

E3a PSI 217

(1)

(B) 1. $\vec{j} = -d \text{grad } T$

\swarrow \downarrow \searrow
 $W m^{-2}$ $W K^{-1} m^{-1}$ $K m^{-1}$

Le transfert thermique par conduction s'effectue des zones de haute T vers celles de basse T (\ominus), proportionnellement au gradient local de température.

2. on effectue un bilan thermique sur une tranche dx de fusible. En considérant le caractère monodimensionnel de la transformation de ce système :

$dH = \delta Q_p$ avec :

* $dH = S \mu c dx \frac{\partial T}{\partial t} dt$

* $\delta Q_p = [j(x, t)S - j(x+dx)S] dt + SRI^2 dt$

où $SR = \frac{l}{\sigma S}$ est la résistance électrique de la tranche dx , suivant x .

Soit $\mu c \left(\frac{\partial T}{\partial t} \right) = - \left(\frac{\partial j}{\partial x} \right) + \frac{I^2}{\sigma S^2}$ et avec

$j = -d \frac{\partial T}{\partial x}$, $\mu c \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{I^2}{\sigma S^2} + d \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}$ (2)

3. En R.S., $\frac{\partial T}{\partial t} = 0$

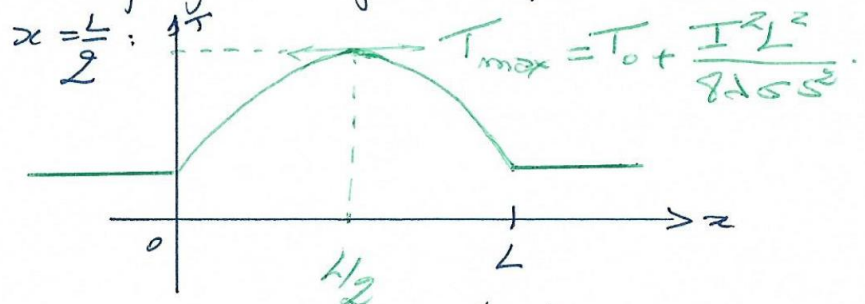
soit $\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \frac{d^2 T}{dx^2} = - \frac{I^2}{\sigma S^2 d}$

et $T(x) = - \frac{I^2}{2\sigma S^2 d} x^2 + \alpha x + \beta$

Le fil étant soudé au cuivre supposé conducteur parfait, nous écrivons que le contact est parfait en $x=0$ et $x=l$,

$T(x) = - \frac{I^2}{2\sigma S^2 d} x^2 + \frac{I^2 l}{2\sigma S^2 d} x + T_0$

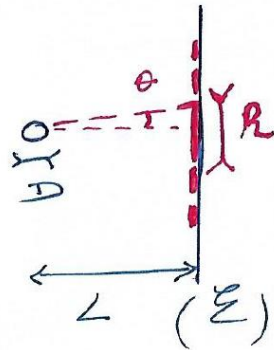
Le profil est parabolique avec T_{max} en



4. T_{max} atteint T_f (pour I_{max}) en $x = \frac{l}{2}$ en premier.

5. Il s'agit de déterminer D par diffraction: (3)

Source monochromatique (LASER) λ .



$$\theta = \frac{\lambda}{d} = \frac{\lambda/2}{L}$$

d'où $D = \frac{2L\lambda}{h}$

b. On a vu en 3. que $T_f = T_0 + \frac{I_{max}^2}{8\lambda\sigma^2}$

soit $\frac{I_{max}^2}{\sigma^2} = \frac{8\lambda\sigma}{L^2} (T_f - T_0) \left(\frac{\pi D}{4}\right)^2$

d'où on donne λ, σ, T_f pour les matériaux ainsi que $L = 3 \text{ cm}$.

on peut calculer $\alpha = \frac{8\lambda\sigma}{L^2} (T_f - T_0) \frac{\pi^2}{16}$ pour

les 3 :

	Pb	Ag	Al
α_i ($\text{A}^2 \text{m}^{-4}$)	$2,9 \cdot 10^{14}$	$1,4 \cdot 10^{14}$	$3,1 \cdot 10^{16}$

on teste alors $I_{max}^2 = \alpha_i D^4$ et on voit que c'est Al qui convient.

C.1. } h est en $\text{W K}^{-1} \text{m}^{-2}$ (4)
 B_i est $\left[D \text{ en m}, \lambda \text{ en } \text{W m}^{-1} \text{K}^{-1} \right.$
sans dimensions.

$B_i = \frac{hD}{\lambda} \approx \frac{h(T - T_0)}{\frac{\lambda}{D}(T - T_0)}$ avec

$h(T - T_0) = J_{conv}$ et $\frac{\lambda}{D}(T - T_0) \approx J_{diff}$

(puisque $J_{diff} = -\lambda \text{ grad } T$).

Donc $B_i \approx \frac{J_{conv}}{J_{diff}}$ comparable

flux par convection au flux par diffusion radiative.

C.2. $h \approx 10 \text{ W K}^{-1} \text{m}^{-2}$, D est de l'ordre de $100 \mu\text{m}$ et λ vaut $\approx 20 \text{ W m}^{-1} \text{K}^{-1}$ pour Al, soit $B_i \approx \frac{10 \cdot 10^{-4}}{200} \approx 5 \cdot 10^{-6}$ et $B_i \ll 1$.

C.3. on réalise un bilan sur la tranche de longueur dx en ajoutant le terme $-h(T(x) - T_0)\pi D dx$ au bilan

du B et on utilise le terme $\frac{\partial T}{\partial t}$ dt (5)
 puisque seul nous intéresser le régime
 stationnaire :

$$0 = [j(x) - j(x+dx)] S dt + \frac{1}{\sigma} \frac{dx}{S} I^2 dt - b(T(x) - T_0) \pi D dx dt$$

R: \leftarrow si $T(x) > T_0$
 ce qui est le reflet du
 sans effectif du transfert.

D'où avec la loi de Fourier et $S = \frac{\pi D^2}{4}$:

$$d \frac{\pi D^2}{4} \frac{dT}{dx^2} + \frac{I^2}{4 \sigma \pi D^2} - b(T - T_0) \pi D = 0$$

$$\frac{dT}{dx^2} + \frac{16 I^2}{\pi^2 D^4} - \frac{4b}{D} (T - T_0) = 0$$

$$\frac{d^2 T}{dx^2} + k^2 T_1 - k^2 (T - T_0) = 0$$

$$\text{et } \frac{d^2 T}{dx^2} - k^2 (T - T_0 - T_1) = 0$$

C.4. Les conditions aux limites correspon-
 dent encore à $T(0) = T(L) = T_0$ et la
 solution est de la forme :

$$T(x) = T_0 + T_1 + \alpha \operatorname{ch}(kx) + \beta \operatorname{sh}(kx) \quad (6)$$

$$\text{en } x=0 \quad T_0 = T_0 + T_1 + \alpha, \text{ soit}$$

$$\alpha = -T_1$$

$$\text{en } x=L \quad T_0 = T_0 + T_1 - T_1 \operatorname{ch}(kL) + \beta \operatorname{sh}(kL)$$

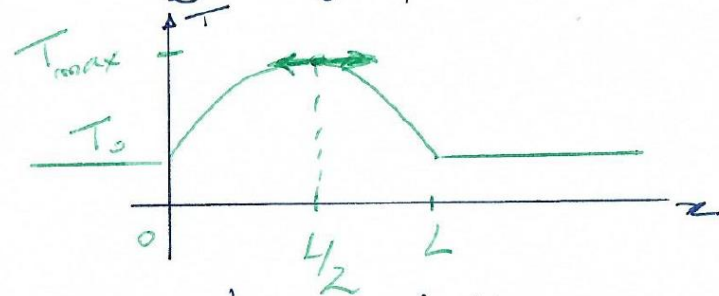
$$\text{soit } \beta = T_1 \frac{\operatorname{ch}(kL) - 1}{\operatorname{sh}(kL)}, \text{ soit}$$

$$T(x) = (T_0 + T_1) + T_1 \frac{\operatorname{ch}(kL) - 1}{\operatorname{sh}(kL)} \operatorname{sh}(kx) - T_1 \operatorname{ch}(kx)$$

$$T(x) = T_0 + T_1 \left[1 - \frac{\operatorname{sh}(kx) + \operatorname{sh}(k(L-x))}{\operatorname{sh}(kL)} \right] \text{ car}$$

$$\operatorname{ch}(kL) \operatorname{sh}(kx) - \operatorname{sh}(kL) \operatorname{ch}(kx) = -\operatorname{sh}(k(L-x))$$

C.5. on utilise la forme donnée qui
 montre la parité de la fonction autour
 de $x = \frac{L}{2}$ et le fait que $T_{\max} = T\left(\frac{L}{2}\right) = T_0 + T_1 \left(1 - \frac{1}{\operatorname{ch}\left(\frac{kL}{2}\right)}\right)$



C.6. Le transfert thermique par
rayonnement n'est pas pris en
 compte.

D.1. Si T est homogène, \dot{Q}_{convec} vaut (7)

$$\dot{Q}_{\text{convec}} = h(T(t) - T_0)$$

$$\text{et } \underline{\dot{Q}_{\text{convec}}} = h(T(t) - T_0) \underbrace{\pi D L}_{\text{Surface latérale totale}}$$

D.2. on applique le premier principe à la barre complète:

$$dH = \delta Q_P$$

$$dH = \mu \frac{\pi D^2}{4} L \cdot c \cdot dT$$

$$\delta Q_P = [-\dot{Q}_{\text{convec}} + RI^2] dt$$

$$\text{avec } R = \frac{1}{\sigma} \frac{L}{\pi D^2} \cdot 4$$

$$\text{soit } \underline{\frac{dT}{dt} + \frac{4h}{\mu DC} (T - T_0) = \frac{16 I^2}{\sigma \mu c (\pi D^2)^2}}$$

$$\text{D'où } \underline{T = \frac{4 I^2}{4h}}; \underline{T_2 = T_0 + \frac{4 I^2}{8 \sigma \pi^2 D^3}}$$

D.3. $\tau \approx \frac{2700 \cdot 64 \cdot 10^{-6} \cdot 857}{40} \approx 45$

$$\underline{T_2 = \frac{4 \cdot 1^2}{40 \cdot 3,81 \cdot 10^7 \cdot \pi^2 \cdot (64 \cdot 10^{-6})^3} \approx 4 \cdot 10^4 \text{ K}}$$

La température T_2 est très supérieure à la $T_{\text{fac}} \approx 900 \text{ K}$ donc le fusible va fondre.

• $h(T - T_0) \pi D L$ est à comparer à $RI^2 = \frac{4L}{\sigma \pi D^2} I^2$:

Prenons pour T la température T_{fac} .

$$10(933 - 293) \pi \cdot 64 \cdot 10^{-6} \cdot 3 \cdot 10^{-2} \approx 4 \cdot 10^{-2} \text{ W}$$

$$\frac{4L}{\sigma \pi D^2} \approx \frac{4 \cdot 9,03}{3,81 \cdot 10^7 \cdot \pi \cdot (64)^2 \cdot 10^{-12}} = 24 \cdot 10^{-2} \text{ W}$$

$\dot{Q}_{\text{Joule}} \approx 6 \times \dot{Q}_{\text{convec}}$ au moment de

la fusion; pour le début du processus avec $T \approx 400 \text{ K}$ par exemple $\dot{Q}_{\text{convec}} \approx 6 \cdot 10^{-3} \text{ W}$ on peut raisonnablement négliger

$\dot{Q}_{\text{convec}} \dots$

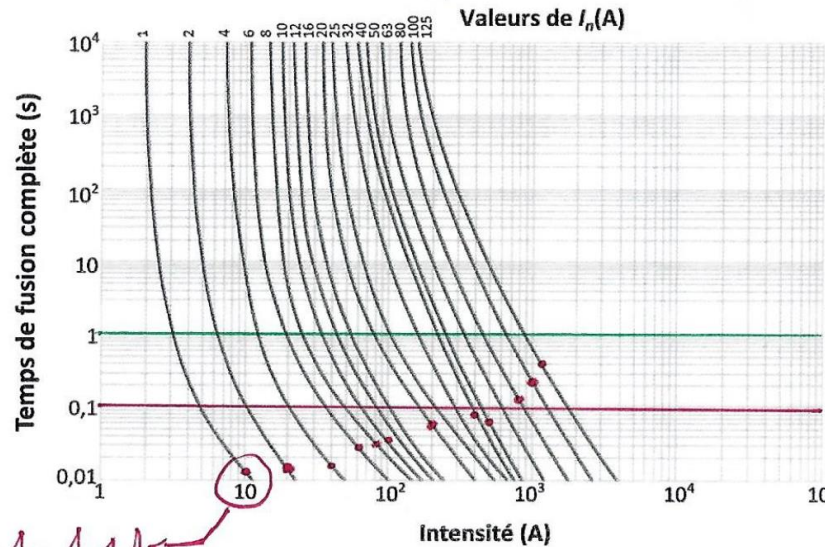
D.4. $m c dT = RI^2 dt$

$$\text{soit } \mu \frac{\pi D^2}{4} c (T_f - T_0) = \frac{4L}{\sigma \pi D^2} I^2 \frac{L}{4}$$

$$\underline{t_1 = \frac{\mu c \pi^2 D^4}{16 I^2} (T_f - T_0)} \cdot \text{AU: } \underline{t_1 = 6 \text{ ms}}$$

D.6. Les courbes tendent vers une asymptote verticale
 lorsque $I \rightarrow I_m$: $t_{\text{fusion}} \rightarrow \infty$ si $I \approx I_m$:

9



le fusible ne fond pas
 pour $I = I_m$ qui est sa
 valeur de "travail" ...

1s } Tous ces fusibles sont TT.
 100ms }
 10ms } Tous les fusibles
 de cette zone
 sont T

Figure 4 : Courbe de fusion de fusible

$I = 10 \times 1 = 10A$
 $t_f \approx 10ms$

- Les points portés sur les courbes correspondent à $I = 10 I_m$
 (pour 1, 2, 4, 6, 8, 12, 20, 40, 50, 80, 100, 125 A)
 (12, 16, 25, 32, 63 sont + difficiles à positionner ...)
- Par le calcul du D.S. on trouve
 $t_f = 10ms$. Et ici pour $I = 10 I_m = 10A$ on
 lit la même valeur sur la courbe $I_m = 1A$.

D.5. Pour faire fondre $\mu \frac{\pi D^2}{4}$ kg
 d'Al, il faut avec une puissance $R I^2$, un
 temps $R I^2 \Delta t = \mu \frac{\pi D^2}{4} \cdot c_{\text{fus Al}}$
 soit $\Delta t = \mu \frac{\pi D^2}{4 R I^2} c_{\text{fus Al}}$ avec $R = \frac{1}{\sigma} \frac{4L}{\pi D^2}$

$$\Delta t = \mu \sigma \frac{\pi^2 D^4}{I^2 16} c_{\text{fus Al}}$$

$\Delta t = 4ms$. Le fusible est de type F