PSI/PSI* 2021-2022

DS N°3 – 11/12/2021

4heures

Le texte est composé de trois parties totalement indépendantes qui peuvent être traitées dans l'ordre de votre choix. Merci de prévoir une nouvelle copie double lorsque vous changer de partie.

PARTIE I – Mécanique des fluides (Mines-Ponts – extrait)

Le sujet a été un peu remanié, les questions modifiées sont notées avec un * :

— La question 5 hors programme a été supprimée.

— Pour la question 8, au lieu de lire "En utilisant l'équation d'Euler de la mécanique des fluides...", lire "En faisant un bilan d'énergie mécanique à un système judicieusement choisi..."
Cette question est difficile, toute initiative rigoureuse sera valorisée.

— Pour la question 9, on procédera à une séparation des variables.
indication : $\dfrac{1}{v_0^2 - v^2} = \dfrac{1}{2v_0}\left(\dfrac{1}{v_0 - v} + \dfrac{1}{v_0 + v}\right)$ et on en déduira que

$$\frac{1 - v/v_0}{1 + v/v_0} = \exp(-\frac{t}{\tau})$$

— La question 13 amène à une équation ne pouvant se résoudre que numériquement : la solution est $D_v = 3$ L.s^{-1}

Q14,15 et 17 ont été rajoutées.

On ne se laissera pas démotiver par la difficulté de certaines questions, il y a des points à prendre jusqu'au bout!!

la viscosité de l'eau vaut 0.001 Pa.s

LUTTE CONTRE LES INCENDIES DE FORÊTS

33 000 hectares de forêts sont détruits par des incendies en moyenne chaque année en France. Les départements les plus touchés sont les 15 départements du Sud Est avec 25 600 hectares brûlés en moyenne par an (jusqu'à 62 000 hectares détruits en 2003 !). On y recense 2 450 départs de feu chaque année en moyenne, mais heureusement, 60 % des feux ne dépassent pas 1 ha de forêt détruite. La prévention au sol avec des patrouilles de surveillance et les moyens aériens permettent de limiter grandement les dégâts.

On se propose dans ce problème de découvrir de façon simple deux moyens de lutte contre les incendies de forêt. La première partie permet de mettre en évidence les possibilités des véhicules de patrouille tout terrain, armés pour intervenir sur les départs de feu. Ces véhicules sont parfois appelés véhicules Dangel. La deuxième partie aborde de façon sommaire les possibilités des avions bombardiers d'eau de type Canadair.

Dans tout le problème, l'eau sera considérée comme un liquide non visqueux, homogène, incompressible, de masse volumique ρ. L'air extérieur assimilé à un gaz parfait de température $T_0 = 288$ K de pression $p_0 = 1013$ hPa et de masse volumique ρ_0. On prendra pour l'air, une composition molaire de 20 % en O_2 et de 80% en N_2 et $\gamma = C_p/C_v = 1,4$. On rappelle la valeur des masses molaires de l'oxygène $M_O = 16 \times 10^{-3}$ kg.mol^{-1} et de l'azote $M_N = 14 \times 10^{-3}$ kg.mol^{-1} ainsi que la valeur de la constante molaire des gaz parfaits $R_{gp} = 8,31$ J.mol^{-1}.K^{-1}. L'accélération de la pesanteur g sera prise égale à $9,81$ m.s^{-2}.

I. — La lutte au sol

Les véhicules Dangel (voir figure 1) tout terrain sont un élément important de prévention des incendies. Effectuant des rondes quotidiennes dans les massifs forestiers, ils permettent une vigilance renforcée des lieux sensibles et peuvent opérer très rapidement, mais cependant de façon limitée, sur des départs de feu. Pour cela, ils sont équipés d'une citerne, réservoir d'eau supposé parallélépipédique à base carrée, indéformable et posé sur le plateau arrière horizontal du véhicule. La hauteur de ce réservoir est $H = 70$ cm, la longueur du coté de sa base est $L = 95$ cm.

I.A. — Étude du réservoir

Le remplissage du réservoir s'effectue grâce à une ouverture large (diamètre 30 cm) située au sommet du réservoir, fermée par un bouchon à vis. Sur la face arrière, légèrement au dessus du plateau, une ouverture permet plusieurs sorties : d'une part deux sorties auxiliaires avec vanne d'ouverture, d'autre part une sortie par l'intermédiaire d'une motopompe fixée sur le plateau délivrant une puissance maximale $\mathscr{P}_{\max}$ de 1170 W (environ 1,6 chevaux) qui permet le branchement et l'actionnement d'une lance. Enfin, au fond du réservoir, est aménagée une sortie pour la vidange, de section s faible.

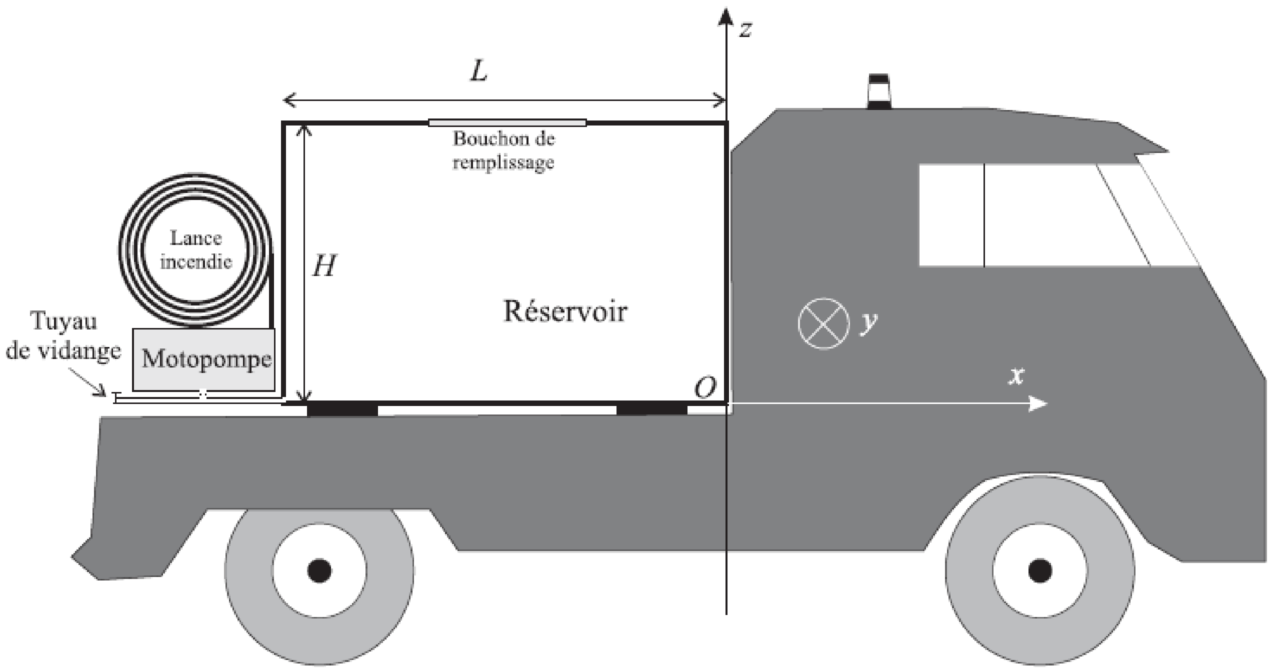

FIG. 1 – Véhicule d'intervention Dangel

Sauf cas particuliers explicités dans le texte, l'espace est rapporté à un système d'axes tels que l'axe Oz est ascendant vertical, l'axe Ox est horizontal, dirigé de l'arrière du véhicule vers l'avant, le point origine O étant choisi sur le plateau au niveau de la paroi arrière du réservoir (voir figure 1).

❑ **1** — Donner la définition d'une particule fluide, en précisant ses dimensions typiques. À quelle échelle d'étude se situe-t-elle ? Quel est son intérêt ? Qu'appelle-t-on en mécanique des fluides, un système ouvert, un système fermé ? Comment se nomment les représentations associées ? Rappeler les conditions d'application de la relation de Bernoulli.

❑ **2** — Le réservoir, initialement vide, toutes les sorties étant fermées, est partiellement rempli grâce à une borne à incendie en 1 min 29 s avec un débit moyen estimé à 6,6 litres par seconde. Déterminer la hauteur h_0 de l'eau dans le réservoir après remplissage. On négligera le volume du tuyau de vidange. On se place dans ces conditions de remplissage préalable dans toute la suite du problème.

❑ **3** — Déterminer la résultante des forces de pression qui s'exerce sur chaque flan vertical du réservoir.

❑ **4** — Le centre de poussée est le point d'application de la résultante des forces de pression qui donnerait le même moment par rapport à un point donné que le moment résultant des forces élémentaires de pression par rapport à ce même point. Déterminer la hauteur du centre de poussée de cette résultante sur un flan vertical.

I.B. — Vidange du réservoir

Le véhicule, à l'arrêt, est laissé en plein soleil en été, durant un certain temps ; la température de l'air à l'intérieur du réservoir s'élève à $T = 40°C$. La hauteur initiale d'eau est h_0 calculée à la question 2, on suppose que la température de l'air reste constante durant toutes les opérations. L'air contenu dans le réservoir est assimilé à un gaz parfait.

On souhaite tout d'abord étudier le cas hypothétique d'une vidange pour laquelle on laisserait le bouchon de remplissage en place et dans laquelle le tuyau de vidange n'est pas mis en place.

❑ **6** — Déterminer la pression p_i de l'air contenu dans le réservoir à l'instant où la vidange débute. Montrer que le réservoir se vide partiellement et que la hauteur d'eau h restant alors dans le réservoir est régie par une équation du second degré. Déterminer la valeur numérique de h, le volume d'eau ainsi vidangé et la pression finale p_f de l'air à l'intérieur du réservoir. Que risque-t-il de se passer si l'on procède ainsi ?

En pratique, on retire en fait le bouchon de remplissage et l'on branche un tuyau de vidange de section s faible disposé horizontalement, d'axe Ox, de longueur $\ell = 80$cm fermé à son extrémité par un robinet L'ensemble est représenté sur la figure 2. On ouvre le robinet de vidange à $t = 0$, la hauteur d'eau dans le réservoir, au dessus du niveau du tuyau, étant de h_0. On étudie dans un premier temps le régime transitoire pendant lequel on admet que la hauteur d'eau dans le réservoir reste constante et égale à h_0. On s'intéresse au champ de vitesse de l'eau dans le tuyau de vidange, noté $\overrightarrow{v(x,t)}$ et supposé uniforme sur chaque section.

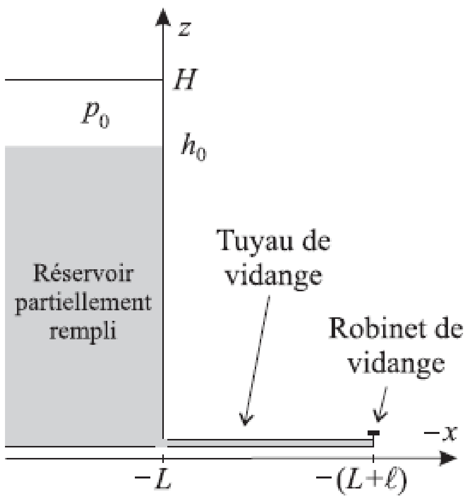

FIG. 2 – Vidange réservoir

❑ **7** — Montrer que $\overrightarrow{v(x,t)} = -v(t)\,\widehat{e_x}$ avec $v(t) \geq 0$.

❑ **8** — En utilisant l'équation d'Euler de la mécanique des fluides, montrer que, sous certaines hypothèses que l'on précisera, la fonction $v(t)$ est solution de l'équation différentielle

$$\ell\frac{dv}{dt} + \frac{v^2}{2} = k^2 \qquad (1)$$

où k^2 est une constante que l'on exprimera en fonction de g et h_0.

❑ **9** — Montrer que l'équation précédente admet une solution constante v_0. En vous aidant des indications, résoudre l'équation (1). On exprimera $v(t)$ en fonction des paramètres v_0 et $\tau = \dfrac{\ell}{\sqrt{2}k}$.

Déterminer la limite v_1 de v lorsque t tend vers + l'infini .

❑ **10** — Calculer la valeur de τ et du temps t_0 au bout duquel la différence relative entre la vitesse v et sa valeur limite v_1 devient inférieure à 1%.

❑ **11** — En précisant les hypothèses utilisées, déterminer le temps nécessaire t_v à la vidange totale du réservoir. Calculer t_v sachant que le tuyau possède un diamètre $\delta = 20$ mm.

I.C. — Fonctionnement de la lance à incendie

On s'intéresse maintenant au fonctionnement de la lance à incendie branchée sur la motopompe. La lance a une longueur de 50 m, son diamètre intérieur est $d_1 = 32$ mm et elle se termine par un petit embout conique dont le diamètre minimal intérieur est $d_2 = 14$ mm. On se place en régime permanent, le débit volumique de la motopompe est noté D_v et on néglige toutes les pertes de charges. (sauf Q15)

❑ **12** — À partir d'un bilan d'énergie, montrer que la puissance $\mathscr{P}$ que doit fournir la motopompe s'écrit dans le cas général :

$$\mathscr{P} = \rho\, D_v \left[\frac{v_s^2 - v_e^2}{2} + g\,(z_s - z_e) + \frac{p_s - p_e}{\rho}\right]$$

où les grandeurs indicées « s » correspondent aux grandeurs de sortie et celles indicées « e » aux grandeurs d'entrée du système choisi.

❑ **13** — L'embout de la lance est maintenu à 20 m au dessus du plateau du véhicule. Calculer le débit maximal $D_{v_{\max}}$ que pourra assurer la motopompe. En déduire la vitesse maximale de l'eau en sortie de lance. On calculera aussi la vitesse de l'eau dans la lance, avant l'embout.

En réalité l'eau est visqueuse, il est nécessaire de prendre en compte les frottements de l'eau sur les parois de la lance.

Q.14 Pour le débit de la lance étudiée, l'écoulement de l'eau est il laminaire ou turbulent?

Q.15 Les pertes de charges régulières induites se déterminent en utilisant le diagramme de Moody (cf annexe). L'expression des pertes de charge est fournie sur celui-ci. La rugosité relative vaut 0.001

En déduire la valeur des pertes de charges .
Déterminer la valeur de la puissance supplémentaire que doit posséder la motopompe pour compenser une perte de charge calculée.

❑ **16** À partir d'un bilan de quantité de mouvement, déterminer la force $\overrightarrow{F_e}$ exercée par l'eau sur l'embout conique de la lance lorsque cette dernière est horizontale. Calculer la valeur numérique du module de cette force pour le débit $D_{v_{\max}}$ obtenu à Q.13.

Q.17 A partir d'un bilan de quantité de mouvement , déterminer la force exercée par l'eau et l'air sur l'embout conique de la lance.
Calculer la valeur numérique du module de cette force pour le débit Dvmax obtenu à Q.13

On se place dorénavant dans un référentiel $\mathscr{R}' = (O', x', y', z')$ représenté sur la figure 3, supposé galiléen, dans lequel l'extrémité de la lance est inclinée d'un angle α par rapport à l'horizontale et se situe à la cote $z'_0 = 1$m.
On négligera la résistance de l'air et on fera l'hypothèse que le jet dont on néglige la section reste cohérent dans le plan $O'x'z'$.

❑ **18** — Déterminer l'équation $z' = z'(x')$ de la trajectoire des particules d'eau. On utilisera les paramètres g, tanα , z'_0 et v_s module de la vitesse initiale de ces particules.

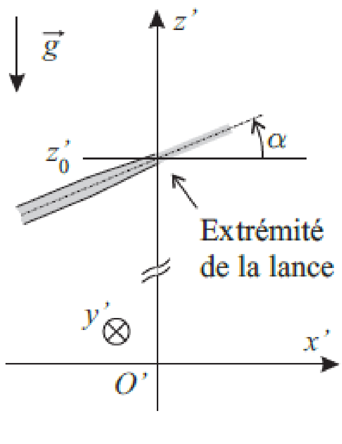

FIG. 3 – Configuration de l'extrémité de la lance.

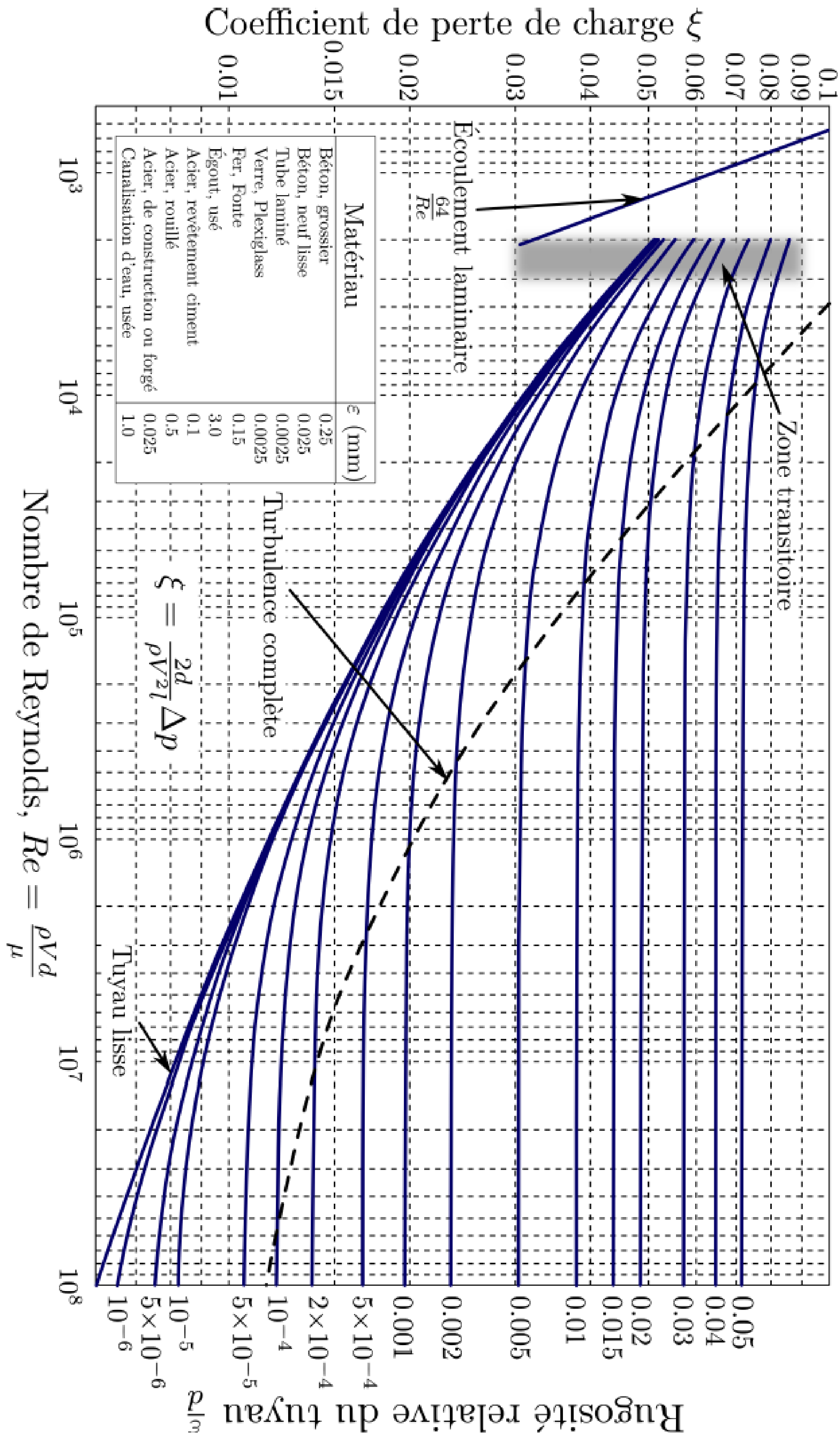
Diagramme de Moody
Coefficient de perte de charge ξ
Rugosité relative du tuyau $\frac{\varepsilon}{d}$
Nombre de Reynolds, $Re = \frac{\rho V d}{\mu}$
Écoulement laminaire $\frac{64}{Re}$
Zone transitoire
Turbulence complète
Tuyau lisse
$\xi = \frac{2d}{\rho V^2 l}\Delta p$
Matériau | ε (mm)
Béton, grossier | 0.25
Béton, neuf lisse | 0.025
Tube laminé | 0.0025
Verre, Plexiglass | 0.0025
Fer, Fonte | 0.15
Égout, usé | 3.0
Acier, revêtement ciment | 0.1
Acier, rouillé | 0.5
Acier, de construction ou forgé | 0.025
Canalisation d'eau, usée | 1.0

PARTIE II : TORNADE – D'après CCINP PSI

1. Enoncer les quatre équations de MAXWELL.
2. Retrouver l'équation de conservation de la charge à partir de deux des équations précédentes. On rappelle que div($\overrightarrow{rot}(\vec{A})$ = 0, pour un champ de vecteur $\vec{A}$ quelconque.
3. Indépendamment de la question précédente, et à partir d'un bilan de charge sur un volume élémentaire dτ, démontrer l'équation précédente pour une géométrie cartésienne unidimensionnelle (on appellera x la cordonnée correspondante).
4. Donner les analogies formelles permettant de transposer l'équation de la question 2. en une équation de conservation en mécanique des fluides.

On peut modéliser simplement une tornade (**photo 3**) en considérant l'air comme un fluide parfait en écoulement stationnaire et incompressible de masse volumique ρ_0. Cet écoulement est qualifié de rotationnel à l'intérieur d'un cylindre C d'axe Oz et de rayon R_T. On définit le vecteur tourbillon $\vec{\omega}$, tel que $\overrightarrow{rot}(\vec{v}) = 2\vec{\omega}$, où $\vec{v}$ est le champ des vitesses de l'écoulement.

On a : $\vec{\omega} = \omega\,\vec{e}_z$, avec $\begin{cases} \omega = \omega_0 \text{ pour } r < R_T \\ \omega = 0 \quad \text{pour } r > R_T \end{cases}$. ω_0 est une constante.

Photo 3 - Tornade

5. Que devient l'équation de conservation de la question 4. dans le cadre d'un écoulement stationnaire, incompressible homogène ?
6. Que deviennent les équations de Maxwell relatives au champ magnétique en régime stationnaire ? Les comparer aux équations locales vérifiées par le champ des vitesses.
7. A partir de l'une d'elles, démontrer le théorème d'Ampère. Toujours à partir des analogies de la question 4., donner l'équivalent du théorème d'Ampère en mécanique des fluides, avec les hypothèses de stationnarité et d'incompressibilité.
8. Déterminer le champ des vitesses pour un point quelconque de l'espace, en appliquant soigneusement ce théorème. Tracer la fonction v(r).
9. Rappeler les hypothèses d'application du théorème de Bernoulli. On suppose que ces hypothèses sont valables dans la zone $r > R_T$. En considérant la pression de l'air égale à P° loin du cyclone, préciser l'expression de la pression $P(R_T)$ à la surface de la tornade, en fonction de P°, ρ_0, ω_0 et R_T.
10. Évaluer dans le cadre de ce modèle simplifié la dépression $\Delta P = P° - P(R_T)$ pour des vents de 180 km/h à la surface de la tornade en R_T. On donne ρ_0 = 1,2kg/m^3.
11. La masse d'une tuile en terre cuite est d'environ 2,8 kg. Le faible recouvrement offre une densité surfacique de masse réduite de la couverture, de l'ordre de 40 kg·m^{-2}. Justifier de la nécessité du collage des tuiles sur le toit dans les zones particulièrement ventées.