

DS5-23-24. (1)

PARTIE I

$\vec{T}(\alpha, t)$  est donc  $\vec{T}_0 \rightarrow g$  dirigée suivant  $\alpha \rightarrow$ .

(1)  $\downarrow$  d'angle  $\alpha(\alpha, t)$  s'écrit  $(\frac{\partial y}{\partial x})$  pour les petits mouvements verticaux.

Calculons  $\frac{\partial \alpha}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial y}{\partial x} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial y}{\partial t} \right) = \left( \frac{\partial v}{\partial x} \right)$

Or  $\frac{\partial \alpha}{\partial t}$  peut s'écrire  $\frac{1}{T_0} \frac{\partial}{\partial t} (T_0 \alpha)$ , d'où

(1)  $\frac{1}{T_0} \frac{\partial}{\partial t} (T_0 \alpha(\alpha, t)) = \left( \frac{\partial v}{\partial x} \right)$

$\downarrow$   
\* Si l'on applique la RFD au bout de corde de longueur  $dx$ , après projection sur les axes et écriture en  $x$  du principe des actions réciprocques, on obtient (cf cours)

$dx \mu \left( \frac{\partial v}{\partial t} \right) = T_0 [\alpha(x+dx) - \alpha(x)]$

soit (2)  $\mu \left( \frac{\partial v}{\partial t} \right) = T_0 \left( \frac{\partial \alpha}{\partial x} \right) = \left( \frac{\partial (T_0 \alpha)}{\partial x} \right)$

(2) En injectant  $v = \frac{\partial y}{\partial t}$  et  $T_0 \alpha = T_0 \frac{\partial y}{\partial x}$

dans (2) on obtient (2)

$\mu \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = T_0 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$  et  $c = \sqrt{\frac{T_0}{\mu}}$ .

R: En dérivant (1) % à  $t$  et (2) % à  $x$ , on obtient  $\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = 0$ .

(ou la même en  $T_0 \alpha$ )  
et en dérivant (1) à  $x$  et (2) % à  $t$ ,

$\left( \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right) = \frac{1}{c^2} \left( \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} \right)$ . (chaque grandeur de couplage vérifie une équation de D'Alembert).

(3)  $c$  est la vitesse de la propagation d'une onde progressive  $f(t - \frac{x}{c})$  d'arbitraire dans le sens des  $x$  croissants  $f(t + dt - \frac{x+dx}{c}) = f(t - \frac{x}{c})$  si  $c = \frac{dx}{dt}$ .

(4) Utilisons les expressions de  $T_{y+}$  et  $v_+$ :

$T_{y+} = T_0 \left( \frac{\partial y_+}{\partial x} \right) = T_0 \cdot \left( -\frac{1}{c} \right) f' \left( t - \frac{x}{c} \right)$

or  $v_+(x, t) = \frac{\partial y_+}{\partial t} = f' \left( t - \frac{x}{c} \right)$

Donc  $Z = T_0 / c = \sqrt{\mu T_0}$ .

$$(5) T_y = T_0 \left( \frac{\partial y}{\partial x} \right) = T_0 \frac{1}{c} g'(t + \frac{x}{c}) \quad (3)$$

avec  $y = g(t + \frac{x}{c})$  et comme

$$v_-(x, t) = \frac{\partial y}{\partial t} = g'(t + \frac{x}{c}), \quad T_y = + z v_-$$

(6)  $\frac{1}{2} \mu \left( \frac{\partial y}{\partial t} \right)^2 = \frac{1}{2} \mu v^2$  est l'énergie cinétique linéique de la corde.

$\frac{1}{2} T_0 \left( \frac{\partial y}{\partial x} \right)^2 = \frac{1}{2} T_0 \alpha^2$  est une énergie potentielle linéique de tension, comparable à une énergie de type  $\frac{1}{2} k x^2$  ou  $\frac{1}{2} C \alpha^2$  (torsion).

$$R = -T_0 \left( \frac{\partial y}{\partial t} \right) \left( \frac{\partial y}{\partial x} \right) = -T_0 v(x, t) \alpha(x, t)$$

$$R = -T_y(x, t) v(x, t)$$

Or  $\vec{T}_y = T_y(x, t) \vec{e}_y$  est la composante sur y de la tension appliquée par la droite de la corde sur la gauche de la corde et  $\vec{v} = v(x, t) \vec{e}_y$  est la vitesse de la

corde donc

$R = -\vec{T}_y \cdot \vec{v}$  est la puissance transférée en  $x$  à  $t$  de la gauche vers la droite de la corde.

$R$ : on peut même définir une section de Poynting de l'onde le long de la corde:  $\vec{R}_c = R \vec{e}_x$ .

$$(7) -\frac{\partial R}{\partial x} = + \frac{\partial}{\partial x} \left( T_0 \left( \frac{\partial y}{\partial t} \right) \left( \frac{\partial y}{\partial x} \right) \right)$$

$$= T_0 \left( \frac{\partial y}{\partial t} \right) \left( \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \right) + T_0 \left( \frac{\partial y}{\partial x} \right) \frac{\partial^2 y}{\partial x \partial t}$$

$$= T_0 \left( \frac{\partial y}{\partial t} \right) \cdot \frac{1}{c^2} \left( \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \right) + T_0 \left( \frac{\partial y}{\partial x} \right) \left[ \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial y}{\partial x} \right) \right]$$

$$= \frac{T_0}{c^2} \frac{\partial}{\partial t} \left[ \left( \frac{\partial y}{\partial t} \right)^2 \right] + T_0 \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} \left[ \left( \frac{\partial y}{\partial x} \right)^2 \right]$$

$$= \frac{\partial}{\partial t} \left[ \frac{1}{2} \mu \left( \frac{\partial y}{\partial t} \right)^2 \right] + \frac{\partial}{\partial t} \left[ \frac{1}{2} T_0 \left( \frac{\partial y}{\partial x} \right)^2 \right]$$

$$= \frac{\partial e}{\partial t} \quad \text{analogues:} \quad \begin{cases} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div } \vec{j} = 0 \text{ (charge ou masse)} \\ \frac{\partial h}{\partial t} + \text{div } \vec{j}_h = 0 \text{ (flux ou point)} \end{cases}$$



En utilisant  $\vec{R} = R\vec{e}_x$  on a (5)

$\text{div } \vec{R} + \frac{\partial e}{\partial t} = 0$ , à rapprocher des ondes sonores et des ondes EM:

$\text{div } \vec{R}_S + \frac{\partial e_{\text{vol}}}{\partial t} = 0$  et  $\text{div } \vec{R} + \frac{\partial e_{\text{vol EM}}}{\partial t} = -\vec{j} \cdot \vec{E}$

Pour les  $x < 0$ , l'onde totale est la superposition de  $i$  et  $r$  pour  $y(x, t)$  comme pour  $\alpha(x, t)$

Pour les  $x > 0$  seule  $t$  est prise en compte.

(9) La corde est continue (...), donc en  $x = 0$ ,  $y(0^-, t) = y(0^+, t)$  soit  $y_i(0, t) + y_r(0, t) = y_t(0, t)$  d'où  $1 + r_y = t_y$

(10) En reprenant la RFD de la fin de la page (1) et en faisant tendre  $\alpha \rightarrow 0$ , on obtient  $\alpha(x^-) = \alpha(x^+)$ ,  $\forall x$  (cte)

En  $x = 0$ ,

$\alpha_i(0, t) + \alpha_r(0, t) = \alpha_t(0, t)$

ou  $T_0 \alpha_i(0, t) + T_0 \alpha_r(0, t) = T_0 \alpha_t(0, t)$

soit  $z_1 (v_i(0, t) - v_r(0, t)) = z_2 v_t(0, t)$  (6)

$z_1 \left( \frac{\partial y_i}{\partial t}(0, t) - \frac{\partial y_r}{\partial t}(0, t) \right) = z_2 \left( \frac{\partial y_t}{\partial t} \right)(0, t)$

$z_1 (1 - r_y) \frac{\partial y_i}{\partial t}(0, t) = z_2 t_y \frac{\partial y_i}{\partial t}(0, t)$

D'où  $z_1 (1 - r_y) = z_2 t_y$

(10) on obtient  $r_y = \frac{z_1 - z_2}{z_1 + z_2}$  et  $t_y = \frac{2z_1}{z_1 + z_2}$

(11)  $R = \left| \frac{R_r}{R_i} \right|$  et  $T = \left| \frac{R_t}{R_i} \right|$  avec (6) et par analogie avec les ondes sonores.

ou  $|R_r| = |T_0 v_r \alpha_r| = |(T_0 v_t) v_t| = |z_1 v_r v_t|$

de même  $|R_i| = z_1 v_i^2$  et  $R_t = z_2 v_t^2$

Comme  $y_r(0, t) = r_y y_i(0, t)$ , en dérivant par rapport à  $t$   $v_r(0, t) = r_y v_i(0, t)$  et de même  $v_t(0, t) = t_y v_i(0, t)$  et donc

$R = \frac{v_r^2}{v_i^2} = r_y^2 = \left( \frac{z_1 - z_2}{z_1 + z_2} \right)^2$  (12)

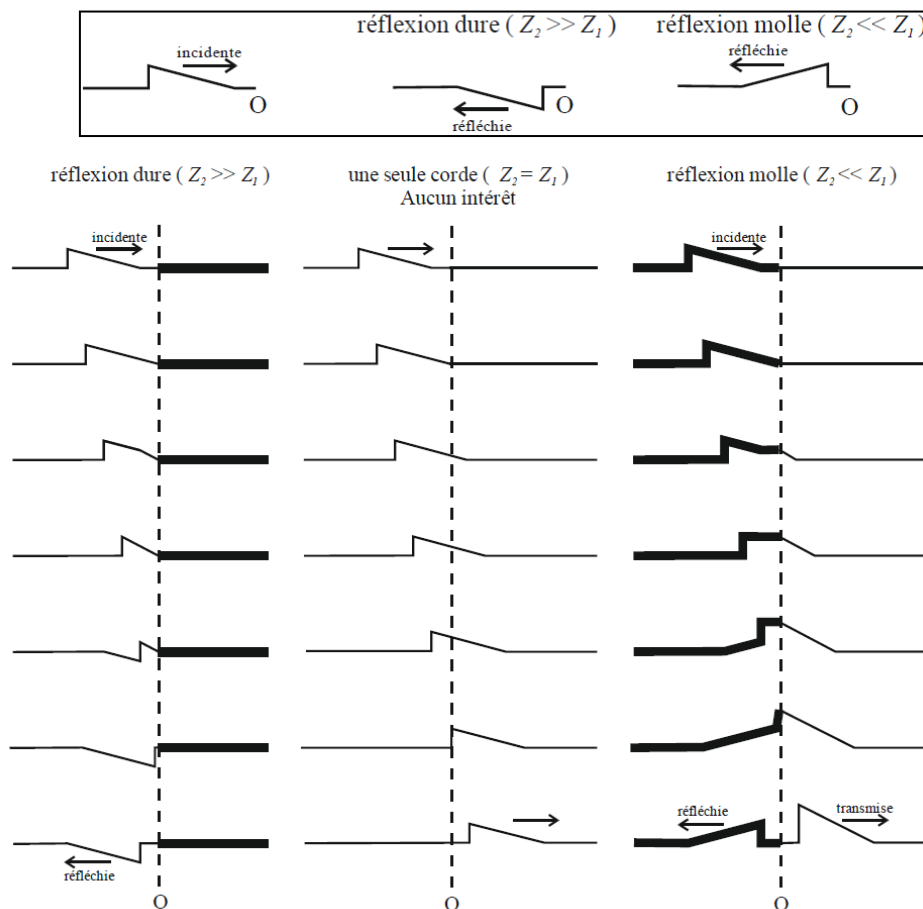
$T = \frac{z_2 v_t^2}{z_1 v_i^2} = \frac{4z_1 z_2}{(z_1 + z_2)^2}$

$R + T = 1$ : conservation de l'énergie.



### 13. et 14.

Pour le premier cas il suffit de fixer la corde 1 à un mur de sorte qu'elle soit fixe ; on a alors réflexion « avec changement de signe » ; pour le deuxième cas, il faudrait laisser la corde libre, ce qui est délicat pour une corde horizontale ! On peut essayer de la fixer entre deux ressorts verticaux de très faible constante de raideur, de sorte qu'elle soit horizontale, mais la plus « molle » possible. On aura une réflexion « sans changement de signe » :



15. La corde de guitare est fixée à ses deux extrémités donc les conditions aux limites sont :

$$\begin{cases} \forall t \in \mathbb{R}, & z(x=0, t) = 0 \quad (C1) \\ \forall t \in \mathbb{R}, & z(x=L, t) = 0 \quad (C2) \end{cases}$$

$$\text{soit : } \begin{cases} \forall t \in \mathbb{R}, & Z_n \sin(k_n * 0) \cos(\omega_n t) = 0 \quad (C1) \\ \forall t \in \mathbb{R}, & Z_n \sin(k_n * L) \cos(\omega_n t) = 0 \quad (C2) \end{cases}$$

Avec la forme proposée pour  $z(x, t)$ , (C1) est toujours vraie et (C2) est validée ssi :  $\sin(k_n * L) = 0$

Cette relation conduit à la quantification voulue :

$$k_n = n \frac{\pi}{L} \quad \text{où } n \in \mathbb{N}^*$$

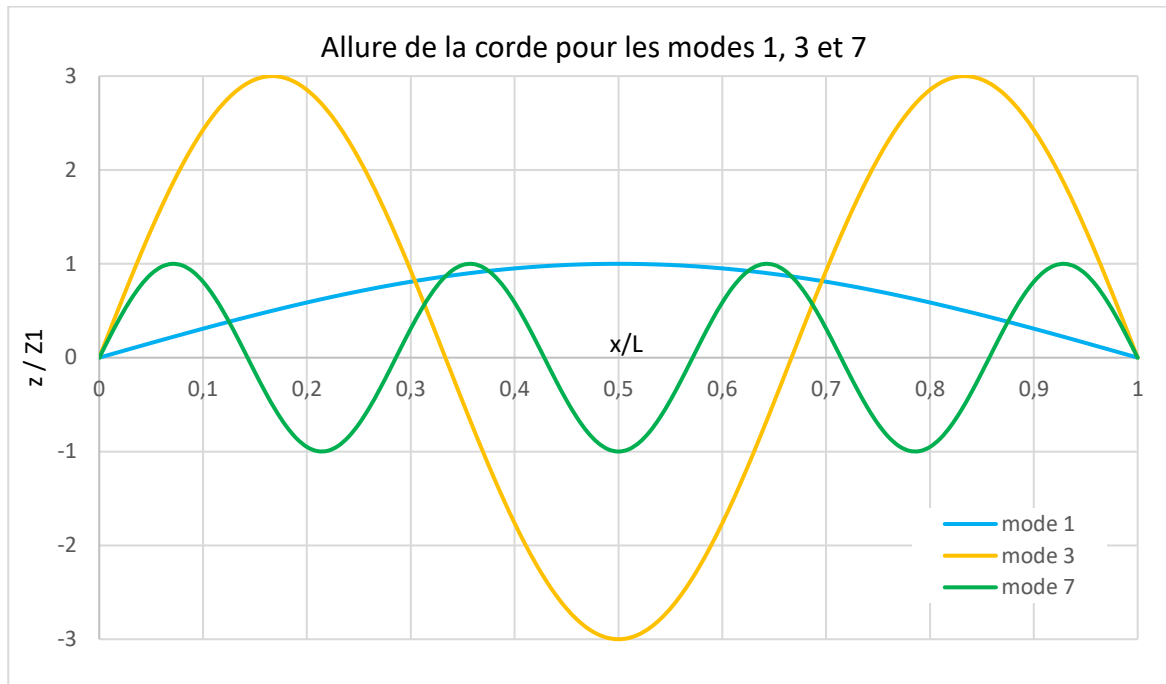
D'après le document 1, si on raisonne pour un mode propre donné ( $n$  fixé) avec

$$f_n = \frac{\omega_n}{2\pi} = n \frac{c}{2L} :$$

- Si la masse linéique diminue, la célérité augmente ( $c = \sqrt{T_0/\mu}$ ), donc  $f_n$  augmente : (I1) vérifiée.
- Si la tension augmente, la célérité augmente ( $c = \sqrt{T_0/\mu}$ ), donc  $f_n$  augmente : (I2) vérifiée.
- Si la longueur augmente, la célérité  $c$  est fixée mais  $f_n = n \frac{c}{2L}$  diminue : (I3) vérifiée.

Pour simplifier, on choisit la date  $t = 0$  comme instant fixé. D'après le document 2, les trois modes impairs dont l'amplitude est la plus importante sont les modes 1, 3 et 7, avec (approximativement)  $Z_7 = Z_1$  et  $Z_3 = 3 Z_1$ .

$$\text{On représente donc : } \begin{cases} z_1(x, t = 0) = Z_1 \sin\left(\pi \frac{x}{L}\right) \\ z_3(x, t = 0) = 3 Z_1 \sin\left(3 \pi \frac{x}{L}\right) \\ z_7(x, t = 0) = Z_1 \sin\left(7 \pi \frac{x}{L}\right) \end{cases}$$



D'après le document 2, la fréquence fondamentale ( $n = 1$ ) de la corde excitée est  $f_1 = 250$  Hz environ.

Or d'après le document 1, la corde n°5 a une fréquence fondamentale de 246,9 Hz correspondant à un Si<sup>2</sup>.

C'est donc la corde n°5 qui a été excitée pour enregistrer le spectre.