelques lignes du champ magnétique dans un plan de coupe contenant l'axe Oz , pour un courant $i_p > 0$.

- – 5. Le résultat de la simulation numérique est-il compatible avec ceux des questions 3 et 4 ?
On justifiera précisément la réponse.

La figure 4 fournit, en échelles arbitraires (E.A. sur la figure) et indépendantes, les variations des composantes $B_z = \vec{B} \cdot \vec{u}_z$ et de $B_r = \vec{B} \cdot \vec{u}_r$ en fonction de z à la distance r de l'axe tel que $0 < r < a$.

- – 6. Justifier les propriétés de parité de ces deux composantes du champ.
□ – 7. Représenter sommairement l'allure d'une ligne de champ. Après avoir orienté cette ligne, justifier le signe des composantes du champ magnétique observé en figure 4.

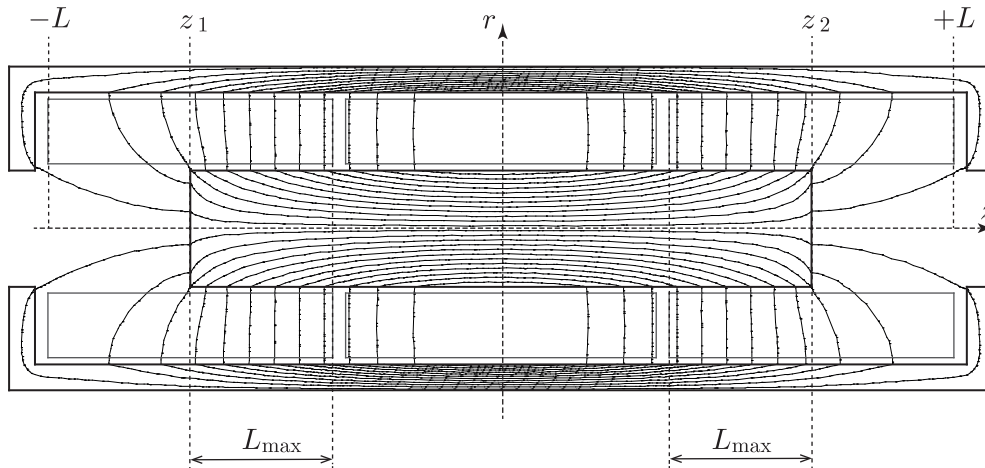


FIGURE 3 – Lignes de champ pour un noyau centré obtenues par simulation numérique.

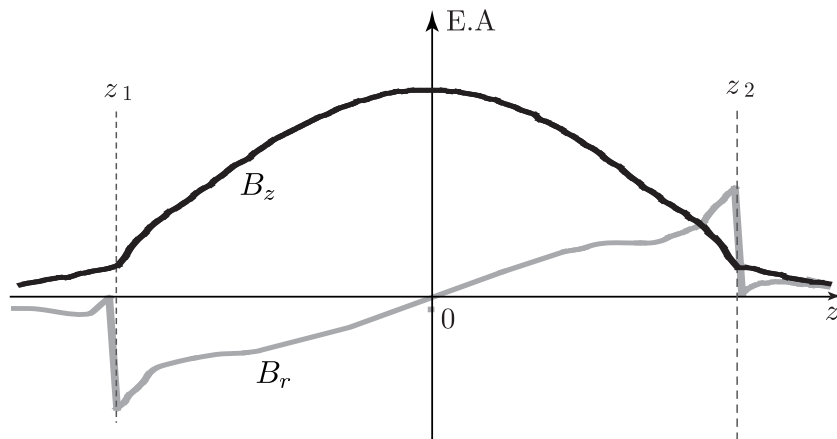


FIGURE 4 – Composantes B_r (en grisé) et B_z (en noir) en r tel que $0 < r < a$.

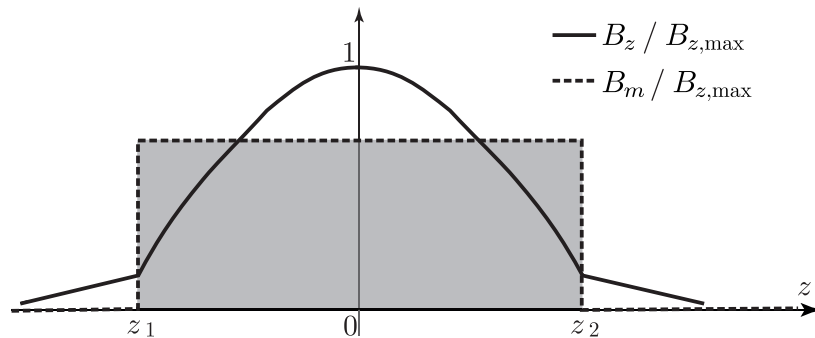
On remarque que $|B_r|$ devient très faible sur une très courte distance juste après z_2 et juste avant z_1 .

- – 8. Justifier cette observation par un calcul littéral.

Peut-on, sur la figure 3, observer ce phénomène à d'autres endroits ?

Afin de déterminer l'expression des inductances mutuelles, on souhaite modéliser simplement le champ magnétique. Pour cela, grâce à la simulation numérique, sur la figure 5, on a représenté en trait plein la courbe des variations de $B_z/B_{z,\max}$ évaluée en $r = 0$ en fonction de z .

- – 9. Quels éléments observés en figures 3 et 5 permettent de justifier que l'on puisse considérer le champ magnétique comme uniforme au voisinage du centre du noyau.
- – 10. Quels éléments observés en figure 3 permettent d'expliquer la diminution de la composante $\vec{B} \cdot \vec{u}_z$ du champ observée en figure 5 lorsqu'on se rapproche des bords du noyau ?

FIGURE 5 – Composante B_z sur l'axe Oz .

Dans un premier modèle, on assimile le champ magnétique axial au profil représenté en traits pointillés en figure 5. En effet, on supposera que :

- $\boxed{H_1}$: si $z_1 < z < z_2$ et $r < a$, alors la composante $\vec{B} \cdot \vec{u}_z$ du champ magnétique est uniformément égale à B_m , sa valeur moyenne sur l'axe Oz dans le noyau. On posera $B_m = Ki_p$, où K est une constante caractéristique du système ;
 - $\boxed{H_2}$: si $z < z_1$ ou $z > z_2$ alors pour tout $r < a$ on a $\vec{B} \cdot \vec{u}_z = 0$;
 - $\boxed{H_3}$: en tout point compris entre le noyau et la culasse, tels que $-L < z < L$, alors $\vec{B} \cdot \vec{u}_z = 0$.
- – 11. Dans le cadre de ces hypothèses simplificatrices, montrer que les deux inductances mutuelles M_1 et M_2 sont identiquement égales à une même valeur notée M_0 . Exprimer M_0 en fonction de S , K , n et $L_{\max}$.
- – 12. Application numérique : On donne la résistance du circuit primaire $R_p = 100 \, \Omega$ et l'inductance du circuit primaire $L_p = 6 \, \text{mH}$. Pour $U_p = 10 \, \text{V}$, on mesure aux bornes de chacun des deux circuits secondaires non connectés entre eux une tension d'amplitude $1,5 \, \text{V}$ pour une fréquence de $5 \, \text{kHz}$. Calculer la valeur de M_0 . On prendra $10\pi \sim 30$ et $\sqrt{42 \cdot 10^3} \sim 205$.

II Déplacement du noyau

On étudie désormais le LVDT dans l'état représenté en figure 2 où le centre C du cylindre est déplacé de z par rapport à l'état de référence, soit $\vec{OC} = z\vec{u}_z$.

Le circuit primaire est toujours alimenté par la tension $u_p = U_p \sin(\omega t)$ et parcouru par le courant d'intensité i_p . Le courant circulant dans les circuits secondaires connectés en série est nul.

La figure 6 représente le tracé des lignes de champ magnétique dans un plan de coupe contenant l'axe Oz , obtenu par résolution numérique des équations locales dans les mêmes conditions que celui de la figure 3, pour un courant $i_p > 0$. Le seul changement réside dans la position du noyau.

La cartographie des lignes de champ dans le noyau étant très semblable à celle de la figure 3, on conserve les hypothèses $\boxed{H_1}$, $\boxed{H_2}$ et $\boxed{H_3}$ correspondantes.

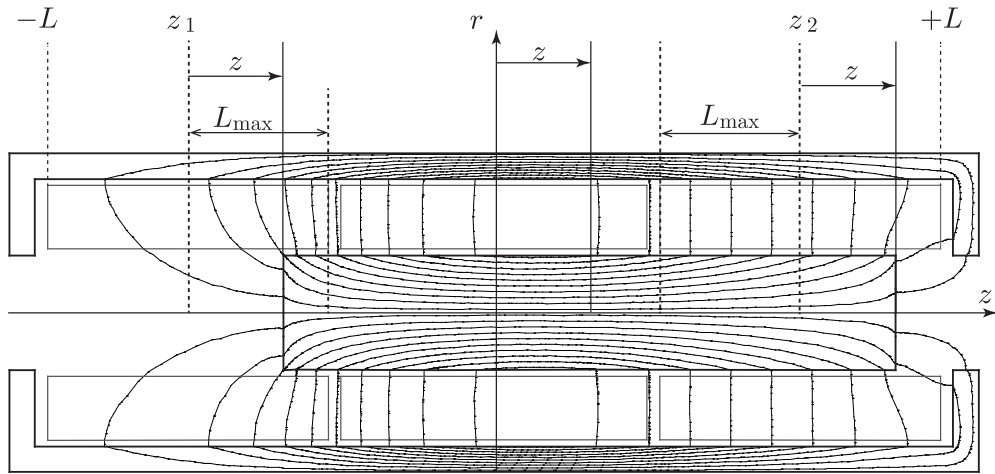


FIGURE 6 – Lignes de champ pour un noyau décentré.

- – 13. Dans le cadre de ce modèle, montrer que si $|z| < L_{\max}$ alors L_p est indépendante de z .
- – 14. Déterminer l'inductance mutuelle $M_1(z)$ en fonction de M_0 , z et $L_{\max}$.
- – 15. De même, déterminer l'inductance mutuelle $M_2(z)$ en fonction de M_0 , z et $L_{\max}$.
- – 16. Dédire des résultats précédents que la tension différentielle à vide du circuit secondaire s'écrit sous la forme $u_s = u_2 - u_1 = \lambda M_0 \frac{z}{L_{\max}} \frac{di_p}{dt}$, dans laquelle on précisera la valeur de la constante λ .
- – 17. Pour un courant i_p sinusoïdal fixé, quel est le paramètre de la tension u_s , noté A , permettant de mesurer z ? Tracer l'allure des variations de A en fonction de z ? Comment peut-on discerner le cas $z > 0$ et $z < 0$? Connaissez-vous un procédé permettant de générer une tension proportionnelle à ce paramètre?

PARTIE II : Centrale PSI 2017 - extrait

Cette partie, délicate, demande une analyse précise et détaillée des situations physiques étudiées avant tout calcul. Les réponses aux différentes questions devront être soigneusement justifiées.

Les poussières, petites particules en suspension dans l'air, sont des polluants fréquemment présents dans les fumées industrielles. Leur émission est soumise à une réglementation toujours plus stricte qui oblige les industriels à équiper leurs installations de dispositifs de dépoussiérage. Les électrofiltres peuvent jouer ce rôle dans des installations aussi variées que les centrales thermiques, les cimenteries, les incinérateurs, les aciéries ou encore les verreries.

Un électrofiltre est essentiellement constitué de deux électrodes entre lesquelles on applique une forte tension électrique. L'une d'elles, appelée collectrice, est mise à la terre alors que l'autre, nommée émettrice, est portée à un potentiel négatif $-U$ provoquant l'ionisation du gaz à son voisinage. Les anions ainsi produits se déplacent vers la collectrice, correspondant au passage d'un courant au travers du gaz. En chemin, certains de ces anions se fixent sur les grains de poussière qui acquièrent ainsi une charge négative. Ces particules polluantes sont alors attirées par la collectrice et s'y fixent en formant un dépôt qu'on élimine en ébranlant l'électrode à coups de marteau (électrofiltre sec) ou en la rinçant par un liquide (électrofiltre humide). Le résidu est récupéré dans des trémies, puis évacué.

III Alimentation électrique d'un électrofiltre

L'alimentation électrique d'un électrofiltre détermine en partie son efficacité. Il convient de maintenir la tension entre les électrodes aussi haute que possible tout en contrôlant l'apparition d'arcs électriques néfastes. On utilise dans ce but une installation alimentée par le réseau (EDF par exemple), formée d'une armoire de régulation, d'un transformateur et d'un redresseur haute tension (figure 6).

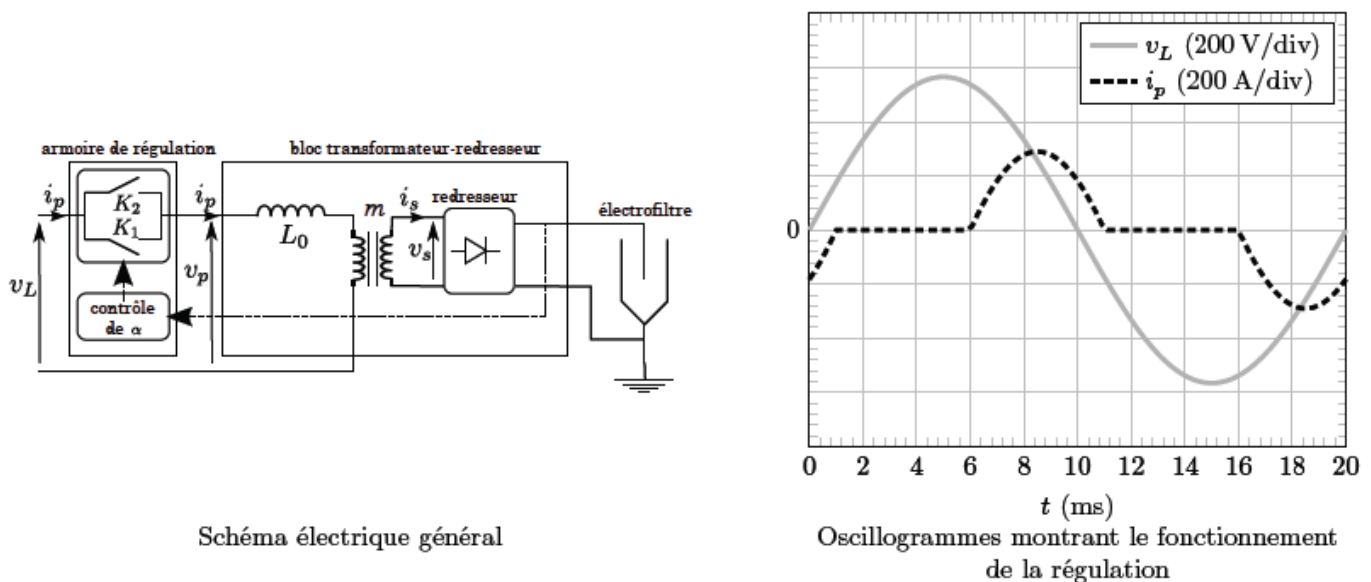


Figure 6

III.A – Armoire de régulation

L'armoire de régulation comporte des commutateurs K_1 et K_2 assimilables à des interrupteurs idéaux et qui permettent de piloter la puissance transférée du réseau EDF vers l'électrofiltre. La partie droite de la figure 6 montre l'évolution de la tension de réseau v_L et de l'intensité i_p sur une période ($T = 20$ ms). Le fonctionnement met en jeu un rapport cyclique α , toujours inférieur à 1/2 et ici fixé à 0,3.

- L'interrupteur K_1 , qui se trouve ouvert à $t = 0$, est fermé à $t = \alpha T$ durant une phase où $v_L > v_p$. Il reste fermé quelques instants, puis s'ouvre spontanément dès que i_p s'annule et demeure ouvert jusqu'à la période suivante.
- L'interrupteur K_2 , qui se trouve ouvert à $t = T/2$, est fermé à $t = T/2 + \alpha T$, durant une phase où $v_L < v_p$. Il reste fermé quelques instants, puis s'ouvre spontanément dès que i_p s'annule et demeure ouvert jusqu'à la période suivante.

III.A.1) Dans quel interrupteur le courant circule-t-il pour $t \in [6 \text{ ms}, 11 \text{ ms}]$ et pour $t \in [16 \text{ ms}, 21 \text{ ms}]$?

III.A.2) Les interrupteurs K_1 et K_2 fonctionnent de manière symétrique et on se concentre sur K_1 . Représenter schématiquement sur une caractéristique, sans s'attarder sur les valeurs numériques, les points de fonctionnement mis en jeu pour cet interrupteur en convention récepteur. Préciser par un schéma l'orientation de l'intensité i_{K_1} et la tension u_{K_1} .

III.A.3) Rappeler les caractéristiques courant-tension idéales d'une diode et d'un transistor utilisés en régime de commutation, en précisant à nouveau les orientations par des schémas. L'un de ces deux composants peut-il être utilisé pour K_1 et K_2 ? Justifier.

III.B – Le transformateur

Le transformateur, de rapport de transformation m , est supposé idéal. On néglige en particulier le courant de magnétisation. Il est précédé d'une bobine de protection d'auto-inductance L_0 immergée dans la même cuve d'huile. La plaque signalétique de l'installation comporte les informations suivantes, issues d'essais en régime sinusoïdal forcé de fréquence 50 Hz :

- tension efficace nominale d'alimentation du circuit primaire $V_{pne} = 400$ V,
- intensité efficace nominale du circuit secondaire $I_{sne} = 1400$ mA,
- amplitude nominale de la tension au secondaire $V_{sn} = 90$ kV, valeur obtenue en circuit secondaire ouvert et sous la tension primaire nominale.

On précise que, dans ces essais, le transformateur est déconnecté du reste de l'installation et que la tension v_p est appliquée à l'ensemble formé de L_0 et du circuit primaire, comme sur la figure 6.

III.B.1) Que vaut le rapport de transformation m ? En déduire l'intensité nominale efficace au primaire I_{pne} .

III.B.2) L'inductance de protection est caractérisée par un nombre sans dimension r_{cc} exprimé en pourcent et défini comme suit. Lorsque le secondaire est en court-circuit, il faut appliquer au primaire une tension v_p de valeur efficace V_{pcc} pour y faire passer un courant d'intensité efficace égale à sa valeur nominale I_{pne} . On pose $r_{cc} = V_{pcc}/V_{pne}$.

Justifier que $L_0 = \frac{r_{cc} V_{pne}}{\omega I_{pne}}$.

III.B.3) L'inductance de protection L_0 trouve son utilité en cas d'apparition d'arcs électriques dans l'électrofiltre, qui provoquent des surintensités dommageables. On représente cette situation par un court-circuit du secondaire alors que v_p est maintenu à la tension d'alimentation nominale. Quelle valeur convient-il de donner à r_{cc} pour que l'intensité dans le primaire ne dépasse pas 3 fois sa valeur nominale ? Calculer numériquement L_0 .

III.C – Le redresseur

III.C.1) Le redressement double alternance est réalisé au moyen d'un pont de diodes au silicium. Représenter par un schéma la structure de ce dispositif. Faire apparaître clairement les points où s'applique la tension v_g fournie par le transformateur, de même que les bornes où il convient de brancher l'électrode émettrice et l'électrode réceptrice, dont la polarité a été indiquée au début du problème.

III.C.2) Durant les phases où l'intensité i_p est non nulle, les électrodes se chargent comme les plaques d'un condensateur, puis se déchargent partiellement lorsque cette intensité disparaît. *Qualitativement*, si α augmente tout en restant inférieur à 1/2, dans quel sens la tension moyenne U aux bornes de l'électrofiltre évolue-t-elle ? Si les arcs électriques sont trop nombreux, convient-il d'augmenter ou d'abaisser la valeur de α ?

Partie VI - Machine synchrone

La machine synchrone est constituée d'un rotor en fer massif et d'un stator en fer feuilleté. Le rotor et le stator sont séparés d'un entrefer de très faible largeur. Ce circuit magnétique amplifie et canalise le champ magnétique.

Dans la machine diphasée, le stator se compose de deux enroulements décalés spatialement d'un angle de $\frac{\pi}{2}$.

On s'intéresse ici à un seul des deux enroulements du stator.

On a représenté, sur la **figure 7**, les lignes de champ magnétique $\vec{B}$ créé par une spire du stator, de vecteur normal $\vec{n}_1$, parcourue par un courant $i_1(t)$. La spire est représentée en coupe par son conducteur " aller " et son conducteur " retour ".

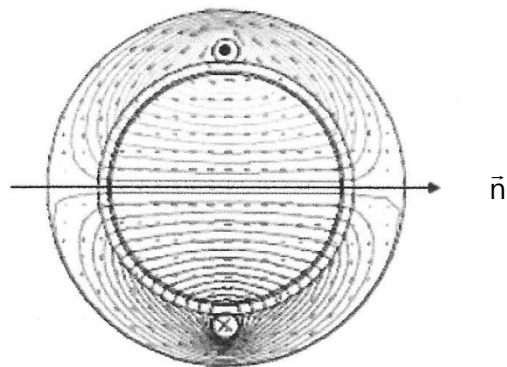


Figure 7 - Champ magnétique créé par une spire d'un enroulement du stator

Q32. La norme du champ magnétique est-elle uniforme dans le circuit magnétique ? Sinon, préciser les zones où le champ magnétique est le plus intense et est le moins intense.

L'air est assimilé magnétiquement à du vide de perméabilité magnétique μ_0 . Le fer est assimilé à un matériau magnétique linéaire homogène de perméabilité magnétique relative μ_r . On désigne par e la largeur de l'entrefer et L_{fer} la longueur moyenne d'une ligne de champ dans le fer. Par construction de la machine, on a $\mu_r e \gg L_{\text{fer}}$. La ligne de champ, de longueur L_{fer} dans le fer, est qualifiée de ligne de champ moyenne.

Q33. Pour la ligne de champ moyenne, on note H_{air} et H_{fer} les normes du champ d'excitation magnétique dans l'air (entrefer) et dans le fer. Ces normes sont supposées uniformes le long de cette ligne de champ. Par application du théorème d'Ampère, relier H_{air} , H_{fer} , e , L_{fer} et $i_1(t)$.

Pour la ligne de champ moyenne, on note B_{air} et B_{fer} les normes du champ magnétique dans l'air (entrefer) et dans le fer. Par conservation du flux, on montre que B_{air} et B_{fer} sont très voisins. On assimile ces deux normes à une valeur commune notée B .

Q34. Déterminer l'expression de B en fonction de $i_1(t)$, de e et de μ_0 .

Par la suite, on considère que la norme du champ magnétique B est uniforme dans l'entrefer.

On désigne par $\vec{B}_{\text{spire}}(\theta, t) = B_{\text{spire}}(\theta, t)\vec{e}_r$, le champ magnétique créé par cette spire en un point M de l'entrefer repéré (**figure 8**) par sa position θ .

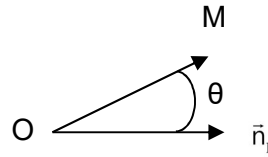


Figure 8 - Repérage de l'entrefer

Q35. Représenter graphiquement en fonction de θ , l'allure de $B_{\text{spire}}(\theta, t)$ pour $i_1(t) > 0$ et $\theta \in [-\pi, \pi]$.

L'enroulement considéré du stator, parcouru par le courant $i_1(t)$, n'est pas constitué d'une seule spire mais de trois spires décalées les unes des autres d'un angle α , comme le montre la **figure 9**. Ces trois spires sont représentées en coupe par trois conducteurs "aller" et trois conducteurs "retour".

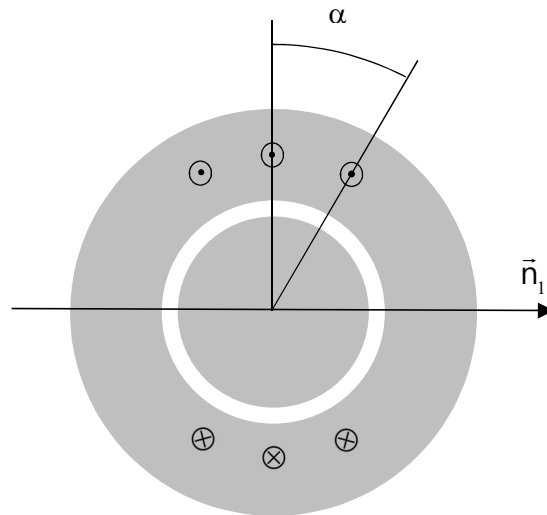


Figure 9 - Enroulement à trois spires décalées

On désigne par $\vec{B}_1(\theta, t) = B_1(\theta, t)\vec{e}_r$, le champ magnétique créé par l'enroulement du stator à trois spires décalées.

Q36. Représenter graphiquement, en fonction de θ , l'allure de la fonction $B_1(\theta, t)$ pour $i_1(t) > 0$ et $\theta \in [-\pi, \pi]$. On prendra $\alpha \approx \frac{\pi}{6}$.

Dans la suite, on admettra que cet enroulement du stator crée dans l'entrefer un champ magnétique $\vec{B}_1(\theta, t) = K i_1(t) \cos(\theta) \vec{e}_r$ et que le second enroulement, parcouru par un courant $i_2(t)$, crée dans l'entrefer un champ magnétique $\vec{B}_2(\theta, t) = K i_2(t) \sin(\theta) \vec{e}_r$.

Une alimentation électrique de pulsation ω_s impose des courants $i_1(t)$ et $i_2(t)$ de la forme :

$$\begin{cases} i_1(t) = I_{\text{max}} \cos(\omega_s t) \\ i_2(t) = I_{\text{max}} \sin(\omega_s t) \end{cases}$$

- Q37.** Déterminer l'expression du champ magnétique $\vec{B}_s$ créé par le stator dans l'entrefer. On posera : $B_{s0} = K I_{max}$. Justifier que ce champ magnétique $\vec{B}_s$ est un champ tournant à la vitesse angulaire $\vec{\omega}$ qu'on précisera.

Le rotor tourne à la vitesse angulaire $\vec{\Omega} = \Omega \vec{e}_z$. Il possède une bobine comportant plusieurs spires bien réparties. Elle est alimentée par l'intermédiaire d'un contacteur tournant, relié à une source de courant continu I_R . Il crée un champ en un point M repéré par l'angle θ dans l'entrefer :

$$\vec{B}_R(\theta, t) = K_R I_R \cos(\theta_R(t) - \theta) \vec{e}_r = B_{r0} \cos(\theta_R(t) - \theta) \vec{e}_r$$

où $\theta_R(t)$ désigne la position du rotor. On a : $\theta_R(t) = \Omega t + \theta_0$.

- Q38.** Exprimer l'énergie magnétique W_m stockée dans l'entrefer à l'aide d'une intégrale qu'on ne demande pas d'intégrer et faisant intervenir $\vec{B}_s$ et $\vec{B}_R$.

On admettra, en ne conservant que les termes qui varient le plus lentement avec le temps, que :

$$W_m = \frac{R_e L_e e}{2\mu_0} (\pi B_{s0}^2 + \pi B_{r0}^2 + 2\pi B_{r0} B_{s0} \cos(\omega_s t - \theta_R(t))).$$

- Q39.** Préciser l'unité du produit $R_e L_e e$ et indiquer à quels paramètres du système correspondent chacun des deux termes : R_e et L_e .

On note $\vec{\Gamma} = \Gamma_z(t) \vec{e}_z$, le couple électromagnétique exercé sur le rotor. On rappelle que $\Gamma_z(t) = \frac{\partial W_m}{\partial \theta_R}$.

- Q40.** Préciser l'expression de $\Gamma_z(t)$ en fonction de R_e , L_e , e , μ_0 , B_{r0} , B_{s0} , Ω , ω_s et de θ_0 .

La machine synchrone peut fonctionner en moteur ou en alternateur.

- Q41.** On considère que ω_s est fixé par le réseau électrique extérieur. À quelle condition sur Ω , le couple moyen est-il non nul ? Comment appelle-t-on cette condition ? Préciser, en fonction de R_e , L_e , e , μ_0 , B_{r0} , B_{s0} , et de θ_0 , l'expression de ce couple moyen.

- Q42.** On suppose que cette condition est respectée. À quelle condition sur θ_0 a-t-on un fonctionnement alternateur ? Un fonctionnement moteur stable ?

Formules trigonométriques :

$$\cos(a - b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b$$