PSI*/PSI 2015-2016

DS N°6 – 26-03-2016

SECOND PROBLEME : Mines-Ponts PSI/PC

Seules sont à traiter pour le DS les questions 1 à 17.

R : Le corrigé fourni en fin de DS correspond à la totalité de l'épreuve (4 heures)

- Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.
- Il ne faudra pas hésiter à formuler les commentaires (incluant des considérations numériques) qui vous sembleront pertinents, même lorsque l'énoncé ne le demande pas explicitement.
- Notations : vecteur $\rightarrow$ **V** (on pourra écrire $\vec{V}$) ; vecteur unitaire de la coordonnée c : $\hat{\mathbf{c}}$.

ÉCOULEMENT DE FLUIDE DANS UNE ROCHE

L'objet de ce problème est de dégager des paramètres importants en pétrophysique. Un gisement est constitué d'un ou de plusieurs réservoirs superposés, ou proches latéralement ; le réservoir est une formation rocheuse du sous-sol, poreuse et perméable, renfermant une accumulation naturelle d'hydrocarbure et limitée par une barrière de roche imperméable. La caractéristique essentielle de ces réservoirs est que ce sont des milieux poreux : les fluides sont stockés et se déplacent dans des pores de dimensions de l'ordre du µm, ce qui met en jeu de forces de viscosités et de capillarité. La pétrophysique est l'étude des caractéristiques physiques des roches. Pour qu'une roche puisse constituer un réservoir, il faut :

- qu'elle ait une certaine capacité de stockage, propriété caractérisée par la porosité,
- que les fluides puissent y circuler, propriété caractérisée par la perméabilité et
- qu'elle contienne une quantité suffisante d'hydrocarbure, avec une concentration suffisante, propriétés caractérisées par le volume imprégné ainsi que la saturation des pores.

I – Étude d'un écoulement

La pesanteur est négligée dans cette partie. On s'intéresse à l'écoulement incompressible d'un fluide de viscosité dynamique η et de masse volumique ρ dans un tuyau cylindrique d'axe Oz et de rayon a. Cet écoulement, considéré comme unidirectionnel, est caractérisé, dans un repère de coordonnées cylindriques (r,θ,z) d'axe Oz, par un champ de vitesse

$$\vec{v} = \mathbf{v} = v(r,z,t)\hat{z}.$$

L'incompressibilité se traduit par $\frac{D\rho}{Dt} = 0$, où $\frac{D\rho}{Dt} = \frac{\partial\rho}{\partial t} + (\mathbf{v}\,\mathbf{grad})\rho$.

On trouvera en fin d'énoncé un formulaire relatif aux coordonnées cylindriques et une formule d'analyse vectorielle qui pourra se révéler utile.

- 1- Ecrire l'équation traduisant, dans le cas général, la conservation de la matière et la simplifier pour tenir compte de l'incompressibilité de l'écoulement.
- 2- Montrer qu'en régime stationnaire le champ des vitesses ne dépend que de r.
- 3- On se placera désormais en régime stationnaire.

Appliquer le principe fondamental de la dynamique à une particule de fluide de volume élémentaire dr.rdθ.dz.

- Montrer que la pression ne dépend pas de la variable z.
- Etablir l'équation suivante liant v et P : $\frac{dP}{dz} = \frac{\eta}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{dV}{dr}\right)$.
- En déduire que $\frac{dP}{dz}$ est nécessairement constant.

❑ **4** – Considérant que $v_z(0)$ a une valeur finie, déduire de ce qui précède la *loi de Poiseuille*, $v_z(r)=\frac{1}{4\eta}\left(\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}z}\right)\left(r^2-a^2\right)$. Tracer l'allure du graphe de $v_z(r)$ pour $\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}z}<0$.

❑ **5** – Exprimer le débit volumique total de la conduite sous la forme $Q_P=-K\left(\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}z}\right)$ en exprimant K en fonction de a et de η. Quel est le signe du gradient de pression responsable d'un écoulement dans le sens positif de l'axe Oz ?

❑ **6** – Comment varie qualitativement le champ des pressions dans une conduite horizontale de section constante et de débit constant Q_P ? Quelle est, sous cet aspect, la différence entre cet écoulement (dit écoulement de Poiseuille) et un écoulement de fluide parfait (écoulement de Bernoulli) ?

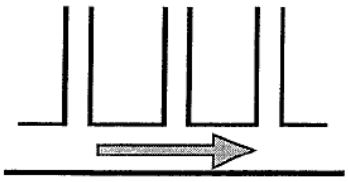


Fig. 1 : conduite et prises de pression

La Fig. 1 représente une conduite cylindrique horizontale parcourue par un liquide, avec un débit Q_P et surmontée en divers endroits de tubes de prise de pression verticaux ouverts à l'air libre et suffisamment fins pour ne pas perturber l'écoulement. Représenter l'allure des hauteurs de liquide dans les tubes verticaux, d'une part dans le cas de l'écoulement de fluide parfait, d'autre part dans le cas de l'écoulement visqueux de Poiseuille.

❑ **7** – On constate que l'écoulement de Poiseuille est observé dans les tubes de petit diamètre ; à quel paramètre de l'écoulement faut-il comparer le diamètre de la canalisation ?

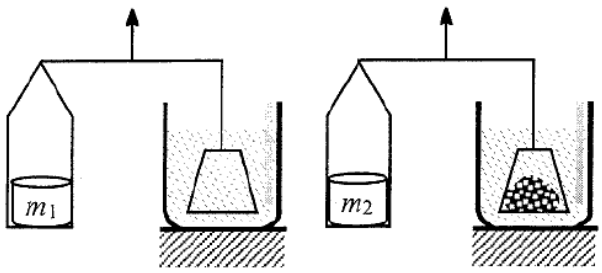
II – Porosité d'une roche-réservoir

Un échantillon de roche, de volume total V_T, est constitué d'un volume solide V_S et d'un volume de pores V_P. On appelle porosité, et l'on note ϕ, le rapport $\phi=\frac{V_P}{V_T}$. Un échantillon est saturé en hydrocarbure si tous ses pores sont remplis de liquide. On distingue la porosité utile ϕ_u, qui permet la circulation des fluides, de la porosité totale, ϕ_T ; cela est dû à l'obstruction de certains pores, qui ne permet pas l'écoulement des fluides. On oubliera cette distinction dans la suite du problème, sauf dans la question 10.

❑ **8** – De façon générale, la porosité est une fonction décroissante de la profondeur. Comment justifier ce fait expérimental ?

Mesure de la porosité

Pour mesurer la porosité d'un échantillon, on peut procéder par mesures de poussées d'Archimède sur des corps immergés dans divers liquides.



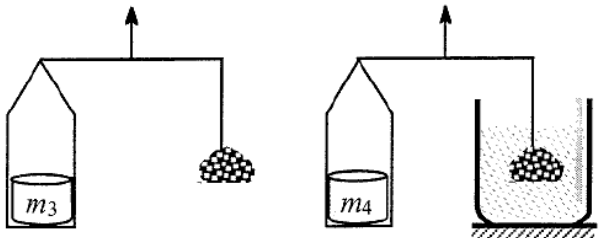
Mesure du volume total V_T

L'appareil représenté ci-contre mesure la poussée d'Archimède exercée par le mercure, de masse volumique μ_{Hg}, sur l'échantillon immergé. Les deux bras de la balance ont la même longueur. Cet échantillon est disposé sur une nacelle, qui subit elle-même la poussée d'Archimède. La mesure procède en deux temps. Dans un premier temps, on équilibre la balance avec la nacelle seule ; dans un second temps, on équilibre la balance avec la nacelle chargée par l'échantillon. On suppose que le mercure ne pénètre pas dans les pores et l'on ne tient pas compte de la variation du niveau du mercure entre les deux manipulations.

❑ **9** – Expliciter la notion de poussée d'Archimède. Exprimer V_T en fonction de m_1, m_2, de la masse de l'échantillon, m et de μ_{Hg} (relation 9A).

Dans une autre série d'expériences, l'échantillon est, dans les deux temps, suspendu à un fil, ce dernier ne perturbant la mesure en aucune manière ; expliquer alors pourquoi, dans ce cas, V_T ne s'exprime plus qu'en fonction de m'_1, m'_2 et de μ_{Hg}. Schéma de l'expérience ci-dessous.

Dans la question suivante, l'expérience est identique mais le mercure est remplacé par le solvant.



(ou m'_1) (ou m'_2)

❑ **10** – *Mesure de* $V_S = V_T - V_P$
La balance est équilibrée, d'abord avec l'échantillon suspendu dans l'air, ensuite avec l'échantillon immergé dans un liquide solvant de masse volumique μ_{Solv}, qui envahit tous ses pores. Exprimer V_S en fonction de m_3, m_4 et de μ_{Solv} (relation 10). À partir de ces quatre mesures, déduire la porosité de l'échantillon en considérant d'une part le couple de relations (9A et 10), d'autre part le couple (9B et 10). S'agit-il ici de ϕ_u ou de ϕ_T ?

III Essai de puits

Loi de Darcy, premières modélisations

La perméabilité intrinsèque d'une roche est l'aptitude de cette roche à laisser circuler à travers ses pores un fluide dont elle est saturée. Cette grandeur peut être chiffrée grâce à la loi expérimentale de Darcy : soit un élément cylindrique d'échantillon de longueur dz et de section d'aire A, saturé d'un fluide de viscosité dynamique η, qui le traverse horizontalement avec un débit volumique Q ; en régime permanent, la pression amont est P, la pression aval $P - \mathrm{d}P$ $(\mathrm{d}P > 0)$. Les parois latérales sont étanches et il n'y a pas de réaction du fluide sur la roche (cas général) ; dans ces conditions, $Q = A\dfrac{k}{\eta}\dfrac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}z}$, où k, coefficient de perméabilité est, en première approximation, indépendant du fluide considéré (loi de Darcy).

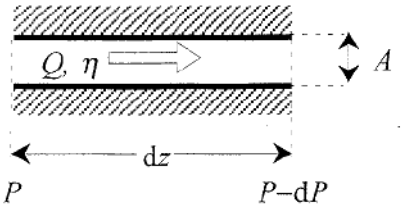


Fig. 2 : Notations pour la loi de Darcy

❑ **11** – Quelle est la dimension de k ?

On considère la circulation d'un fluide unique dans la couche rocheuse poreuse (hydrocarbure seul, sans eau et sans gaz dissous). Le gisement est homogène et isotrope, de perméabilité k et de porosité ϕ. La température du gisement est uniforme, la roche est incompressible et l'hydrocarbure possède un coefficient de compressibilité isotherme χ_T constant. La vitesse de filtration, $\mathbf{V}_{fil}$, est le rapport du débit Q traversant une section à l'aire A de cette section.

❑ **12** – Montrer que la loi de Darcy est compatible, pour un écoulement stationnaire horizontal, avec la relation $\mathbf{V}_{fil} = -\dfrac{k}{\eta}\mathbf{grad}\,P$. Quelle différence y a-t-il entre la vitesse de filtration $\mathbf{V}_{fil}$ et la vitesse $\mathbf{v}$ d'un point du fluide, telle qu'elle est introduite dans les premières questions ?

❑ **13** – Exprimant le bilan de matière dans une portion de cylindre de section A et de longueur dz, écrire la loi de conservation de la masse du fluide sous la forme

$$\phi\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\mathrm{div}\left(\rho\mathbf{V}_{fil}\right).$$

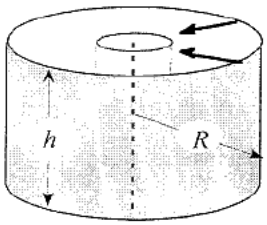
❑ **14** – Justifier qu'en première approximation l'on puisse accepter pour équation d'état du fluide la relation $\rho = \rho_0\left[1+\chi_T\left(P-P_0\right)\right]$; δP étant la variation typique de pression envisagée dans la suite, quelle inégalité relative au produit $\chi_T \delta P$ cela implique-t-il ?

❑ **15** – Au prix de quelle inégalité supplémentaire l'équation aux dérivées partielles $\Delta P = \dfrac{1}{K}\dfrac{\partial P}{\partial t}$ se déduit-elle de ce qui précède ? il n'est pas demandé de justifier cette inégalité ; exprimer K en fonction de k, ϕ, η et χ_T. Comment peut-on, par analogie, nommer K ?

R : ΔP est le laplacien de P. On trouvera K = $\dfrac{k}{\eta\phi\chi_T}$

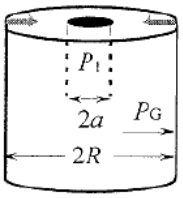
❑ **16** – Calculer K pour $k = 400\times10^{-15}$ m^2, $\phi = 0{,}20$ $\chi_T = 2{,}0\times10^{-9}$ Pa^{-1} et $\eta = 0{,}1$ Pa.s.

Écoulement radial



Écoulement radial

❑ **17** – On considère le régime permanent d'écoulement dans la portion d'échantillon de symétrie cylindrique représentée ci-contre. La hauteur de l'élément est h, la pression en un point du cylindre intérieur est $P(R_i) = P_i$ la pression à l'extérieur est $P(R_e) = P_e$, avec $P_e > P_i$. Montrer que la vitesse d'écoulement en un point à la distance r de l'axe est proportionnelle à $1/r$; que peut-on en déduire sur le débit $Q(r)$? Appliquer la loi de Darcy, sous la forme $Q = A\dfrac{k}{\eta}\dfrac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}r} = 2\pi r h\dfrac{k}{\eta}\dfrac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}r}$, entre deux cylindres de rayons respectifs r et $r+\mathrm{d}r$ et par intégration calculer $P_e - P_i$ en fonction de h, k, η, R_i, R_e et Q.



Puits de forage

Application : la pression dans un puits de forage cylindrique de rayon a creusé dans la roche poreuse et implanté loin des limites de la couche géologique est notée P_1 ; on constate qu'à partir d'un rayon R, dit rayon de drainage, la pression ne varie plus et vaut P_G (pression de gisement[1]) ; exprimer le débit du puits en fonction de P_G, P_1, R, a, h et k.

❑ **18** – Un puits cylindrique de rayon a $(a \approx 20$ cm$)$ a été creusé verticalement à travers une couche rocheuse horizontale d'épaisseur h $(h \approx 1$ à 100 m$)$ de rayon suffisamment grand pour que l'on puisse négliger tout effet de bord. On suppose l'écoulement radial horizontal avec un rayon de drainage (*cf.* question 17) R $(R \approx 100$ à 1000 m$)$, auquel on affecte la « pression de gisement » constante P_G ($P_G \approx 260$ bars, soit $2{,}6\times10^7$ Pa pour une profondeur de 2600 m). Utilisant à nouveau la relation $\dfrac{Q_0}{2\pi r h} = \dfrac{k}{\eta}\dfrac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}r}$, résoudre l'équation de diffusion de la pression pour un débit stationnaire Q_0 recueilli dans le puits. Notant $P_F = P(a)$ la pression dans le puit, calculer la différence $P_G - P_F$ en fonction de Q_0, η, k, h, R et a.

❑ **19** –Lorsque le débit Q_0 est maintenu constant par une vanne calibrée dès l'instant initial, la solution de l'équation de diffusion est $P(r,t) = P_G + \dfrac{\eta Q_0}{4\pi h k} Ei\left(-\dfrac{r^2}{r_0^2(t)}\right)$, où $r_0(t) = 2\sqrt{Kt}$.

La fonction « Exponentielle intégrale », $\mathrm{Ei}(x) = -\int_{-\infty}^{x} \exp(u)\frac{\mathrm{d}u}{u}$, est représentée pour $x<0$ Fig. 3 : à gauche avec une approximation pour $|x|$ « petit » et à droite pour $|x|$ « grand ».

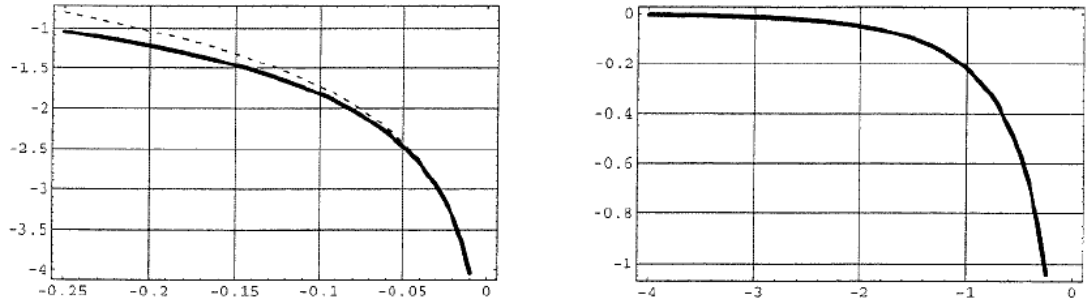


Fig. 3 : À gauche en trait plein, $\mathrm{Ei}(x)$ *; une approximation de* $\mathrm{Ei}(x)$ *pour* $-0{,}25 \le x \le 0{,}01$ *est* $\mathrm{Ei}(x) \approx \ln(-4x) - 0{,}81 \approx \ln(-1{,}78x)$ *; elle est représentée en pointillés.*
À droite, $\mathrm{Ei}(x)$ *pour* $-4 \le x \le -0{,}25$. *Lorsque* $|x| \ge 4$, $|\mathrm{Ei}(x)| \le 10^{-3}$.

Calculer la vitesse $V_{fil}(r,t)$ et le débit $Q(r,t)$; à quel moment retrouve-t-on pratiquement le régime permanent de la question 18 à une distance r ? Justifier que la solution présentée

---

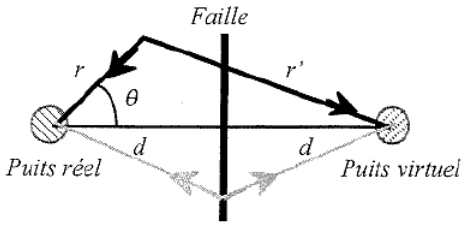
[1] Cette « saturation » exprime la limite de validité de la loi donnant $P_e - P_i$ en fonction des rayons.

garantit bien un débit constant dans le puits de rayon a ($a \approx 20$ cm), très rapidement après l'ouverture de la vanne ; on adoptera la valeur numérique $K \approx 10^{-2}$ m.s^{-2}.

❑ **20** – Exprimer alors la fonction $P(a,t) = P_F(t)$ en fonction de $\ln(t)$; on utilisera la formule d'approximation donnée Fig. 3 et l'on posera $m = \frac{\eta Q_0}{4\pi h k}$. En déduire une méthode graphique expérimentale pour mesurer le produit hk du puits.

❑ **21** – On revient au cas général. En s'appuyant sur l'un des graphes de la Fig. 3, montrer que si, à partir d'un instant t_R, le graphe de $P_F(t)$ (pratiquement, celui de $P_F[\ln(t)]$) présente un tronçon rectiligne sensiblement parallèle à l'axe des abscisses, alors on peut en déduire le rayon de drainage R du puits.

Application numérique : avec les valeurs déjà utilisées on mesure $t_R \simeq 3$ jours ; donner une estimation de R.

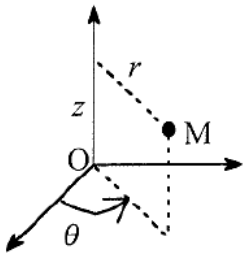


❑ **22** – Il peut arriver que le gisement ne soit pas limité par son rayon de drainage mais qu'une faille limite la roche-réservoir ; on modélise la faille comme un plan vertical à la distance d $(a << d < R)$ du puits. On introduit de ce fait la condition supplémentaire suivante dans la résolution de l'équation de diffusion : aucun débit de pétrole ne traverse le plan faille. Montrer que cette condition peut être représentée analytiquement par un puits « virtuel » symétrique du premier par rapport au plan faille (donc de même rayon a et de même débit Q_0). Donner alors la solution générale $P(r,\theta,t)$ compte tenu de la propriété de linéarité de l'équation de diffusion.

❑ **23** – On s'intéresse désormais à $P_F(t) = P(a,t)$ et l'on pose $t_i = \frac{4d^2}{K}$ et $t_P = \frac{a^2}{4K}$. Étudier les deux cas $t_P << t << t_i$ d'une part, $t >> t_i$ d'autre part et donner dans chaque cas la forme approchée de $P_F(t)$. Quelle donnée déduit-on de l'intersection des deux droites dans le diagramme $P_F[\ln(t)]$?

❑ **24** – Conclusion : montrer que grâce à un essai de puits et avec les mesures de porosité de la roche et du coefficient k, on peut estimer le volume maximum d'hydrocarbure qu'on peut retirer de ce puits, valeur mesurée en surface à la pression atmosphérique (et non pas à la pression de gisement P_G). Estimer ce volume à l'aide des données numériques fournies dans l'énoncé. À quoi sert, dans un champ pétrolier, la connaissance du rayon de drainage d'un puits pour le positionnement des divers puits qui couvrent ce champ ?

Coordonnées cylindriques d'axe Oz



$$\mathrm{div}(\mathbf{A}) = \frac{1}{r}\frac{\partial(rA_r)}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial A_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$$

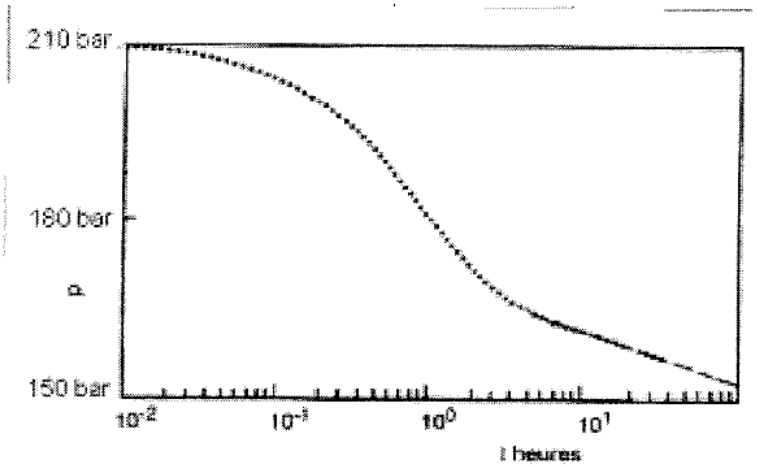
$$\Delta[f(r)] = \frac{1}{r}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(r\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}r}\right)$$

$$\mathbf{grad}[f(r,\theta,z)] = \frac{\partial f}{\partial r}\hat{\mathbf{u}}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial \theta}\hat{\mathbf{u}}_\theta + \frac{\partial f}{\partial z}\hat{\mathbf{u}}_z$$

Une formule utile : f étant une fonction et $\mathbf{A}$ un vecteur,

$$\mathrm{div}(f\mathbf{A}) = f\,\mathrm{div}(\mathbf{A}) + \mathbf{A}\,\mathbf{grad}(f).$$

FIN DE L'ÉPREUVE



Un relevé de $P(a,t) = P_F[\ln(t)]$. Au voisinage de $t \approx 10$ h, on voit apparaître le régime linéaire et donc la possibilité de mesurer une pente. Dans la pratique, cependant, on ne trouve pas d'écoulement monophasique et l'interprétation des relevés est compliquée.

1905-2005 Relation d'Einstein pour un mouvement lent

La viscosité η d'une solution peut intuitivement être représentée par un développement en série de la concentration c du soluté : $\eta(c) = \eta_0(1 + k_1 c + k_2 c^2 + \ldots)$, ce qui entraîne $\eta_s = \dfrac{\eta}{\eta_0} - 1 = k_1 c + k_2 c^2 + \ldots$. Einstein a établi pour des particules sphériques la relation $\eta_s = 2{,}5\phi$, où ϕ est la fraction volumique du soluté dans la solution.

Si V_h est le volume hydraté d'une particule de masse molaire M et N_A le nombre d'Avogadro, alors $\phi = V_h \dfrac{N_A}{M} c$.