

**PROPAGATION D'UNE ONDE ÉLECTROMAGNÉTIQUE
À TRAVERS UN PLASMA (IONOSPHERE)**

Dans cette partie, nous supposons que la Terre est entourée d'une atmosphère non ionisée assimilée au vide (d'indice $n = 1$), elle-même entourée par l'ionosphère.

L'ionosphère se comporte comme un plasma, constitué principalement d'hydrogène, gaz ionisé peu dense, renfermant des particules chargées de deux types : N (par unité de volume) protons, de charge et masse unitaires $+e = 1,6 \cdot 10^{-19}$ C et $m_p = 1,67 \cdot 10^{-27}$ kg, ainsi que N (par unité de volume) électrons de charge et masse unitaires $-e$ et $m_e = 9,1 \cdot 10^{-31}$ kg. Les interactions entre protons et électrons sont négligées. Les permittivité et perméabilité du plasma sont assimilées à celles du vide : $\epsilon_0 = 8,8 \cdot 10^{-12}$ F.m⁻¹ et $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$ H.m⁻¹. Le milieu est linéaire de sorte que toute grandeur sinusoïdale x peut s'écrire sous forme complexe : $\underline{x} = \underline{X}e^{j\omega t}$.

Sous l'action d'une onde électromagnétique harmonique plane polarisée rectilignement qui se propage suivant l'axe vertical Oz dans l'ionosphère (considéré comme un plasma neutre et peu dense), les particules chargées se mettent en mouvement.

A / PROPAGATION DE L'ONDE

A1. Appliquer le principe fondamental de la dynamique aux porteurs de charges, animés d'une vitesse \vec{v}_p et \vec{v}_e par rapport à un référentiel galiléen et soumis au champ électromagnétique $\vec{E} = \vec{E}_0 \cos(\omega t - kz)$, $\vec{B} = \vec{B}_0 \cos(\omega t - kz)$.

A quelle(s) condition(s) l'action du champ magnétique et celle du poids sont-elles négligeables ?

A2. Le régime permanent est supposé atteint. Déterminer l'expression complexe de la vitesse des porteurs de charge.

(la notation complexe $\vec{E} = \vec{E}_0 e^{j(\omega t - kz)}$ avec $j^2 = -1$ pourra être utilisée)

Dans un premier temps, on tient compte de la contribution de tous les porteurs dans la densité volumique de courant.

En déduire l'expression complexe du vecteur densité volumique de courant de charges électriques \vec{J}_{elec} .

A3. Montrer que, dans ce cas, le plasma est équivalent à un milieu conducteur ohmique dont la conductivité complexe $\underline{\sigma}$ sera exprimée en fonction de

$$\omega_{pe}^2 = \frac{Ne^2}{\epsilon_0 m_e}, \quad \omega_{pp}^2 = \frac{Ne^2}{\epsilon_0 m_p}, \quad \epsilon_0 \text{ et } \omega.$$

Calculer les valeurs numériques des pulsations ω_{pe} et ω_{pp} pour $N = 10^{11}$ m⁻³.

Comparer les contributions respectives des protons et des électrons et en déduire l'expression simplifiée de $\underline{\sigma}$.

A4. Ecrire les équations de Maxwell dans le milieu étudié.

Montrer que l'équation de Maxwell-Ampère s'écrit sous la forme suivante :

$$\text{rot} \vec{B} = \epsilon_0 \mu_0 \left(1 - \frac{\omega_{pe}^2}{\omega^2}\right) \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}.$$

- A5.** Établir les équations de propagation satisfaites par les champs électrique et magnétique dans le plasma.
En déduire que l'onde est transversale.
- A6.** Pour l'onde sinusoïdale étudiée $\vec{E} = \vec{E}_0 e^{j(\omega t - kz)}$, quelle est, dans ce cas, l'expression de k^2 en fonction de ω , ω_{pe} et c (célérité de la lumière dans le vide).
Le milieu est-il dispersif ? Que se passe-t-il si $\omega < \omega_{pe}$?
Calculer la valeur correspondante de la densité volumique de particules.
Données : pulsation plasma de l'ionosphère terrestre $\omega_{pe} = 8,7 \cdot 10^6 \text{ rad.s}^{-1}$, célérité de la lumière dans le vide $c = 3 \cdot 10^8 \text{ m.s}^{-1}$.
- A7.** Exprimer la vitesse de phase v_ϕ , puis la vitesse de groupe $v_g = \frac{d\omega}{dk}$. Représenter ces vitesses en fonction de ω . Que se passe-t-il pour $\omega \gg \omega_{pe}$?
- A8.** L'indice optique complexe de l'ionosphère est défini par $\underline{n} = \frac{c}{\omega} k$.
Établir l'expression de \underline{n}^2 en fonction de ω et ω_{pe} .
En déduire les expressions de \underline{n} dans les deux cas $\omega < \omega_{pe}$ et $\omega > \omega_{pe}$.

Une onde électromagnétique plane harmonique polarisée rectilignement est émise depuis le sol verticalement suivant la direction Oz normale à la surface de séparation atmosphère-ionosphère (figure 3).

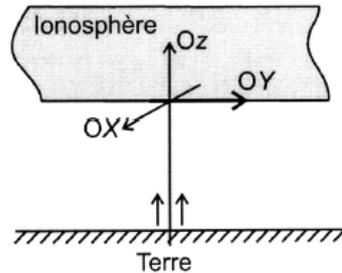


Figure 3

Les champs associés aux ondes électromagnétiques incidente, réfléchie et transmise sont les suivants :

	Champs électriques	Champs magnétiques
Onde incidente	$\vec{E}_i = \vec{E}_{0i} \exp j(\omega t - k_0 z) \vec{e}_x$	$\vec{B}_i = \frac{\vec{E}_{0i}}{c} \exp j(\omega t - k_0 z) \vec{e}_y$
Onde réfléchie	$\vec{E}_r = \vec{E}_{0r} \exp j(\omega t + k_0 z) \vec{e}_x$	$\vec{B}_r = -\frac{\vec{E}_{0r}}{c} \exp j(\omega t + k_0 z) \vec{e}_y$
Onde transmise	$\vec{E}_t = \vec{E}_{0t} \exp j(\omega t - kz) \vec{e}_x$	$\vec{B}_t = \underline{n} \frac{\vec{E}_{0t}}{c} \exp j(\omega t - kz) \vec{e}_y$

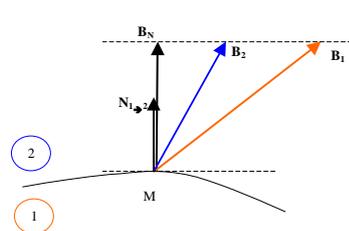
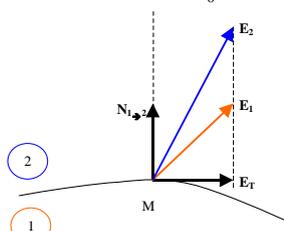
- A9.** A partir des conditions aux limites en $z = 0$ à l'interface atmosphère-ionosphère, écrire deux relations qui lient les amplitudes E_{0i} , E_{0r} , E_{0t} et \underline{n} .

Exprimer le coefficient de réflexion en amplitude défini par $\underline{r} = \frac{E_{0r}}{E_{0i}}$.

On rappelle les relations de passage à l'interface de deux milieux 1 et 2 :

$$\vec{E}_2 - \vec{E}_1 = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \underline{N}_{1 \rightarrow 2}$$

$$\vec{B}_2 - \vec{B}_1 = \mu_0 \underline{j}_s \wedge \underline{N}_{1 \rightarrow 2}$$



Champ E :

- Continuité de la composante tangentielle
- Discontinuité éventuelle de la composante normale

Champ B :

- Continuité de la composante normale
- Discontinuité éventuelle de la composante tangentielle

Dans la situation étudiée, on indique qu'il n'y a pas de courant surfacique.

A10. Déterminer, en $z = 0$, les expressions de la valeur moyenne temporelle de la norme du vecteur de Poynting incident $\langle \|\bar{\Pi}_{0i}\| \rangle$ et réfléchi $\langle \|\bar{\Pi}_{0r}\| \rangle$.

En déduire l'expression du facteur de réflexion en puissance \mathcal{R} , défini par

$$\mathcal{R} = \frac{\langle \|\bar{\Pi}_{0r}\| \rangle}{\langle \|\bar{\Pi}_{0i}\| \rangle}, \text{ en fonction de } \underline{n}.$$

A11. Préciser, dans les deux cas $\omega < \omega_{pe}$ et $\omega > \omega_{pe}$, l'expression de \mathcal{R} . Tracer l'allure de \mathcal{R} en fonction de $\frac{\omega}{\omega_{pe}}$, puis commenter cette courbe. Citer des applications.

A12. Déduire de la courbe précédente l'allure de \mathcal{T} , coefficient de transmission en puissance. Proposer une méthode de mesure de la valeur de la pulsation ω_{pe} .

B / INFLUENCE D'UN CHAMP MAGNETIQUE STATIQUE \mathcal{B}_0

A partir de maintenant, l'effet d'un champ magnétique statique \mathcal{B}_0 , sera pris en compte ; ce champ, uniforme, de l'ordre de $40 \mu T$ est porté par l'axe Oz, correspondant à la direction de propagation de l'onde. Toute force dissipative sera négligée.

En l'absence de champ électrique et en présence du champ magnétique \mathcal{B}_0 , une particule P, non relativiste, de masse m et de charge q est animée au point O et à l'instant initial de la vitesse $\vec{v}_0 = v_0 \vec{e}_x$ évaluée par rapport à un référentiel galiléen.

B1. Déterminer le mouvement ultérieur de P, puis tracer sur une figure (pour $\mathcal{B}_0 > 0$) l'allure de la trajectoire en distinguant les cas $q > 0$ et $q < 0$.

Quelle est l'influence de la masse sur la trajectoire d'une particule de charge $q > 0$. Que représente la quantité $\frac{q\mathcal{B}_0}{m}$, notée ω_{ce} pour un électron et ω_{cp} pour un proton ? Calculer puis comparer ces deux grandeurs. Justifier le sens des trajectoires observées.

Dans cette partie, le mouvement des protons sera à nouveau négligé devant celui des électrons. Une onde TEM de champ électrique $\vec{E} = \vec{E}_0 e^{j(\omega t - kz)}$ se propage au sein du milieu. Le champ \vec{E}_0 est tel que $\vec{E}_0 = E_0 \vec{u} = E_{0x} \vec{e}_x + E_{0y} \vec{e}_y$. Le champ électrique est toujours porté par le vecteur unitaire \vec{u} contenu dans le plan xOy. Les permittivité et perméabilité sont celles du vide. Le champ magnétique B de l'onde sera négligé devant \mathcal{B}_0 .

B2. Montrer que les composantes de la vitesse des électrons vérifient les relations suivantes :

$$\begin{cases} v_x = \frac{(j\omega m_e E_x - e^2 \mathcal{B}_0 E_y)}{m_e^2 \omega^2 - e^2 \mathcal{B}_0^2} \\ v_y = \frac{(e^2 \mathcal{B}_0 E_x + j\omega m_e E_y)}{m_e^2 \omega^2 - e^2 \mathcal{B}_0^2} \end{cases}$$

En déduire les composantes de la densité volumique de courant \vec{J}_{elec} due au déplacement des électrons.

B3. En exploitant l'équation de Maxwell-Ampère, déterminer la nouvelle équation de dispersion. Que se passe-t-il si $\vec{J}_{elec} = \vec{0}$?

Projeter l'équation précédente suivant les directions \vec{e}_x et \vec{e}_y , puis montrer que les composantes E_x et E_y du champ électrique vérifient une relation du type :

$$\begin{cases} \alpha E_x - j\beta E_y = 0 \\ j\beta E_x + \alpha E_y = 0 \end{cases}$$

Préciser l'expression des constantes α et β .

- B4.** Justifier l'existence de deux solutions k_+ et k_- pour le vecteur d'onde k .
Déterminer pour chaque cas les densités volumiques de courant J_+ et J_- .
Commenter ces résultats.

L'étude précédente conduit à :

$k^2 = \omega^2/c^2 - \mu_0 N e^2 m_e \omega^2 / (m_e^2 \omega^2 - e^2 B_0^2) \pm \mu_0 N e^3 B_0 \omega / (m_e^2 \omega^2 - e^2 B_0^2)$, le signe + correspondant à $\alpha = -\beta$ et le signe - à $\alpha = +\beta$.

- B5.** Une onde plane polarisée rectilignement selon Ox peut être considérée comme la somme de deux ondes polarisées circulairement en sens inverse de même pulsation et de même nombre d'onde :

$$\vec{E} = E_x \vec{e}_x = \frac{1}{2} (E_x \vec{e}_x + j E_x \vec{e}_y) + \frac{1}{2} (E_x \vec{e}_x - j E_x \vec{e}_y).$$

Cette onde a une pulsation $\omega \ll eB_0/m_e$.

Simplifier l'expression de k^2 pour l'onde + et l'onde - ; ω_{pe} sera notée ω_p et eB_0/m_e sera notée ω_0 .

- B6.** Montrer qu'une de ces ondes est éliminée dans le plasma pour des champs B_0 inférieurs à un seuil B_{0s} qu'on exprimera en fonction de N , e , ϵ_0 et ω .

On suppose de plus que $\omega \ll \omega_p^2/\omega_0$. Montrer que l'onde excitatrice à polarisation rectiligne se transforme dans le plasma en une onde circulaire (onde « siffleur », cf. question B10.) dont on exprimera la vitesse de phase, la vitesse de groupe et la longueur d'onde en fonction de C , ω_0 , ω_p et ω .

- B7.** (D'après Oral Centrale 2015) Commenter succinctement les articles suivants :

Extraits traduits de l'article Helicon (physics) (Wikipédia, eng.)

Un héliçon est une onde électromagnétique à basse fréquence susceptible de se propager dans des plasmas en présence d'un champ magnétique. Les premiers héliçons observés étaient des siffleurs atmosphériques, mais on peut aussi les observer dans des conducteurs solides ou dans n'importe quel autre plasma électromagnétique.

Les héliçons ont en particulier la possibilité de se propager à travers des métaux purs, sous réserve de se placer dans des conditions de basse température et en présence de champs magnétiques élevés. La plupart des ondes électromagnétiques dans les conducteurs ordinaires ne peuvent pas se propager dans ces conditions, la conductivité élevée des métaux (due à leurs électrons libres) écrantant le champ électromagnétique. En fait, une onde électromagnétique dans un métal est caractérisée par une épaisseur de peau très faible : les champs électrique et magnétique y sont rapidement réfléchis lors de l'entrée dans le métal (cet effet est responsable de la brillance de surface des métaux). Toutefois, l'épaisseur de peau varie proportionnellement à l'inverse de la racine carrée de la fréquence ; ainsi, une onde de très basse fréquence peut surmonter l'effet de peau et donc se propager à travers le métal.

Extraits traduits de l'article Whistler (radio) (Wikipédia, eng.)

Un siffleur (*whistler*) est une onde électromagnétique (radio) à très basse fréquence générée par les éclairs. Les fréquences des siffleurs terrestres varient entre 1 kHz et 30 kHz, avec un maximum d'amplitude usuellement entre 3 kHz et 5 kHz. Bien qu'il s'agisse d'ondes électromagnétiques, elles se propagent à des fréquences du domaine audio et peuvent être converties en signaux audio au moyen d'un détecteur *ad hoc*. Elles sont produites par des éclairs (essentiellement intra-nuages et courant en retour) et les impulsions se propagent le long des lignes de champ magnétique terrestre d'un hémisphère à l'autre. Elles subissent une dispersion importante du fait de la vitesse plus faible des basses fréquences dans les plasmas formés par l'ionosphère et la magnétosphère. Elles sont donc perçues avec une tonalité descendante qui peut durer plusieurs secondes.

Les engins spatiaux Voyager 1 et 2 ont détecté des activités de type siffleur dans le voisinage de Jupiter, impliquant la présence d'éclairs.

Des siffleurs ont probablement été repérés dès 1886 sur des lignes téléphoniques longue distance mais leur première description claire est due à Barkhausen en 1919. En 1953, Storey a montré que les siffleurs sont créés par les décharges dans les éclairs.