

①

II. A.

1) a) Il n'y a pas de courant entre les plaques soit $j = 0$
 et $\nabla \cdot \vec{B}_1 = \frac{1}{c^2} \frac{\partial E_0}{\partial t} = -\frac{1}{c^2} E_0 \omega \sin \omega t$, ou
 encore en notation complexe: $\nabla \cdot \vec{B}_1 = \frac{i\omega}{c^2} \vec{E}_0$.

b) Tous les plans contenant l'axe z sont des plans de symétrie de $\vec{E}_0$ qui aie $\vec{B}_1$ (par $\frac{1}{c^2} \frac{\partial \vec{E}_0}{\partial t}$) donc $\vec{B}_1$ est $\perp$ à ces plans, d'où $\vec{B}_1 = B_1 \vec{e}_\theta$.

c) $\oint_{C_1} \vec{B}_1 \cdot d\vec{e} = \frac{1}{c^2} \iint \frac{\partial \vec{E}_0}{\partial t} \cdot d\vec{S}$ en utilisant M.A. et le théorème de STOKES. Pensez au permutoir $\frac{\partial}{\partial t}$ et $\iint$.

$$\oint_{C_1} \vec{B}_1 \cdot d\vec{e} = \frac{1}{c^2} \frac{d}{dt} \iint \vec{E}_0 \cdot d\vec{S}.$$

$$\text{Soit } 2\pi r \vec{B}_1 = \frac{1}{c^2} i\omega E_0 e^{i\omega t} \pi r^2 \vec{e}_\theta$$

$$\text{Soit } \vec{B}_1 = i \frac{\omega}{c^2} E_0 \vec{e}_\theta \text{ avec } X = \frac{\omega r}{2c^2}.$$

$$X \text{ est sans dimension: } \frac{\omega (s^{-1}) r (m)}{c^2 (m s^{-1})}.$$

$$\text{2) a) } \nabla \times \vec{E}_2 = - \frac{\partial \vec{B}_1}{\partial t} \quad (\text{car } \nabla \times \vec{E}_0 = 0). \quad \text{②}$$

$$\text{Soit } \nabla \times \vec{E}_2 = - \frac{\partial \vec{B}_1}{\partial t} = + \omega \frac{\omega}{c^2} E_0 \vec{e}_\theta$$

b) Tous les plans contenant oz sont des plans d'antisymétrie de $\frac{\partial \vec{B}_1}{\partial t}$ donc $\vec{E}_2$ est contenu (not) dans ces plans on peut le choisir axial (comme $\vec{E}_0$).

$$\text{c) } \oint_C \vec{E}_2 \cdot d\vec{e} = -E_2(l_2)a + E_2(l_1)a \cdot 0z$$

$$\oint_C \vec{E}_2 \cdot d\vec{e} = \iint_S \nabla \times \vec{E}_2 \cdot d\vec{S} = \iint_S - \frac{\partial \vec{B}_1}{\partial t} \cdot d\vec{S} = - \frac{d}{dt} \iint_S \vec{B}_1 \cdot d\vec{S}$$

$$\vec{B}_1(r, t) \text{ donc } \iint_S \vec{B}_1 \cdot d\vec{S} = \int_0^a dz \int_{r_1}^{r_2} i \frac{\omega}{c^2} E_0 r dr$$

$$\iint_S \vec{B}_1 \cdot d\vec{S} = E_0 a \int_{r_1}^{r_2} \frac{\omega i}{2c^2} r dr = i \frac{\omega E_0 a}{2c^2} \left[\frac{r^2}{2} - \frac{r_1^2}{2} \right]$$

$$\text{et } - \frac{d}{dt} \left[i \frac{\omega E_0}{2c^2} \left(\frac{r_2^2}{2} - \frac{r_1^2}{2} \right) \right] = \frac{\omega^2}{2c^2} E_0 \left(\frac{r_2^2}{2} - \frac{r_1^2}{2} \right) a$$

$$\text{Finalement, } E_2(r_2) - E_2(r_1) = \frac{\omega^2}{2c^2} \left(\frac{r_2^2}{2} - \frac{r_1^2}{2} \right) E_0.$$

pour $r_2 = 0$, prenons $E_2(r_2 = 0) = 0$, et il vient alors pour $r = r_1$ quelconque:

$$E_2(r) = - \frac{\omega^2 r^2}{4c^2} E_0; \quad E_2 = - \left(\frac{\omega r}{2c^2} \right)^2 E_0; \text{ soit}$$

$$\vec{E}_2 = - X^2 \vec{E}_0 \quad \text{puisque } \vec{E}_2 \text{ et } \vec{E}_0 \text{ sont axiaux}$$

II B. 1) $\left\{ \begin{aligned} \vec{B}_{af} &= \vec{B}_1 = \frac{iX}{2} \underline{E}_0 \vec{u}_0 \\ \vec{E}_{af} &= \vec{E}_0 + \vec{E}_2 = \underline{E}_0 (1 - X^2) \end{aligned} \right. \quad (3)$

(Tous les termes de $\vec{E}_3, \dots, \vec{B}_2, \dots$ seraient au moins d'ordre 3 en X).

2) $\mathcal{E}_e(t) = \frac{1}{2} \underline{E}_0 \underline{E}^t = \frac{1}{2} \underline{E}_0^2 (1 - X^2)^2 \cos^2 \omega t.$

soit au second ordre en X :

$\mathcal{E}_e(t) = \frac{1}{2} \underline{E}_0^2 (1 - 2X^2) \cos^2 \omega t.$

$\mathcal{E}_m(t) = \frac{1}{2 \mu_0} B^2 = \frac{1}{2 \mu_0} \frac{X^2}{c^2} \underline{E}_0^2 \sin^2 \omega t$ car

$\vec{B}_1 = -\frac{X}{c} \underline{E}_0 \sin \omega t \vec{e}_\theta.$

soit $\mathcal{E}_m(t) = \frac{1}{2} \underline{E}_0^2 X^2 \sin^2 \omega t.$

b) la valeur moyenne temporelle de $\cos^2 \omega t$ vaut $\frac{1}{2}$ de même que celle de $\sin^2 \omega t$. Donc.

$\langle \mathcal{E}_m(t) \rangle = \frac{X^2}{1 - 2X^2} \approx X^2 \ll 1.$

$\langle \mathcal{E}_e(t) \rangle$

L'énergie magnétique est négligeable devant l'énergie électrique pour un condensateur fonctionnant à basses fréquences: on pourra considérer que $\vec{E} \approx \vec{E}_0$

et $\vec{B} \approx \vec{0}$. C'est l'hypothèse implicite qui régit toute l'étude des régimes variables dans les circuits électrocinétiques comportant des condensateurs à BF (cf. 1^{ère} année).

Suite page 5

(5)

II.C. 1) $\vec{E}_2$ est axial et à symétrie cylindrique, il en est donc de même de $\frac{1}{c^2} \frac{\partial \vec{E}_2}{\partial t}$: $\vec{B}$ est donc orthoradial.

$\vec{B}_3$ vérifie $\text{rot } \vec{B}_3 = \frac{1}{c^2} \frac{\partial \vec{E}_2}{\partial t}$ (M.A. avec $\text{rot } \vec{B}_3 = \frac{1}{c^2} \frac{\partial \vec{E}_0}{\partial t}$)
 soit $\text{rot } \vec{B}_3 = - \frac{X^2}{c^2} i\omega \vec{E}_0$ et en appliquant le théorème de STOKES sur un contour C_1 (cf. II.A.1.c.)

$$\oint \vec{B}_3 d\vec{l} = \iint - \left(\frac{c\omega}{2c} \right) \frac{i\omega}{c^2} \vec{E}_0 \rho d\rho d\theta$$

$$\text{soit } B_3 \cdot 2\pi \rho = - \frac{i\omega^3}{4c^4} \vec{E}_0 \cdot \vec{e}_z \rho$$

$$\text{et } \vec{B}_3 = -i \frac{X^3}{2c} \vec{E}_0 \vec{u}_\theta.$$

2) De même $\vec{E}_4 = E_4(\rho, t) \vec{k}$ avec
 $\text{rot } \vec{E}_4 = - \frac{\partial \vec{B}_3}{\partial t}$, soit en complexe $\text{rot } \vec{E}_4 = -i\omega \vec{B}_3$
 et en prenant la circulation de $\vec{E}_4$ (et toujours avec le théorème de Stokes...) pour un contour C_2 (fig II.2)

$$\oint \vec{E}_4 d\vec{l} = -a \int_0^a \omega \left(\frac{c\omega}{2c} \right)^3 \frac{\vec{E}_0}{2c} d\rho$$

$$= -a E_4(\rho) \text{ en prenant } E_4(0) = 0. \text{ Soit}$$

finalement tous calculs faits,

$$\vec{E}_4 = \frac{X^4}{4} \vec{E}_0.$$

(6)

3) la méthode reste identique:

a) $\text{rot } \vec{B}_{2m+1} = \frac{1}{c^2} i\omega \vec{E}_{2m}$ soit toujours avec le théorème de Stokes $\oint \vec{B}_{2m+1} d\vec{l} = \frac{i\omega}{c^2} \iint \vec{E}_{2m} \rho d\rho d\theta$.

$$2\pi \rho B_{2m+1} = \frac{i\omega}{c^2} \left(\frac{1}{n!} \right)^2 \left(i \frac{\omega}{2c} \right)^{2m} \int_0^{\rho} \rho^{2m+1} d\rho \int_0^{2\pi} d\theta \text{ de } \vec{E}_0.$$

$$\text{Soit } B_{2m+1} = \left(\frac{i\omega}{2c} \right)^{2m+1} \frac{1}{c} \left(\frac{1}{n!} \right)^2 \frac{\vec{E}_0}{n+1}$$

$$\text{et finalement } \vec{B}_{2m+1} = (iX)^{2m+1} \frac{\vec{E}_0}{(n!)^2 (n+1)} \frac{1}{c} \vec{u}_\theta.$$

R : il faut vérifier les expressions pour $\vec{B}_1$ et $\vec{B}_3$.

$$b) \vec{E}_{2m+2} = E_{2m+2}(\rho, t) \vec{k}$$

$$\text{et } \text{rot } \vec{E}_{2m+2} = - \frac{\partial \vec{B}_{2m+1}}{\partial t}$$

Soit après application du théorème de Stokes sur C_2 :

$$\vec{E}_{2m+2} = (iX)^{2m+2} \frac{\vec{E}_0}{[(n+1)!]^2} \vec{k}$$

On vérifie ici aussi la relation de récurrence sur les premiers termes.

$$1) \quad \vec{E} = \sum_n \vec{E}_{2n} = \sum_n \frac{(ix)^{2n}}{(n!)^2} \vec{E}_0 \quad (7)$$

or $(i)^{2n} = (-1)^n$ et en posant $x = \frac{c\omega}{2} z$ on obtient bien $\vec{E} = J_0(x) \vec{E}_0$.

II.D. 1) Calculons $\vec{\text{rot}}(\vec{\text{rot}} \vec{E}) = \vec{\text{grad}}(\text{div} \vec{E}) - \Delta \vec{E}$; or il n'y a pas de charges dans le condensateur et $\text{div} \vec{E} = 0$, soit $\vec{\text{rot}}(\vec{\text{rot}} \vec{E}) = -\Delta \vec{E}$.
Comme $\vec{\text{rot}} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$, $\vec{\text{rot}}(\vec{\text{rot}} \vec{E})$ est d'autre part

$$\text{égal à } -\frac{\partial (\vec{\text{rot}} \vec{B})}{\partial t} \text{ soit à } +\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} \text{ avec}$$

MA car $\vec{j} = \vec{0}$ entre les plaques.

$$\text{Ainsi } \Delta \vec{E} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = \vec{0}.$$

② En injectant dans l'équation ci-dessus:

$$\frac{d^2 E(c)}{dc^2} + \frac{1}{c} \frac{dE(c)}{dc} - \frac{1}{c^2} E(c) \times (\omega^2) = 0 \text{ après}$$

simplification par le facteur $e^{i\omega t}$;

③ avec la proposition de l'énoncé, ⑧

$$d\rho^2 = \frac{c^2}{\omega^2} dx^2, \quad d\rho = \frac{c}{\omega} dx \text{ et } \rho = \frac{cx}{\omega}, \text{ il vient bien}$$

$$\frac{d^2 E(x)}{dx^2} + \frac{1}{x} \frac{dE(x)}{dx} + E(x) = 0.$$

④ On reprend (13) avec $v=0$

$$\text{donc } E(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(k!)^2} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k}, \text{ soit}$$

$$E(c) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(k!)^2} \left(\frac{c\omega}{2c}\right)^{2k}.$$