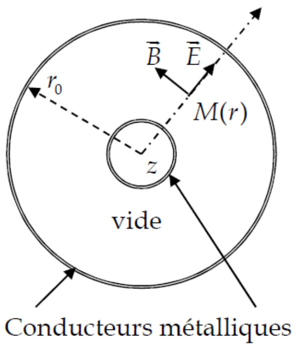
PARTIE III
Réalisation de milieux continus à l'aide de composants discrets
D'après X-ENS PSI 2009

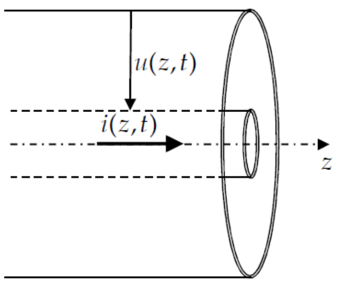
Les progrès de la miniaturisation permettent de réaliser des milieux aux propriétés inhabituelles. Ces milieux sont réalisés par association de composants discrets dont les dimensions dépendent des progrès technologiques et des applications. Il s'agit d'étudier les conditions permettant d'assimiler l'ensemble des composants discrets à un milieu continu

On pose $c = \dfrac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}}$ avec la célérité de la lumière dans le vide : $c = 3.10^8\ m.s^{-1}$ et la perméabilité magnétique du vide : $\mu_0 = 4\pi.10^{-7}\ H.m^{-1}$.

A) Propagation dans un câble coaxial sans pertes

1) Ecrire les équations de Maxwell dans le vide et en déduire les équations de propagation du champ électrique et du champ magnétique. Déterminer la relation que doivent vérifier k et ω pour les solutions progressives sinusoïdales $\underline{\vec{E}} = \underline{\vec{E}}_0 e^{j(\omega t - kz)}$.





On rappelle que :
$\overrightarrow{rot}(\overrightarrow{rot}\vec{A}) = \overrightarrow{grad}(div(\vec{A})) - \vec{\Delta}(\vec{A})$,
pour un champ de vecteur
$\vec{A}$ quelconque.

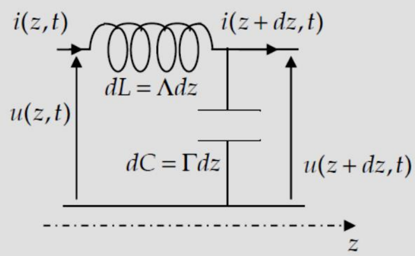
2) On désire maintenant étudier la propagation dans un câble coaxial. Le câble est constitué de deux cylindres réalisés en conducteur que l'on considérera parfait. Le milieu entre les conducteurs est assimilé au vide. On cherche une solution du problème sous la forme $\underline{\vec{E}} = E_0 \dfrac{r_0}{r} e^{j(\omega t - kz)} \overrightarrow{u_r}$ et $\underline{\vec{B}} = \dfrac{E_0}{c}\dfrac{r_0}{r} e^{j(\omega t - kz)} \overrightarrow{u_\theta}$, avec $k = \dfrac{\omega}{c}$.

Appliquer le théorème de Gauss pour une surface de Gauss cylindrique d'axe Oz de hauteur h et de rayon r ; en déduire la charge intérieure à ce cylindre.

Appliquer le théorème d'Ampère pour un contour d'Ampère circulaire d'axe Oz et de rayon r ; en déduire l'intensité enlacée correspondante.

3) On fait intervenir l'intensité du courant électrique parcourant le conducteur intérieur $i(z,t)$ et la tension entre le conducteur intérieur et le conducteur extérieur $u(z,t)$. On pose $\underline{i} = \alpha E_0 e^{j(\omega t - kz)}$, déterminer α. On admettra que $\underline{u} = \sqrt{\dfrac{\mu_0}{\varepsilon_0}}\,\underline{i}$. Quelle équation aux dérivées partielles est vérifiée par l'intensité et la tension ?

4) On désire représenter la propagation dans le câble par une ligne à constantes réparties :



Montrer que la représentation du problème sous la forme d'une ligne à constantes réparties permet d'obtenir la même solution qu'à la question précédente si certaines conditions sont vérifiées par les paramètres Λ inductance par unité de longueur et Γ capacité par unité de longueur. On exprimera Λ, Γ en fonction de ε_0, μ_0.

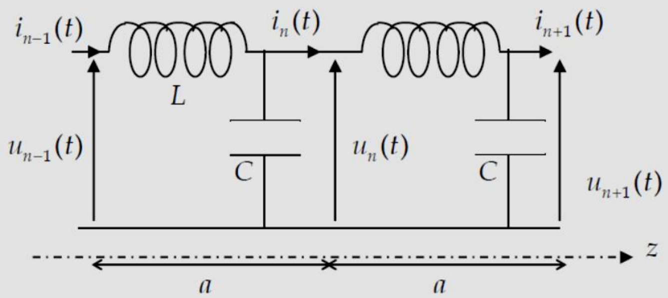
Pour cela, on utilisera notamment l'impédance caractéristique du câble $R_C = \sqrt{\frac{\Lambda}{\Gamma}}$.

5) La valeur efficace de l'intensité de l'onde progressive sinusoïdale $\underline{i} = \sqrt{2} I_0 e^{j(\omega t - kz)}$ est notée $I_0 = |\underline{i}|_{efficace}$.

Calculer la puissance moyenne, P_{EM_L} transmise dans le câble à l'abscisse z en fonction de Λ, Γ, I_0. Dans quelle direction est transmise la puissance pour une onde se propageant suivant les z croissants ?

6) Calculer l'énergie moyenne par unité de longueur de la ligne lors de la propagation de l'onde progressive sinusoïdale w_{EM_L}. Que représente la grandeur $\frac{P_{EM_L}}{w_{EM_L}}$?

7) On désire reproduire à l'aide de composants discrets un circuit dont les tensions et les intensités ont approximativement les mêmes valeurs dans l'espace et dans le temps. On réalise des cellules de base composées d'une inductance et d'un condensateur. Chacune de ces cellules est de longueur a. On les place en chaîne comme sur le schéma.

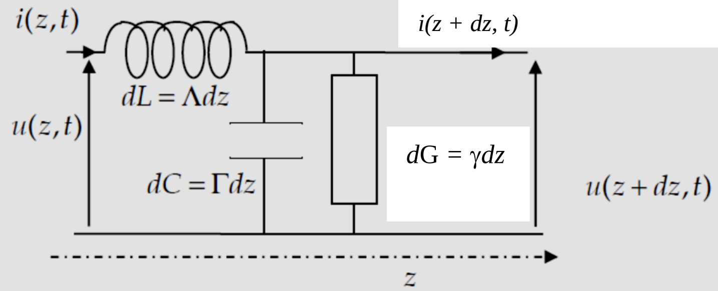


a) Trouver la relation liant $u_{n-1}(t)$, $u_n(t)$, $u_{n+1}(t)$ et $\frac{d^2 u_n(t)}{dt^2}$.
b) A quelle condition sur ω, k, a et $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ les fonctions de la forme $U_0 e^{j(\omega t - kna)}$ sont-elles solutions de l'équation précédente ?
c) Soit λ la longueur d'onde associée à k ; on veut que les solutions soient identiques à celles de la ligne à constantes réparties. Montrer que cela est possible si $\lambda \gg a$ et en écrivant une relation liant L, a et Λ d'une part et une relation liant C, a et Γ d'autre part.

8) On dispose de composants de dimensions de l'ordre du centimètre, quels types d'ondes peut-on faire se propager sans dispersion notable ? Même question pour des composants de l'ordre de la dizaine de micromètre ?

B) Atténuation et amplification des ondes électromagnétiques

9) Pour prendre en compte les pertes énergétiques lors de la propagation, on complète la représentation de la ligne à constantes réparties grâce à une conductance dG placée en parallèle du condensateur.

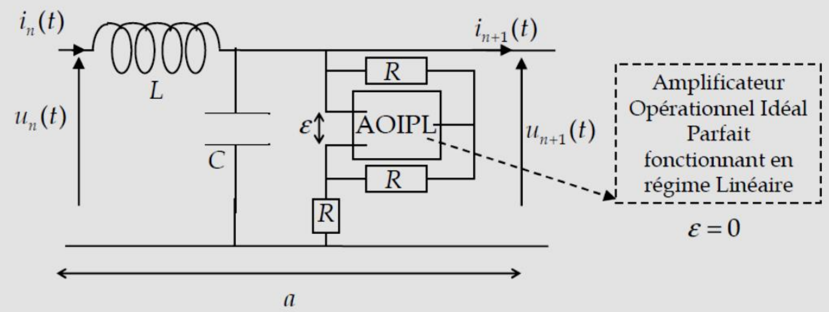


a) Donner l'équation aux dérivées partielles vérifiée par la fonction u(t).

b) En déduire la relation de dispersion associée à la propagation d'une OPPM de la forme $U_0\exp([j(\omega t - \underline{k}z)]$, avec $\underline{k} = k' - jk''$, où k' et k'' sont réels.

c) Montrer que les ondes progressives selon les z croissants sont atténuées si γ est positif. Quels sont les signes de k' et k'' ?

10) *Amplification* - On considère la cellule ci-dessous :



a) Donner un schéma électrocinétique équivalent à la branche constituée de l'AOIPL et des trois résistances R.

b) En utilisant les résultats de la question 7), donner une modélisation à constantes réparties de la ligne constituée de l'enchaînement de ces cellules ; on introduira une conductance linéique négative que l'on notera χ.

c) En déduire qu'une onde progressive amplifiée, de la forme $U_0\, e^{\frac{z}{l_C}}\, e^{j(\omega t - k'z)}$ où l_C et k' sont des grandeurs positives, peut se propager suivant les z croissants.

11) Connaissez-vous des dispositifs où l'on utilise une amplification pour des ondes électromagnétiques de longueur d'onde proche du micromètre ?

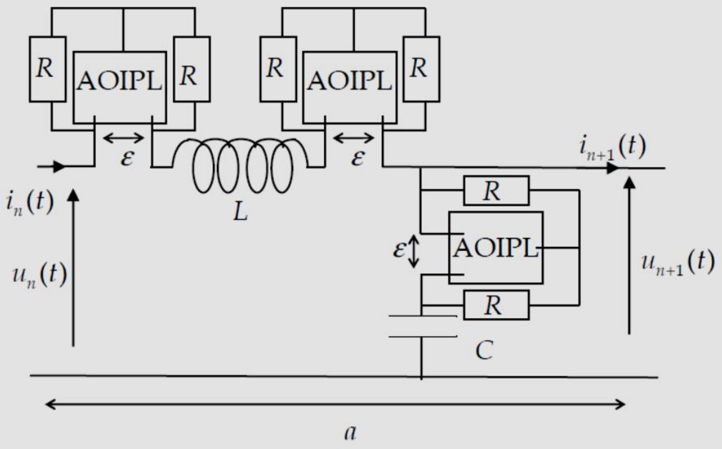
Dans la question suivante, on supposera $l_C >> \lambda = 2\pi/k'$.

12) On désire obtenir un milieu continu permettant la propagation d'une onde amplifiée. En utilisant le modèle de la ligne à constantes réparties, déterminer l'équation différentielle vérifiée par la tension. On fera intervenir les paramètres c et ℓ_c.

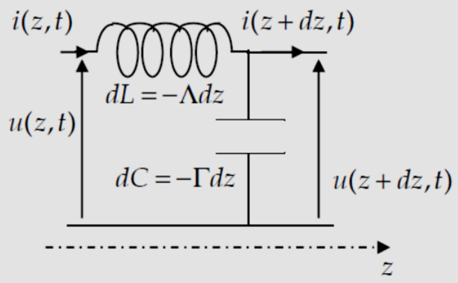
13) En supposant la tension proportionnelle au champ électrique, en déduire une relation constitutive du milieu continu que l'on supposera linéaire et non chargé (c'est-à-dire une relation à ajouter aux équations de Maxwell pour obtenir le résultat escompté).
Commenter cette relation en la comparant à une relation phénoménologique du cours.

C) Réalisation d'un milieu paradoxal

14) On construit, en respectant les conditions du 7) la ligne composée d'amplificateurs opérationnels idéaux parfaits fonctionnant en régime linéaire. Montrer qu'une onde progressive sinusoïdale peut se propager dans cette ligne $\underline{u}_n = U_0 e^{j(\omega t - kna)}$, $\frac{2\pi}{k} >> a$.



15) Quelles sont les conditions permettant d'utiliser le modèle de ligne à constantes réparties pour le système précédent ? On exprimera Λ et Γ en fonction de L, C, a, R.



16) La valeur efficace de l'intensité de l'onde progressive sinusoïdale $\underline{i} = \sqrt{2} I_0 e^{j(\omega t - kz)}$ est notée $I_0 = |\underline{i}|_{efficace}$. Calculer la puissance moyenne transmise dans le câble à l'abscisse x, P_{EM_L}, en fonction de Λ, Γ, I_0. Dans quelle direction est transmise la puissance ?

17) En utilisant la partie I)A), vérifier que les équations de Maxwell pour lesquelles $\varepsilon = -\varepsilon_0, \mu = -\mu_0$ sont compatibles avec le modèle de ligne à constantes réparties précédent.

18) Montrer que, pour une onde plane progressive sinusoïdale $\underline{\vec{E}} = \underline{\vec{E}}_0 e^{j(\omega t - kz)}$, on obtient une transmission de la puissance dans le sens opposé à la vitesse de phase. On appelle ces milieux, des milieux d'indice négatif !

FIN DE CETTE PARTIE

FIN DU DS