


Question préliminaire : Retrouver rapidement les expressions du champ et du potentiel créés par une sphère de rayon R , uniformément chargée en surface, en point extérieur et en un point extérieur à celle-ci.

On considère la situation suivante :  Les deux sphères de rayon R_1 et $R_2 > R_1$ sont en contact ; elles portent les densités surfaciques uniformes σ_1 et σ_2 . Montrer que la relation liant les quantités R_2 , R_1 , σ_1 et σ_2 s'écrit : $R_2\sigma_2 = \sigma_1 R_1$.

En déduire que le champ au voisinage de la petite sphère est plus important que le champ au voisinage de la grande sphère ; en extrapolant ce résultat à des sphères en contacts successifs, on explique qualitativement la propriété de « pouvoir des pointes ».



Au voisinage de pointes électriques, le champ électrique est particulièrement intense, on parle de « pouvoir des pointes ».

Dans l'air, si la valeur du champ électrique dépasse la valeur du champ disruptif de l'ordre de $E_d \simeq 3 \times 10^6 \text{ V.m}^{-1}$, les molécules s'ionisent.

Lors d'une tempête orageuse, en présence d'une forte différence de potentiel entre les nuages et le sol, la décharge se produira plus favorablement au voisinage d'un conducteur de forme pointue relié au sol.

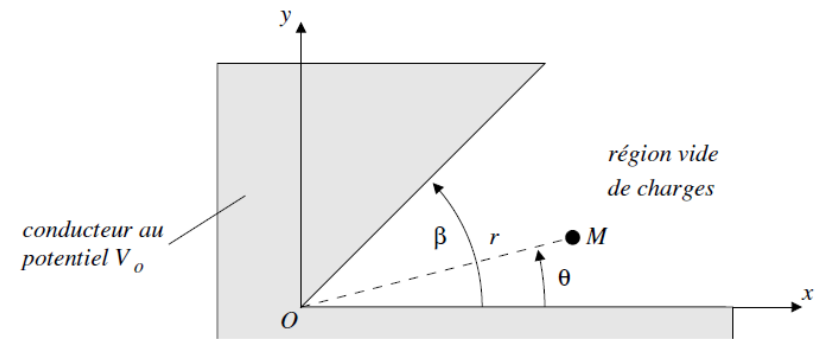
Ce concept est mis à profit dans les paratonnerres. « Le paratonnerre n'attire pas la foudre mais rend plus probable, grâce à l'effet de pointe, le parcours d'un claquage du diélectrique que constitue l'atmosphère. Ce claquage suit un parcours souvent initié par un précurseur. Le paratonnerre captera donc la foudre dans sa zone d'influence (zone de protection), mais les éclairs qui auraient eu tendance à tomber en dehors de cette zone continueront à le faire »¹ Ci-contre, la tour Eiffel heurtée par la foudre, 3 juin 1902, 21h20.



Dans la suite du problème, on s'intéresse aux caractéristiques du potentiel électrique et du champ électrostatique au voisinage d'un coin ou d'une pointe. On considère un problème plan (invariant selon la direction Oz) dans lequel deux conducteurs plans portés au potentiel V_0 s'interceptent avec un angle β . Le coin correspond à : $0 < \beta < \pi$, la pointe à : $\pi < \beta < 2\pi$. On adopte un système de coordonnées cylindriques et on cherche à déterminer le potentiel dans le domaine $r \in]0, +\infty[$ et $\theta \in]0, \beta[$.

On rappelle l'expression du Laplacien en coordonnées cylindriques pour une fonction $\Phi(r, \theta, z)$:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \Phi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} = 0$$



Représentation dans le cas d'un coin

Dans toute la suite, on ne cherche le potentiel que dans un voisinage de l'origine, la valeur du potentiel à grande distance étant imposée par des conditions aux limites sans intérêt pour le problème posé. En particulier, on ne cherchera pas à étudier les conséquences des conditions aux limites du type $r \rightarrow +\infty$.

1. Justifier que le potentiel électrostatique V ne dépende pas de la coordonnée z .

Pour la suite, on cherche une solution sous la forme : $V(r, \theta) = V_0 + f(r)g(\theta)$.

2. Montrer que $g''(\theta) = cste \times g(\theta)$ et $\frac{d}{dr} \left(r \frac{df(r)}{dr} \right) = -cste \times \frac{f(r)}{r}$, avec $cste$ une constante.

Par la suite, on considère uniquement le cas : $cste = -\nu^2$, avec ν un réel positif.

3. Montrer que les fonctions f et g sont de la forme :

$$\forall r \in]0, \infty[, f(r) = ar^\nu + br^{-\nu} \quad \text{et} \quad \forall \theta \in]0, \beta[, g(\theta) = A \cos(\nu\theta) + B \sin(\nu\theta)$$

4. En utilisant des conditions aux limites pertinentes, simplifier les expressions obtenues pour f et g et montrer en particulier que $\nu = \frac{m\pi}{\beta}$ avec m un entier positif.

5. Montrer que la solution la plus générale peut alors se mettre sous la forme :

$$V(r, \theta) = V_0 + \sum_{m=1}^{\infty} a_m r^{m\pi/\beta} \sin \left(\frac{m\pi\theta}{\beta} \right)$$

avec a_m des constantes indéterminées à ce stade.

Pour des points suffisamment voisins de l'origine, le premier terme du développement en loi de puissance domine (on le supposera non nul) et le potentiel prend la forme simplifiée :

$$V(r, \theta) = V_0 + a_1 r^{\pi/\beta} \sin \left(\frac{\pi\theta}{\beta} \right)$$

6. En déduire les composantes du champ électrique.

On donne le gradient en coordonnées polaires : $\frac{\partial V}{\partial r} \vec{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial \theta} \vec{e}_\theta$

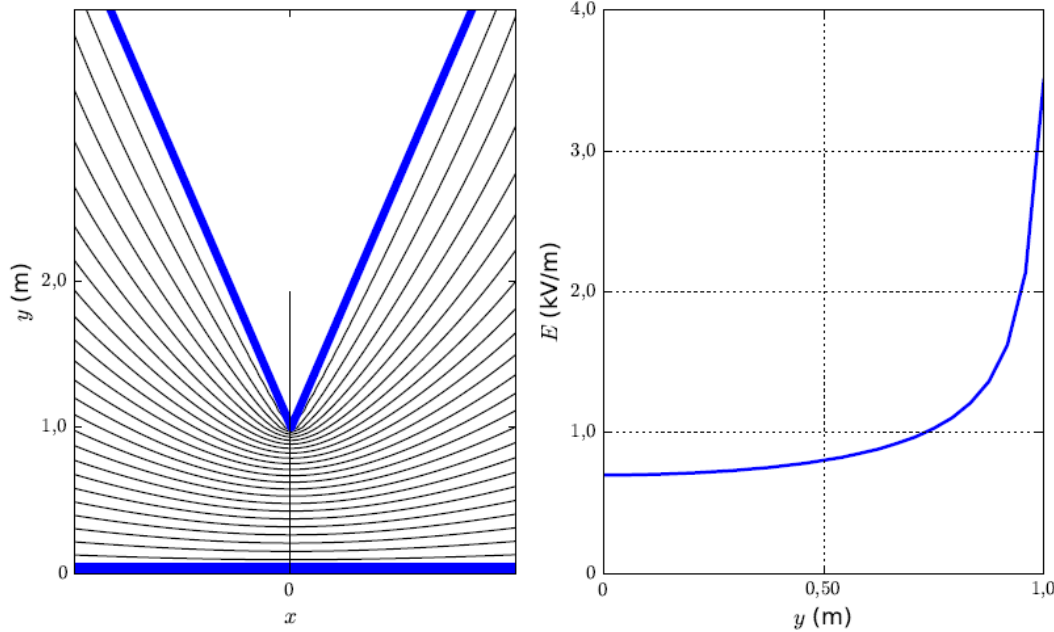
7. Que constate-t-on pour $E_\theta(r, \beta/2)$, $E_r(r, 0)$, $E_r(r, \beta)$?

Montrer que l'on peut retrouver ces résultats sans calcul.

8. On considère le cas d'une pointe : $\pi < \beta < 2\pi$. Que dire, dans ce cas, de $\lim_{r \rightarrow 0} \|\vec{E}\|$?

Commenter ce résultat en lien avec l'introduction.

Les graphiques suivants présentent la forme des équipotentielles et la norme du champ le long de l'axe de symétrie (Oy) lorsqu'on place une pointe conductrice au potentiel électrostatique $V_0 = 1,0 \text{ kV}$ à une distance $d = 1,0 \text{ m}$ d'un plan conducteur au potentiel nul.



9. Reproduire le schéma ci-dessus à gauche et superposer les lignes du champ électrostatique en expliquant soigneusement leur direction et leur sens. Indiquer quelles sont les zones de champ intense. Que devient ce schéma si on augmente l'angle de la pointe jusqu'à 180° ?

Commenter succinctement la courbe de droite.

10. On donne ci-dessous une photo d'un green de golf frappé par la foudre ; les zones les plus foncées correspondent à une brûlure du gazon ; proposez une explication des figures observées.



Ces figures portent le nom de figures de Lichtenberg.