

## PARTIE I : Moteur et commande d'un modèle réduit d'avion (e3a PSI extrait)

La majorité des moteurs utilisés en modélisme et en robotique amateur sont des moteurs à courant continu à aimant permanent qui transforment l'énergie électrique fournie par les accumulateurs en énergie mécanique. Nous nous intéresserons, dans le problème qui suit, à la mise en mouvement de l'hélice d'un modèle réduit d'avion et au contrôle de sa vitesse de rotation.

Tous les composants électroniques sont supposés parfaits. Les amplificateurs opérationnels (AO) utilisés sont idéaux. Si un amplificateur opérationnel fonctionne en régime de saturation, sa tension de sortie sera égale à  $+U_{SAT}$  ou  $-U_{SAT}$  avec  $U_{SAT} = 12\text{ V}$ . Lorsqu'un composant est utilisé en commutation (diode, transistor ou AO), le passage d'un état à l'autre s'effectue de façon instantanée. La résistance des fils de conduction électrique est nulle.

### A / LE MOTEUR ÉLECTRIQUE A COURANT CONTINU

L'hélice est entraînée par un moteur à courant continu à aimant permanent (noté M.C.C.) possédant, au point nominal de fonctionnement, les caractéristiques suivantes :

- tension nominale d'induit :  $U_{nom} = 12\text{ V}$ ,
- intensité du courant dans l'induit :  $I_{nom} = 2,50\text{ A}$ ,
- fréquence de rotation :  $N_{nom} = 3000\text{ tr.min}^{-1}$ .

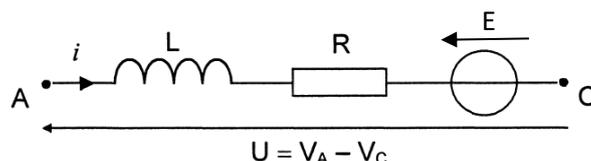
Le **rotor** ou **induit** du M.C.C. (figure p1) est constitué de  $n$  spires rectangulaires enroulées sur un cylindre de rayon  $a$  et de longueur  $b$ . L'ensemble tourne à la vitesse angulaire  $\Omega$  autour de son axe  $zz'$  (figure p2) en restant dans l'entrefer d'un aimant permanent (**stator** ou **inducteur**) – réalisé à partir d'un alliage cobalt-samarium – qui crée un champ magnétique radial  $\vec{B} = B_r \vec{e}_r$  dont la composante  $B_r$  est représentée sur la figure p3. Les spires sont connectées à l'extérieur par le système balai-collecteur en restant dans la configuration de la figure p2.

Le rotor est équilibré pour minimiser les vibrations. Le moment d'inertie de l'ensemble ramené sur l'axe du moteur est  $J = 10^{-5}\text{ kg.m}^2$  ; les pertes fer (dans le circuit magnétique) et mécaniques (frottements solides) sont négligées. Lors de sa rotation, le cylindre est soumis à une force de frottement fluide, de couple :  $\vec{C}_f = -\beta \vec{\Omega} = -C_f \vec{e}_z$  (avec  $C_f > 0$  et  $\beta = 10^{-5}\text{ kg.m}^2.\text{s}^{-1}$ ).

L'induit possède une résistance  $R = 0,24\ \Omega$  et une inductance  $L$  supposées constantes. Un générateur de tension constante  $V_A - V_C = U$  (avec  $U > 0$ ) alimente le moteur. A l'instant  $t$ , la branche  $MN$  est située dans l'intervalle  $-\pi/2 < \theta < \pi/2$  et la branche  $PQ$  dans l'intervalle  $\pi/2 < \theta < 3\pi/2$ .

- A1.** Rappeler les expressions de la f.c.é.m.,  $E$ , et du couple électromagnétique,  $C_{em}$ , pour une MCC ; on fera intervenir une grandeur homogène à un flux dont on indiquera qualitativement les dépendances et que l'on notera  $\Phi_0$ . Quelle relation lie  $E$  et  $C_{em}$  ?

Le schéma électrique équivalent de l'induit en régime dynamique est proposé ci-dessous :



- A2.** En déduire l'équation électrique reliant les grandeurs  $E$ ,  $U$ ,  $R$ ,  $L$  et  $i$ .

- A3.** Ecrire l'équation scalaire mécanique reliant  $J$ , la vitesse de rotation, le couple utile  $-C_u$  imposé au moteur lorsqu'il entraîne la charge mécanique (avec  $C_u > 0$  et supposé constant), le couple de frottement et le couple électromagnétique  $C_{em}$ .
- A4.** Expliquer qualitativement comment freiner le moteur. Quel est le comportement du moteur lorsqu'il tourne en roue libre, c'est-à-dire non alimenté ?
- Fonctionnement en régime nominal**
- A5.** Calculer la valeur de la force électromotrice du moteur  $E$  ; en déduire la constante  $\Phi_0$  et préciser son unité.
- A6.** En négligeant la chute de tension aux bornes de la bobine, déduire des équations mécanique et électrique couplées, l'équation différentielle vérifiée par la vitesse angulaire  $\Omega$  en utilisant  $\Phi_0$ ,  $\beta$ ,  $C_u$ ,  $J$ ,  $R$  et  $U$ . Déterminer le temps  $\tau$  caractéristique de la "mise en vitesse" du moteur. Exprimer la vitesse angulaire limite  $\Omega_{lim}$ . Combien de temps est-il nécessaire pour atteindre cette vitesse à 1 % près ?
- A7.** Calculer le moment du couple utile  $C_u$  en régime nominal et  $\Omega_{lim}$  (en  $\text{tr.min}^{-1}$ ). Quel est le courant  $i_d$  dans l'induit au démarrage, si la tension d'induit est égale à la tension nominale ? Commenter.  
Quelle est, au démarrage, la tension minimale  $U_{dmin}$  nécessaire pour entraîner le moteur ?

## B / COMMANDE DU M.C.C. PAR UN HACHEUR

*Le moteur est alimenté par un hacheur, la tension et le courant d'induit ne sont plus continus ;  $u(t) = v_A(t) - v_C(t)$  et  $i(t)$  sont des fonctions périodiques du temps. Leurs valeurs moyennes respectives sont notées  $\langle u(t) \rangle$  et  $\langle i(t) \rangle$ .*

*L'hélice tourne à vitesse constante. L'induit du M.C.C. représenté figure p4 est alimenté par l'intermédiaire d'un hacheur série connecté à une source de tension idéale de valeur  $U_0 = 12 \text{ V}$ .*

*L'interrupteur électronique  $H_1$  est commandé de manière périodique à la période  $T_{H1}$  par un signal rectangulaire ou créneau de rapport cyclique  $\alpha$  et de fréquence de hachage  $N_{H1} = 2 \text{ kHz}$  généré par un circuit non représenté :*

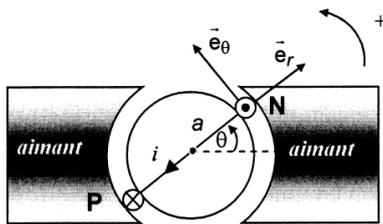
- *l'interrupteur  $H_1$  est fermé entre les instants 0 et  $\alpha T_{H1}$ ,*
- *l'interrupteur  $H_1$  est ouvert entre les instants  $\alpha T_{H1}$  et  $T_{H1}$ ,*
- *à l'état passant, la diode  $D_1$  est assimilée à un interrupteur fermé,*
- *à l'état bloqué, elle est assimilée à un interrupteur ouvert.*

*Le rapport cyclique est réglé à  $\alpha = 0,6$ .*

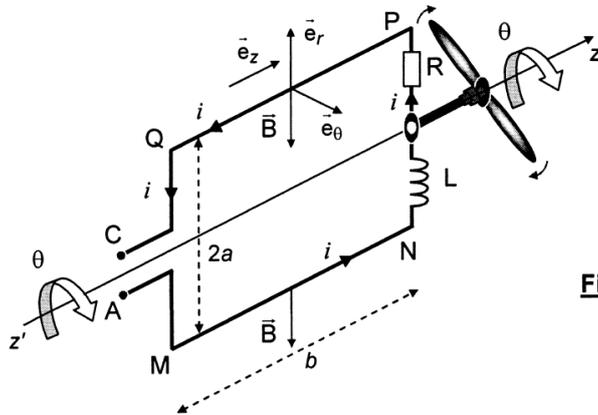
- B1.** Montrer qu'un interrupteur idéal ne consomme pas de puissance et que les interrupteurs  $H_1$  et  $D_1$  ne peuvent être ni fermés, ni ouverts simultanément.
- B2.** Quel est le rôle de la diode  $D_1$  dite "de roue libre" ?
- B3.** Représenter sur deux périodes le chronogramme de la tension  $u(t)$ , c'est-à-dire son évolution au cours du temps. Préciser sur le graphe l'amplitude de  $u(t)$  et les instants  $\alpha T_{H1}$  et  $T_{H1}$ .
- B4.** La différence de potentiel aux bornes de la résistance de l'induit est négligée. Calculer la valeur moyenne  $\langle u(t) \rangle$  de la tension  $u(t)$ . En déduire la force électromotrice  $E$  et la vitesse de rotation  $\Omega$  de l'induit en  $\text{tr.min}^{-1}$ . Montrer que la vitesse de rotation  $\Omega$  du moteur est proportionnelle au rapport cyclique  $\alpha$ . Calculer la valeur de  $\Omega$  pour  $\alpha = 0,6$ .

- B5.** Justifier l'évolution au cours du temps de l'intensité du courant  $i(t)$  représentée sur le graphe figure p5. Etablir l'expression de l'ondulation du courant  $\Delta I = I_{\max} - I_{\min}$  en fonction de  $U_0$ ,  $L$ ,  $\alpha$  et  $T_{H1}$ . Pourquoi est-il intéressant de diminuer l'ondulation du courant ? Préciser le rôle d'une bobine supplémentaire de lissage qui peut être placée en série avec le moteur. A partir du graphe, calculer l'inductance  $L$  de l'induit.
- B6.** Déterminer la valeur moyenne  $\langle i(t) \rangle$  de l'intensité du courant. Vérifier que la chute de tension aux bornes de  $R$  est négligeable.

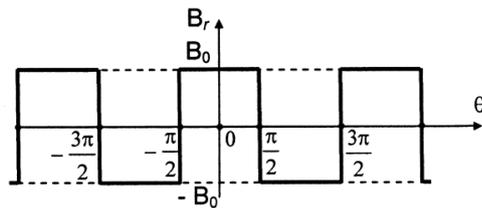
### ANNEXE



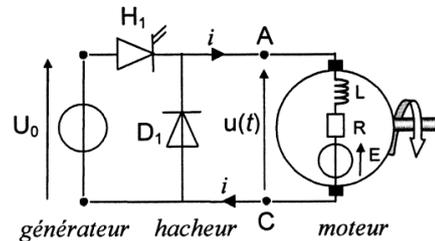
**Figure p1**



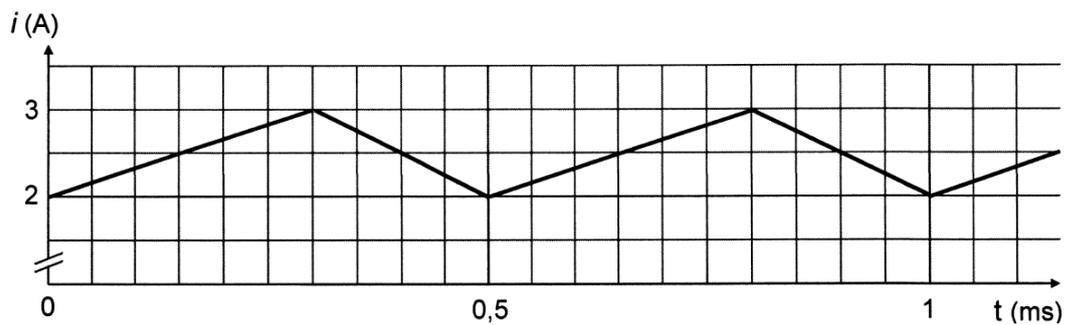
**Figure p2**



**Figure p3**



**Figure p4**



**Figure p5**

## PARTIE II : Moteur synchrone - CENTRALE PSI (Extrait)

### Dans cette partie, le rotor est constitué d'aimants permanents

Certaines questions, repérées par une barre en marge, ne sont pas guidées et demandent de l'initiative de la part du candidat. Elles sont très significativement valorisées dans le barème. Même si elles n'ont pas abouti, les pistes de recherche doivent être consignées par le candidat et seront valorisées si elles sont pertinentes. Le barème tient compte du temps nécessaire pour explorer ces pistes et élaborer un raisonnement.

#### III.A – Champ magnétique rotorique

Le rotor sera assimilé à un bloc cylindrique homogène d'axe  $z'z$ , d'aimantation permanente uniforme d'axe  $y'y$ . L'axe  $x'x$  est un axe fixe dans le référentiel du stator permettant de repérer les angles dans le plan perpendiculaire à  $z'z$  (figure 4) :

- $\alpha$  repère la direction de l'axe  $y'y$  ;
- $\theta$  repère la position angulaire d'un point  $M$  quelconque.

Dans la suite, on s'intéressera surtout aux points  $M$  situés dans l'entrefer entre la culasse statorique (de rayon intérieur  $a$ ) et le rotor (de rayon extérieur  $a - e$ ), soit tels que  $a - e < r < a$ .

III.A.1) Rappeler la relation entre  $\vec{B}_r$ ,  $\vec{H}_r$  et  $\vec{M}_r$  représentant respectivement le vecteur champ magnétique, le vecteur excitation magnétique et le vecteur aimantation du milieu magnétique constitutif du rotor.

III.A.2) Au sein des aimants permanents, la relation peut s'écrire  $\vec{B} = \mu_0 \mu_p \vec{H} + \vec{J}$ , où  $\mu_p$  est la perméabilité relative de « recul » de l'aimant (légèrement supérieure à l'unité pour les aimants performants) et  $\vec{J}$  le champ magnétique rémanent de l'aimant. Au passage du milieu aimanté constituant le rotor à l'entrefer, les continuités aboutissent à l'expression suivante des composantes du champ magnétique rotorique

$$\begin{cases} B_r(r, \theta) = \frac{1}{2}(1 - x_e)^2 \left(1 + \left(\frac{a}{r}\right)^2\right) J \cos(\theta - \alpha) \\ B_\theta(r, \theta) = -\frac{1}{2}(1 - x_e)^2 \left(1 - \left(\frac{a}{r}\right)^2\right) J \sin(\theta - \alpha) \end{cases}$$

pour  $a - e < r < a$  et  $x_e = \frac{e}{a}$ .

Sachant que l'entrefer avoisine  $e = 3$  mm et l'alésage  $a = 15$  cm, on considère un champ magnétique d'entrefer indépendant de  $r$ . En déduire l'expression approchée du champ magnétique rotorique.

III.A.3) On note  $\Omega$  la vitesse angulaire constante du rotor dans le référentiel fixe du stator et on prend  $\alpha = \alpha_{rs}$  nul à l'instant initial. Réécrire l'expression simplifiée du champ magnétique rotorique à un instant  $t$  en un point  $M$  de position angulaire  $\theta$  dans l'entrefer.

Donner l'expression de la composante radiale du champ rotorique ressenti à l'instant  $t$  dans l'entrefer dans la direction  $\theta = \pi/2$

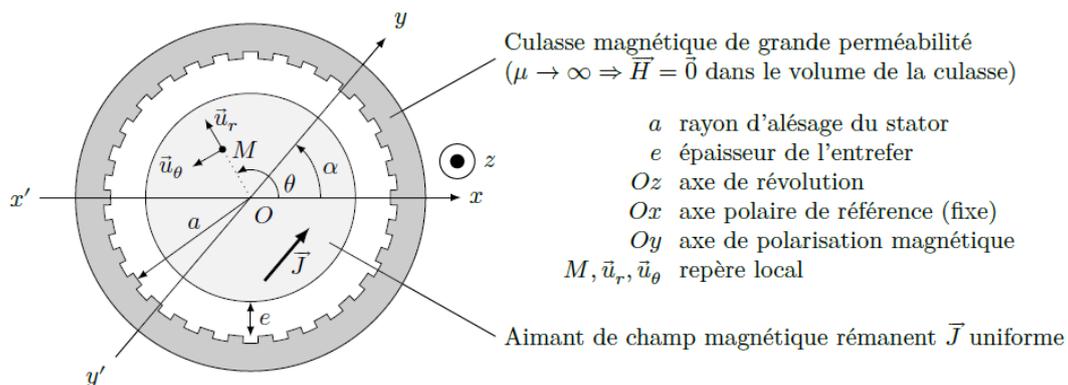


Figure 4

#### III.B – Champ magnétique statorique

On cherche alors à réaliser un champ magnétique statorique  $\vec{B}_s$  tournant à vitesse angulaire constante  $\omega_s > 0$  (donc dans le sens direct) grâce à une implantation particulière de spires dans les encoches du stator. Pour cela, nous utiliserons deux enroulements porteurs de courants déphasés de  $\pi/2$  :

$$\begin{cases} i_1(t) = I \cos(\omega_s t + \beta_s) \\ i_2(t) = I \cos(\omega_s t + \beta_s - \pi/2) \end{cases}$$

Dans un premier temps, une seule paire d'encoches, située sur l'axe perpendiculaire à  $x'x$  (figure 5) est bobinée et parcourue par le courant d'intensité  $i_1(t)$ . On cherche à déterminer le champ  $\vec{B}_{s1}$  en tout point  $M$  de l'entrefer.

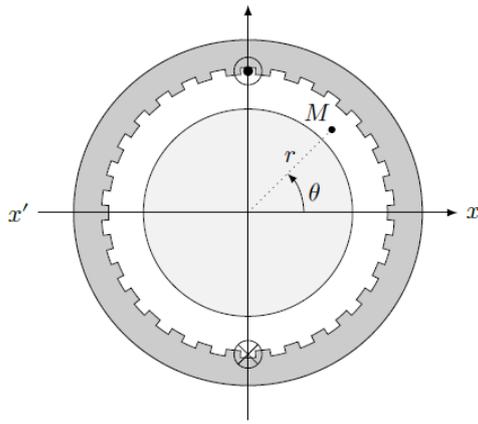


Figure 5

On rappelle les relations trigonométriques :

$$\cos(a+b) = \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b)$$

$$\sin(a+b) = \cos(a)\sin(b) + \sin(a)\cos(b)$$

III.B.1) En utilisant le schéma de la figure 5, les symétries et la circulation du vecteur excitation magnétique, montrer que

$$\begin{cases} \overline{B}_{s1}(r, \theta, t) = \frac{\mu_0 i_1(t)}{2e} \vec{u}_r & \text{pour } \theta \in ]-\pi/2, \pi/2[ \\ \overline{B}_{s1}(r, \theta, t) = -\frac{\mu_0 i_1(t)}{2e} \vec{u}_r & \text{pour } \theta \in ]\pi/2, 3\pi/2[ \end{cases}$$

III.B.2) Justifier qu'une répartition judicieuse des brins dans des encoches régulièrement réparties autour du stator puisse fournir un champ dont l'allure théorique est de la forme donnée figure 6.

Combien d'encoches réparties correspondent à la courbe de la figure 6 ? Précisez les repères angulaires sur l'axe des abscisses.

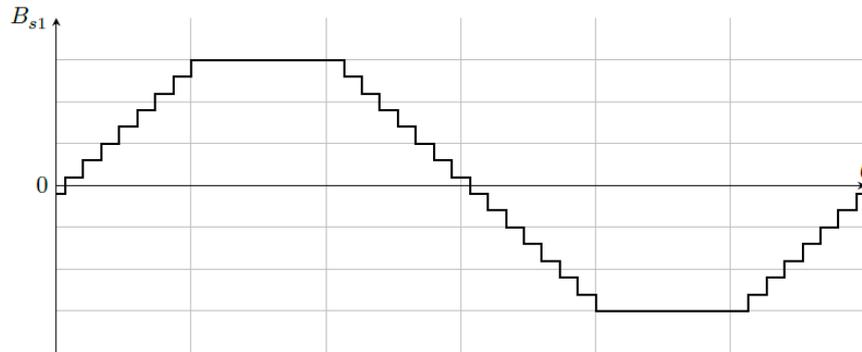


Figure 6

III.B.3) Le champ statorique radial  $B_{s1}$  s'approche d'une fonction sinusoïdale de la forme  $B_{s1}(\theta, t) \approx K_s i_1(t) \cos \theta$  que l'on prendra désormais comme la contribution réelle du courant  $i_1(t)$  dans l'enroulement.

De quoi dépend la constante  $K_s$  ?

III.B.4) On rajoute le second enroulement décalé spatialement de l'angle  $+\pi/2$  (donc sur l'axe  $x'x$ ). Le courant  $i_2(t)$  de cet enroulement est en quadrature retard sur le courant  $i_1(t)$ .

Montrer que sa participation au champ radial statorique s'écrira  $B_{s2}(\theta, t) = K_s I \sin(\omega_s t + \beta_s) \sin \theta$ .

III.B.5) Montrer que le champ magnétique statorique résultant est un champ tournant dans le sens trigonométrique à la vitesse angulaire  $\omega_s$  dont on donnera l'amplitude.

### III.C – Énergie magnétique dans l'entrefer

III.C.1) Rappeler l'expression de la densité volumique d'énergie magnétique dans un milieu de perméabilité relative  $\mu_r$ .

III.C.2) Calculer l'énergie magnétique dans l'entrefer (siège des champs rotorique et statorique) en négligeant les effets de bord et en notant  $l$  la longueur du rotor.

On pourra alléger l'expression finale en faisant apparaître le volume d'entrefer  $V = 2\pi a e l$ .

### III.D – Moment électromagnétique s'exerçant sur le rotor

III.D.1) Rappeler l'expression du couple des forces électromagnétiques exercées sur le rotor, à partir de l'énergie magnétique.

En déduire l'expression de ce couple en utilisant le résultat de la question III.C.2.

III.D.2) Quelles conditions sont nécessaires à l'obtention d'un couple moteur moyen positif ?

III.D.3) Discuter le rôle de  $\beta_s$  (angle de « calage » des courants) et la stabilité de deux points de fonctionnement associés à deux valeurs de  $\beta_s$ .