DS N°4 – 14/12/2019 – Quatre heures

I. ANALYSE DOCUMENTAIRE : LE SYSTEME TERRE - ELECTROSPHERE

Document 1 : Equilibre électrostatique Terre - Electrosphère

D'après le livre de Robert Delmas, Serge Chauzy, Jean Marc Verstraete, Hélène Ferré ***Atmosphère, océan et climat*** *- Pour la science - Belin*

L'environnement atmosphérique terrestre possède des caractéristiques électrostatiques. La partie de cette atmosphère, située au-delà d'une altitude de 60 km environ, est appelée ionosphère ; sous l'effet de l'ionisation de ses composants par le rayonnement solaire elle a une conductivité suffisante pour être considérée comme un conducteur.

A l'altitude h = 60 km on définit donc une sphère, appelée électrosphère, chargée positivement en surface avec une charge totale + Q correspondant à une densité surfacique de charge uniforme σ. La Terre, supposée sphérique de rayon R = 6 400 km et de centre O est elle aussi assimilée à un conducteur portant une charge totale - Q uniformément répartie en surface.

Par contre, la couche d'atmosphère comprise entre 0 et 60 km d'altitude est essentiellement isolante ; en réalité, l'air est faiblement conducteur et un faible courant de fuite (dit de beau temps) circule dans l'atmosphère et tend à décharger la Terre. Ce sont les phénomènes de convection dans les nuages orageux qui compensent par des transferts de charges ce courant de fuite et maintiennent une différence de potentiel de 360 kV entre la Terre et l'électrosphère.

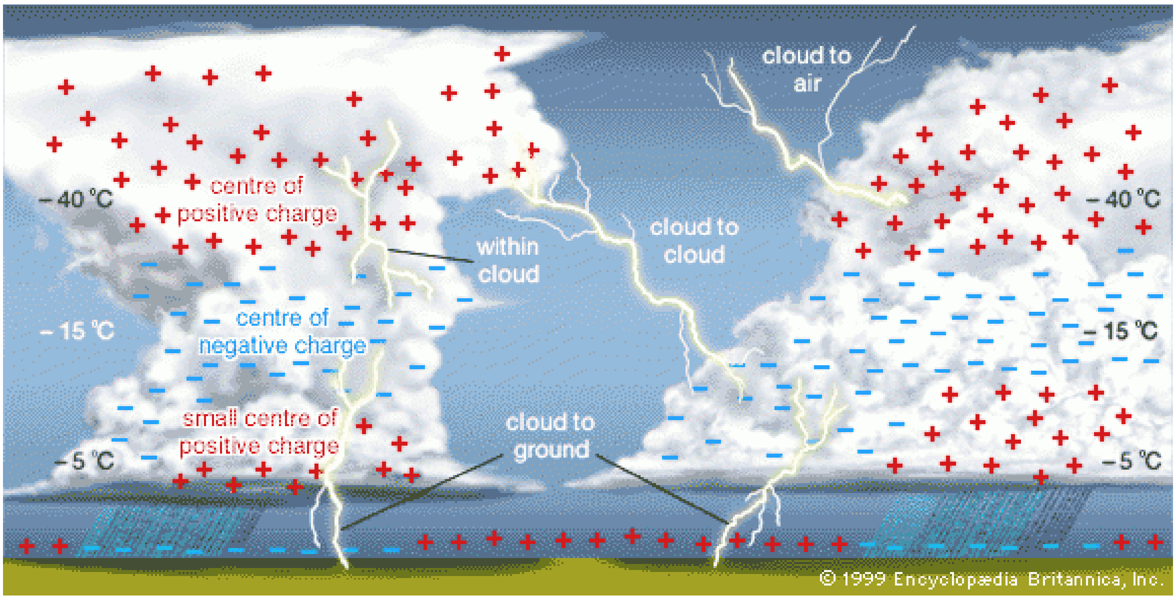
L'état électrique moyen de ce système correspond donc à un équilibre dans lequel la Terre porte une charge globale négative de 550 000 C, essentiellement répartie à sa surface.

La différence de potentiel moyenne de 360 kV engendrée par la répartition des charges crée un champ électrique qui s'exprime en V/m.

Par beau temps, en l'absence de nuage, ce champ électrique dirigé vers le centre de la Terre possède une intensité maximale de l'ordre de 100 à 120 V/m.

Document 2 - La foudre : éclair et tonnerre

D'après le livre de Robert Delmas, Serge Chauzy, Jean Marc Verstraete, Hélène Ferré ***Atmosphère, océan et climat*** *- Pour la science - Belin*



Cumulonimbus d'orage

Suite aux perturbations atmosphériques et sous certaines conditions, il se forme des nuages orageux en général du type cumulonimbus.
Ils constituent une gigantesque machine thermique dont la base et le sommet sont, respectivement, à environ 1 km et 15 km d'altitude ; le sommet est à une température bien plus basse que la base.
Sa constitution est rendue possible par l'élévation d'air chaud par des courants ascendants dont la vitesse est de quelques mètres par seconde.

Lors de son ascension, cette masse d'air se charge en humidité jusqu'à devenir un nuage dans lequel se répartissent des microparticules de glace et des particules de grésil (gouttes d'eau gelées de 1 à 3 mm). Les microparticules de glace, plus légères, restent en suspension alors que le grésil subit la gravité.

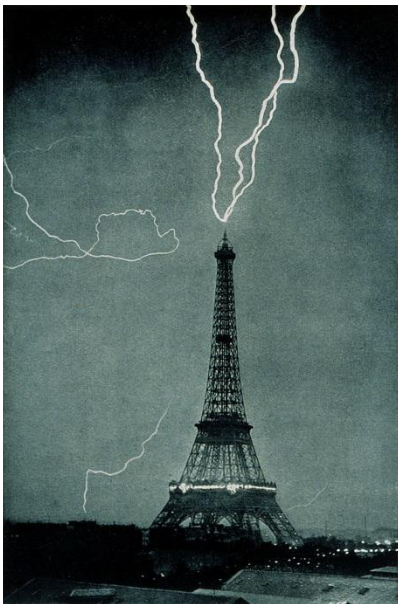
Durant un orage, les flux d'air ascendants et descendants dans les nuages provoquent des collisions entre microparticules de glace et particules de grésil. Ces collisions entraînent des séparations de charge.

Pour une température supérieure à T_c, ce sont les particules de grésil qui se chargent positivement, les microparticules de glace négativement. Pour une température inférieure à T_c, c'est le contraire. T_c dépend essentiellement de la quantité d'eau liquide surfondue présente dans le nuage.

En conséquence, le schéma électrostatique le plus courant pour le cumulonimbus est celui d'un tripôle électrostatique : la partie centrale chargée négativement est le plus souvent comprise entre deux régions chargées positivement, l'une occupant tout le sommet, l'autre à la base du nuage comme le montre la schématisation ci-dessus.

Il en résulte l'apparition d'une différence de potentiel entre la base du nuage et le sol, qui augmente au fur et à mesure de la séparation des charges dans le nuage. Quand le champ électrique associé est trop important, il y a ionisation de certaines zones du nuage, donc apparition d'éclairs qui se propagent dans l'air en formant des canaux conducteurs, d'abord dans le nuage, puis entre le nuage et le sol : c'est le précurseur. Le plus souvent, une décharge de connexion avec la Terre démarre d'un objet saillant (arbre, bâtiment élevé, tour, pylône) et rejoint le précurseur venant du nuage : le circuit électrique se ferme ainsi et apparaît l'arc en retour, onde de courant très intense qui parcourt le canal conducteur depuis le sol jusqu'à la poche de charge à l'origine de l'éclair. Ce courant très intense provoque un effet Joule important (la température locale peut atteindre 30 000°C) qui dilate l'air brutalement, engendrant une onde de choc : c'est le tonnerre.

<u>Document 3</u> : Photographie prise à 21 h 20 le 3 juin 1902



<u>En analysant les documents suivants et en utilisant vos connaissances en électrostatique, répondez aux questions suivantes :</u>

1) On considère un conducteur à l'équilibre électrostatique. Justifier le caractère équipotentiel de ce conducteur.

2) On assimile la permittivité de l'atmosphère à celle du vide, soit $\varepsilon_0 = 8{,}85.10^{-12}$ SI.
Justifier la modélisation du système Terre/électrosphère comme un condensateur sphérique dont on précisera sur un schéma les caractéristiques (on reprendra les notations du document 1, soit R, h, Q, σ). En particulier, justifier le choix d'une répartition surfacique des charges adoptée comme modèle pour la Terre et l'électrosphère.
Donner l'expression de σ, densité surfacique de charge, en fonction des données.

3) Définir par un schéma clair le système de coordonnées utilisé pour traiter cette modélisation (on fera figurer les vecteurs de base).

4) Etudier les propriétés de symétrie et d'invariance de la distribution de charge. En déduire les caractéristiques principales du vecteur champ électrostatique créé. Qu'en est-t-il pour le potentiel correspondant ?

5) Appliquer le théorème de Gauss à une surface dont le choix sera clairement justifié pour déterminer ce champ pour r compris entre R et R + h.

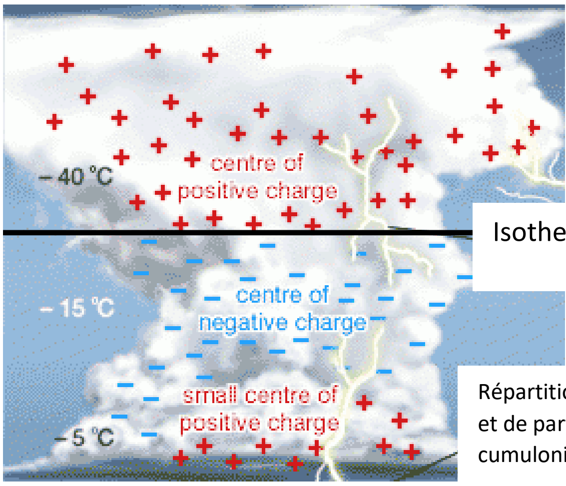
6) On note V_h le potentiel de l'électrosphère. Déterminer le potentiel V à l'altitude $z = r - R$, où $0 < z < h$, en fonction de z, V_h, R, et h. On prendra l'origine des potentiels à la surface de la Terre. En déduire le sens des lignes de champ et vérifier la cohérence avec le document 1.

7) Déterminer la charge portée par la Terre en fonction de R, h et V_h. Faire l'application numérique en utilisant les données du document 1 et comparer à la valeur donnée.

8) Déterminer la capacité C ainsi que de l'énergie électrostatique W_{elec} du système Terre/électrosphère.

9) Déterminer numériquement W_{elec}, Q et le champ électrique au niveau du sol. Ces dernières valeurs sont-elles cohérentes avec celles données dans le document 1 ? Sinon quelles sont à votre avis les hypothèses à remettre en cause ?

10) Quel est le moteur du mouvement des différentes particules dans le nuage ? Justifier alors la structure de tripôle décrite dans le document ; indiquer sur le schéma ci-dessous la position des microparticules de glace et des particules de grésil et justifier les signes des charges correspondantes.



Répartition de charges et de particules dans le cumulonimbus

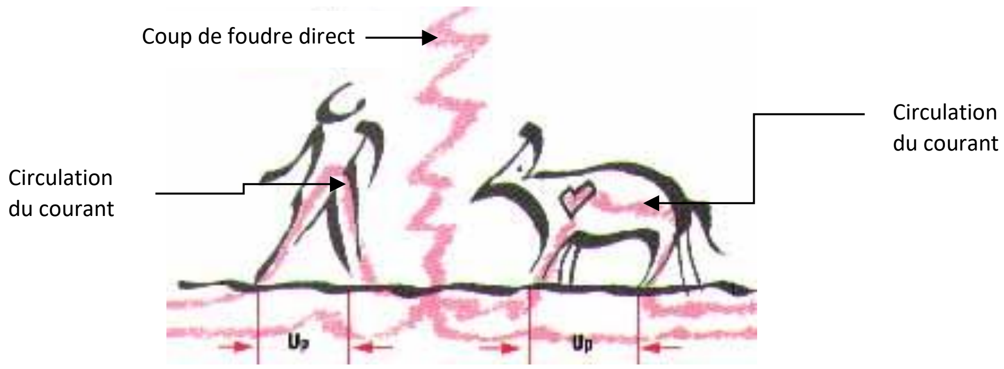
11) On considère que la base du nuage a une surface $S \approx 10^6\ m^2$ et qu'elle est située à une altitude de 1 km par rapport au sol. Par une modélisation adaptée du système Terre-nuage dont on discutera la pertinence et les limites donner l'ordre de grandeur de la valeur limite U_{bslim} au-delà de laquelle un éclair est généré. Quel est alors l'ordre de grandeur de la charge Q_b portée par la base du nuage ? On indique que le claquage de l'atmosphère se produit pour un champ E = 300 kV/m.

12) On cherche à justifier l'affirmation du document 2 : « *Le plus souvent, une décharge de connexion avec la Terre démarre d'un objet saillant (arbre, bâtiment élevé, tour, pylône)* ». Pour cela, on considère deux conducteurs sphériques de rayons R_1 et R_2 avec $R_1 < R_2$ reliés entre eux par un fil conducteur.
Exprimer le quotient des champs électriques E_1 et E_2 au voisinage de la surface des conducteurs en fonction de R_1 et R_2. Qu'en déduit-on si $R_2 >> R_1$? Interpréter alors la phrase extraite du document 2.

13) En quoi la photo du document 3 illustre-t-elle ce phénomène appelé pouvoir des pointes ? Connaissez-vous d'autres illustrations ou applications de ce phénomène ?

14) Reproduire rapidement la forme de la tour Eiffel sur votre copie et dessiner l'allure des lignes de champ et des surfaces équipotentielles qui permet d'illustrer les différences d'intensité du champ électrique en divers points à la surface de la tour.

15) 725 000 éclairs nuage-sol ont été enregistrés en France en 2018. Chaque année ces éclairs frappent 100 à 300 personnes et sont la cause de 8 à 15 morts, de 20 000 animaux foudroyés, de 15 000 incendies et de centaines de millions d'euros de dégâts matériels.
Il est très rare que les personnes ou les animaux soient tués par foudroiement direct. En fait l'électrocution provient d'un courant dérivé qui traverse le sol quand les échanges de charge ont lieu entre la Terre et le nuage (voir figure ci-dessous).
Expliquer, en modélisant le sol comme un conducteur ohmique et en se servant du schéma pourquoi un animal a une probabilité supérieure à celle d'un homme d'être foudroyé. On appelle « tension de pas », U_P, la différence de potentiel correspondant à la distance qui sépare les pieds des humains ou les pattes des animaux (cf. schéma).



II. Electrostatique et gravitation (d'après Centrale et Banque PT)

Données utiles à la résolution

Permittivité électrique du vide	$\varepsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12}\ \mathrm{F \cdot m^{-1}}$
Masse de la Terre :	$M_T = 6{,}0.10^{24}\ kg$
Masse du Soleil :	$M_S = 2{,}0.10^{30}\ kg$
Rayon terrestre moyen :	$R_T = 6{,}4.10^{6}\ m$
Rayon solaire moyen :	$R_S = 7{,}0.10^{8}\ m$
Rayon moyen de l'orbite de la Terre autour du Soleil :	$L = 1{,}5.10^{11}\ m$
Durée d'une révolution du Soleil sur lui-même :	$\Theta_S = 2{,}6.10^{6}\ s$
Constante de gravitation universelle :	$G = 6{,}67.10^{-11}\ N.m^2.kg^{-2}$
Constante des gaz parfaits :	$\mathfrak{R} = 8{,}31\ J.K^{-1}.mol^{-1}$
Constante d'Avogadro :	$Na = 6{,}02.10^{23}.mol^{-1}$
Masse molaire de l'élément hydrogène :	$M_H = 1{,}0.10^{-3}\ kg.mol^{-1}$
Vitesse de la lumière dans le vide :	$c = 3{,}00.10^{8}\ m.s^{-1}$

Première partie : Champ électrostatique et champ de gravitation

1. Enoncer l'équation de Maxwell-Gauss et en déduire l'expression générale du théorème de Gauss.
2. On considère une sphère de centre O et de rayon R, uniformément chargée en volume. On note Q la charge totale qu'elle porte.
   a. Indiquer quels sont les plans de symétrie de cette distribution de charge. En déduire la direction du champ électrostatique qu'elle produit en un point M quelconque de l'espace.
   b. Indiquer quelles sont les invariances de cette distribution ; en déduire la dépendance du champ qu'elle produit vis-à-vis des coordonnées d'espace.
   c. Calculer alors l'expression du champ créé par la distribution en tout point M de l'espace.
3. En déduire l'expression du potentiel électrostatique U(M) en tout point de l'espace ; on choisira arbitrairement U nul à l'infini.
4. Quelle est l'expression de l'énergie potentielle d'interaction, E_1, entre la distribution de charge précédente et une charge ponctuelle q placée en un point M situé à une distance r de son centre.
5. On rappelle que l'énergie volumique électrostatique associée à un champ $\overrightarrow{E(M)}$ est donnée par l'expression $\frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2(M)$. Montrer alors que l'énergie propre électrostatique, notée E_2, de la sphère chargée précédente peut s'écrire $E_2 = \frac{kQ^2}{4\pi\varepsilon_0 R}$; déterminer k.

6. Analogie électrostatique-gravitation

i. Dresser un tableau présentant les analogies entre les grandeurs électrostatiques et les grandeurs gravitationnelles. En déduire le théorème de Gauss pour le champ gravitationnel créé par une distribution de masses quelconques.

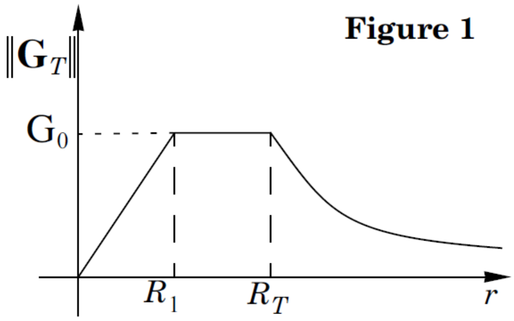
ii. Application : dans un premier temps, on assimile la Terre à une sphère de centre O, de rayon R_T et de masse M_T uniformément répartie dans tout le volume.

a) Déterminer le champ gravitationnel terrestre $\mathbf{G}_T$ en tout point M de l'espace et représenter graphiquement $\|\mathbf{G}_T\|$ en fonction de $r = OM$.

b) Calculer $G_0 = \|\mathbf{G}_T\|$ à la surface de la Terre.

En réalité la masse M_T n'est pas uniformément répartie. Dans un modèle plus élaboré dans lequel on suppose la symétrie sphérique conservée, les variations de $\|\mathbf{G}_T\|$ sont représentées sur la figure 1 avec $R_1 = 3,50 \cdot 10^3$ km.

Figure 1



c) Justifier que le champ gravitationnel à la surface de la Terre n'est pas modifié.

d) Justifier que dans ce modèle, on considère le noyau terrestre $(0 < r < R_1)$ comme homogène. Calculer sa masse volumique moyenne.

e) Prévoir qualitativement si la masse volumique est une fonction croissante ou décroissante dans le manteau, c'est-à-dire pour $R_1 < r < R_T$. Donner l'expression de la masse volumique du manteau : $\mu_{manteau}(r)$.

iii. On revient à la description du ii.a) d'une Terre dont la masse M_T est uniformément répartie en volume.

Application numérique : calculer l'intensité g_{ST} du champ de gravitation créé par le Soleil à la surface de la Terre puis l'intensité g_{TS} du champ de gravitation créé par la Terre à la surface du Soleil.

Déterminer l'énergie d'interaction gravitationnelle entre la Terre supposée ponctuelle et le Soleil.

Application numérique.

Déterminer l'énergie propre gravitationnelle du Soleil et de la Terre, notées respectivement E_{2S} et E_{2T}.

Application numérique : calculer ces énergies ainsi que l'énergie E_{2TS} de l'ensemble Terre-Soleil en négligeant, pour le calcul de l'énergie d'interaction, leurs rayons devant la distance qui les sépare. Commenter les résultats.

Deuxième partie : Stabilité d'une étoile sphérique

II.1. <u>Stabilité thermique</u>.

On utilise le modèle d'une étoile sphérique homogène de rayon R et de masse M constituée d'atomes d'hydrogène de masse molaire M_H dans l'état de gaz parfait en équilibre thermique à la température uniforme T. Chaque atome possède l'énergie cinétique $e_c = \frac{3}{2}kT$ avec $k = \frac{\Re}{Na}$.

II.1.1. Calculer l'énergie cinétique E_C de l'étoile.

II.1.2. On rappelle que pour qu'un système soit stable mécaniquement, il faut que son énergie mécanique totale reste négative : les composantes du système sont alors dans un état lié.
En déduire une condition suffisante pour que le rayon du soleil reste fini, c'est-à-dire pour que le soleil ne soit pas en expansion infinie.

II.1.3. En déduire la valeur maximale de la température T qui satisfait la condition précédente.

II.1.4. Application numérique : calculer cette température maximale.

II.2. <u>Stabilité dynamique</u>.

On utilise le modèle d'une étoile sphérique homogène de rayon R et de masse M en rotation propre de période constante autour de l'un de ses diamètres et constituée par un gaz de particules entraînées à la même vitesse angulaire que celle de l'étoile.

On note Ω la vitesse angulaire ci-dessus.

II.2.1. Déterminer la vitesse minimale que doit acquérir un objet à la surface de l'étoile pour être libéré de celle-ci (on pourra utiliser le rappel de II.1.2.)

II.2.2. Montrer alors que la condition de stabilité dynamique de l'étoile est $\Omega < \Omega_{\text{lim}} = \sqrt{\frac{2GM}{R^3}}$.

II.2.3. Application numérique : le Soleil vérifie-t-il la condition de stabilité dynamique? Justifier votre réponse par des valeurs numériques.

II.2.4. Que se passe-t-il pour une étoile lorsque la vitesse de libération est supérieure à la vitesse de la lumière? Quelle est la condition sur le rapport $\frac{M}{R}$ pour de tels corps? En déduire la condition sur la masse volumique de l'étoile.

II.2.5. Application numérique : calculer, pour une étoile de rayon R_S, la masse volumique minimale pour que la vitesse de libération soit supérieure à la vitesse de la lumière. Commenter cette valeur numérique.

II.3. <u>Aspect hydrostatique</u>.

On utilise le modèle d'une étoile sphérique de rayon R et de masse M, sans rotation propre, dont la masse volumique $\rho(r)$, la pression interne $P(r)$ et la température $T(r)$ ne dépendent que de la distance r au centre de l'étoile. De plus, l'étoile est assimilée à un gaz parfait constitué d'atomes d'hydrogène en équilibre hydrostatique, c'est-à-dire que chaque élément de volume de matière dV est en équilibre sous l'effet des forces gravitationnelles et des forces de pression.

II.3.1. Rappeler la relation fondamentale de la statique des fluides.

II.3.2. Montrer que $\frac{dP}{dr} = -G\,\frac{\rho(r)M(r)}{r^2}$ où *M(r)* est la masse contenue dans la sphère de rayon r.

II.3.3. **Résolution de problème**

On souhaite obtenir un ordre de grandeur pour la température T_C au centre du soleil.
Proposer un modèle simple, utilisant notamment les hypothèses et résultats précédents, qui permette de calculer numériquement cette valeur.
Toutes les propositions cohérentes seront prises en compte dans le barème.
Pour information, on indique que la valeur actuellement admise est de l'ordre de 15 millions de °C ; vous pourrez ainsi la confronter avec votre résultat.