PSI

ENDOMORPHISMES D'UN ESPACE VECTORIEL EUCLIDIEN

Dans ce chapitre, E est un espace vectoriel euclidien de dimension $n \geqslant 1$, dont on note $<\ ,\ >$ le produit scalaire.

I - ISOMÉTRIES VECTORIELLES

1) Isométrie vectorielle ou automorphisme orthogonal

th. 1

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. Les assertions suivantes sont équivalentes :

a) $\forall\, x \in E, \quad ||u(x)|| = ||x||$.
b) $\forall\, (x,y) \in E^2, \quad <u(x), u(y)> = <x, y>$.
c) u transforme une base orthonormale en une base orthonormale .

Lorsque u vérifie l'une des ces assertions, u est bijective
et on dit que u est une isométrie vectorielle ou un automorphisme orthogonal.
On note $\mathcal{O}(E)$ l'ensemble des automorphismes orthogonaux.

th. 2

La composée de deux isométries vectorielles est une isométrie vectorielle.
La réciproque d'une isométrie vectorielle est une isométrie vectorielle.

Le déterminant d'une isométrie vectorielle vaut 1 ou -1.

L'ensemble $\{u \in O(E)\ /\ det(u) = 1\}$ est appelé groupe spécial orthogonal ou groupe des rotations, et noté $\mathcal{SO}(E)$

th. 3

Les valeurs propres <u>réelles éventuelles</u> d'un endomorphisme orthogonal u sont 1 et -1.
De plus, les sous espaces vectoriels $\mathrm{Ker}(u - Id_E)$ et $\mathrm{Ker}(u + Id_E)$ sont orthogonaux.

th. 4

Soit F un sous espace vectoriel de E stable par l'isométrie vectorielle u. Alors $F^\perp$ est également stable par u.
De plus l'endomorphisme induit par u sur $F^\perp$ est une isométrie vectorielle.

2) Matrices orthogonales

déf.

Une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ *est orthogonale lorsque* ${}^tA \times A = I_n$ *ce qui équivaut à* ${}^tA = A^{-1}$.
On note $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ *l'ensemble des matrices orthogonales.*

th. 1

Soit $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \ldots, e_n)$ une base orthonormale de E fixée.
Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $u \in \mathcal{L}(E)$ tel que $A = M_{\mathcal{B}}(\mathbf{u})$.

Alors A est une matrice orthogonale si et seulement si u est une isométrie vectorielle.

th. 2

Les propriétés suivantes sont équivalentes :

a) $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est orthogonale.
b) ${}^tA$ est orthogonale.
c) Les vecteurs colonnes de A forment une base orthonormale de $\mathcal{M}_{n1}(\mathbb{R})$ pour le produit scalaire usuel.
d) Les vecteurs lignes de A forment une base orthonormale de $\mathcal{M}_{1n}(\mathbb{R})$ pour le produit scalaire usuel.
e) A est la matrice de passage entre deux bases orthonomales de $\mathbb{R}^n$.

th. 3

Le produit de deux matrices orthogonales est une matrice orthogonale.
L'inverse d'une matrice orthogonale est une matrice orthogonale.
$\mathcal{SO}_n(\mathbb{R}) = \{A \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})\ /\ \det(A) = 1\}$ s'appelle le groupe spécial orthogonal.

3) Symétries orthogonales

Soit F est un sous espace de E. On sait que $E = F \oplus F^{\perp}$.
La symétrie s associée à cette somme directe est appelée symétrie orthogonale par rapport à F.

Rappelons que si $x = y + z \in F \oplus F^{\perp}$ alors $s(x) = y - z$.

prop. 1 | **Si** s est une symétrie orthogonale **alors** $s \in \mathcal{O}(E)$.

prop. 2 |

Soit s une symétrie orthogonale par rapport à un hyperplan H. s est la réflexion par rapport à H.

Alors : • $s(x) = x - 2\dfrac{< x, a >}{< a, a >}.a$ où a est un vecteur non nul normal à H.
• $s \in \mathcal{O}(E) - \mathcal{SO}(E)$.

Soit s' la symétrie orthogonale par rapport à la droite $D = \mathbb{R}.a$ où $a \in E - \{0_E\}$.
s' est le retournement d'axe D.

Alors : • $s'(x) = -x + 2\dfrac{< x, a >}{< a, a >}.a$. Donc $s' = -s$.
• $s' \in \mathcal{SO}(E) \iff n$ est impair.

III - ORIENTATION EN DIMENSION 2 ET 3

Soit E un espace vectoriel euclidien de dimension n égale à 2 ou à 3.

1) Rappels

Notons $\mathcal{L}$ l'ensemble des bases orthonormales et ordonnées de E.

Si $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ sont deux bases orthonormales de E, la matrice de $\mathcal{B}'$ dans $\mathcal{B}$ est une matrice orthogonale donc son déterminant vaut 1 ou -1. Donc $\det_{\mathcal{B}} \mathcal{B}' = \pm 1$

On étudie la relation $\mathcal{R}$ définie par : $\forall (\mathcal{B}, \mathcal{B}') \in \mathcal{L}^2, \quad \mathcal{B} \mathcal{R} \mathcal{B}' \iff \det_{\mathcal{B}} \mathcal{B}' = 1$.

$\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence : réflexive, symétrique et transitive.

Orienter E, c'est choisir arbitrairement une base $\mathcal{B}$ qui sera dite "directe", de même que toutes les bases en relation avec $\mathcal{B}$ (et donc en relation entre elles).

Ces bases seront appelées bases directes, les autres bases indirectes.

En dimension 3, soit D une droite vectorielle orientée par un de ses vecteurs $\vec{u} \neq 0_E$
On oriente alors le plan $H = D^{\perp}$ de la manière suivante :

$(\vec{e_1}, \vec{e_2})$ est une base directe de H si et seulement si $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{u})$ est une base directe de E.

2) Produit mixte

a. En dimension 2

Soit $(X_1, X_2) \in E^2$ et $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ deux bases orthonormales directes de E.

$\det_{\mathcal{B}}(X_1, X_2) = \det_{\mathcal{B}'}(X_1, X_2) \times \det_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}') = \det_{\mathcal{B}'}(X_1, X_2)$ car $\det_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}') = 1$.

déf. | $\det_{\mathcal{B}}(X_1, X_2)$ *est indépendant de la base orthonormale directe* $\mathcal{B}$ *choisie pour le calculer.*
On l'appelle produit mixte des vecteurs X_1, X_2 *et on le note* $[X_1, X_2]$.

b. En dimension 3

Soit $(X_1, X_2, X_3) \in E^3$ et $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ deux bases orthonormales directes de E.

$\det_{\mathcal{B}}(X_1, X_2, X_3) = \det_{\mathcal{B}'}(X_1, X_2, X_3) \times \det_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}') = \det_{\mathcal{B}'}(X_1, X_2, X_3)$ car $\det_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}') = 1$.

déf. | $\det_{\mathcal{B}}(X_1, X_2, X_3)$ *est indépendant de la base orthonormale directe* $\mathcal{B}$ *choisie pour le calculer.*
On l'appelle produit mixte des vecteurs X_1, X_2, X_3 *et on le note* $[X_1, X_2, X_3]$.

IV - CLASSIFICATION EN DIMENSION 2

On considère E un espace vectoriel euclidien orienté de dimension 2.

1) Le groupe $\mathcal{O}_2(\mathbb{R})$

th. $\mathcal{O}_2(\mathbb{R}) = \left\{ \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \ / \ (a,b) \in \mathbb{R}^2 \quad \text{et} \quad a^2+b^2=1 \right\} \cup \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ b & -a \end{pmatrix} \ / \ (a,b) \in \mathbb{R}^2 \quad \text{et} \quad a^2+b^2=1 \right\}$

2) Caractérisation des éléments de $\mathcal{O}_(E)$

th.

Soit $\mathcal{B}$ une base orthonormale de E et $u \in \mathcal{L}(E)$

1) $u \in \mathcal{SO}(E) \iff \exists\,(a,b) \in \mathbb{R}^2 \ / \ M_{\mathcal{B}}(\mathbf{u}) = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$ *et* $a^2+b^2=1$

Dans ce cas, u est une rotation et $u = Id_E$ ou Ker $(u - Id_E) = \{O_E\}$.
Si $u \neq Id_E$ et $u \neq -Id_E$ alors u n'a pas de valeur propre réelle.

2) $u \in \mathcal{O}(E) - \mathcal{SO}(E) \iff \exists\,(a,b) \in \mathbb{R}^2 \ / \ M_{\mathcal{B}}(\mathbf{u}) = \begin{pmatrix} a & b \\ b & -a \end{pmatrix}$ *et* $a^2+b^2=1$

Dans ce cas, u est une réflexion par rapport à une droite D
il existe une base orthonormale $\mathcal{C}$ telle que $M_{\mathcal{C}}(\mathbf{u}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ et Ker $(u - Id_E) = D$.

Les rotations sont caractérisées par leur déterminant qui vaut 1.
Les réflexions sont caractérisées par leur déterminant qui vaut -1.

3) Angle d'une rotation

th. 1 **Si** r et r' sont deux rotations **alors** $r \circ r' = r' \circ r$.

Démonstration :
Soit $\mathcal{B}$ une base orthonormale de E et r et r' deux rotations. Alors
$\exists\,(a,b) \in \mathbb{R}^2 \ / \ M_{\mathcal{B}}(\mathbf{r}) = A = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$ et $a^2+b^2=1$ et
$\exists\,(a',b') \in \mathbb{R}^2 \ / \ M_{\mathcal{B}}(\mathbf{r}') = A' = \begin{pmatrix} a' & -b' \\ b' & a' \end{pmatrix}$ et $a'^2+b'^2=1$.
Alors $M_{\mathcal{B}}(\mathbf{r} \circ r') = A \times A' = \begin{pmatrix} aa'-bb' & -a'b-ab' \\ a'b+ab' & aa'-bb' \end{pmatrix} = A' \times A = M_{\mathcal{B}}(\mathbf{r}' \circ r)$.
Donc $r \circ r' = r' \circ r$ et $\mathcal{SO}(E)$ est un groupe commutatif.

th. 2 La matrice d'une rotation dans une base orthonormale **<u>directe</u>** ne dépend pas de la base orthonormale directe choisie.

Démonstration :
Soit $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ deux bases orthonormales directes de E et r une rotation.
Notons $A = M_{\mathcal{B}}(\mathbf{r})$ et $A' = M_{\mathcal{B}'}(\mathbf{r})$ et P la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$.
Alors $A' = P^{-1}AP$. Or r étant une rotation et les bases étant directes, A, P, et donc P^{-1}, sont dans $\mathcal{SO}_2(\mathbb{R})$.
Donc elles commutent, donc $A' = AP^{-1}P = A$.

déf.

Soit $r \in \mathcal{SO}(E)$.

Sa matrice dans toute <u>base orthonormale directe</u> est de la forme $\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$ *avec* $a^2+b^2=1$.

On définit θ à 2π près tel que $a = \cos\theta$ et $b = \sin\theta$. θ s'appelle l'angle de la rotation r.

Soit r_θ la rotation d'angle θ. r_θ associe au point M d'affixe z le point M' d'affixe $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\theta}\, z$

th. 3 $\forall\,(\theta,\alpha) \in \mathbb{R}^2, \quad r_\theta \circ r_\alpha = r_{\theta+\alpha} = r_\alpha \circ r_\theta$ et $[r_\theta]^{-1} = r_{(-\theta)}$

V - CLASSIFICATION EN DIMENSION 3

On considère E un espace vectoriel euclidien orienté de dimension 3.

1) *Étude des rotations de E*

th.

Soit $u \in \mathcal{SO}(E)$

Il existe une base orthonormale directe $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ de E et il existe $\theta \in \mathbb{R}$ telle que :

$$M_{\mathcal{B}}(\mathbf{u}) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Si $\theta = 0\ (2\pi)$ **alors** $u = Id_E$.

Si $\theta \neq 0\ (2\pi)$ **alors** $\text{Ker}(u - Id_E) = \{X \in E \ / \ u(X) = X\} = Vect(e_3)$.
C'est une droite vectorielle qu'on notera D.

déf. *On dit que u est la rotation d'axe D et d'angle θ, D étant orientée suivant e_3.*

prop. 1

Si $\theta \neq \pi\ (2\pi)$ **alors** $\text{Ker}(u + Id_E) = \{X \in E \ / \ u(X) = -X\} = \{0_E\}$.

Si $\theta = \pi\ (2\pi)$ **alors** $\text{Ker}(u + Id_E) = \{X \in E \ / \ u(X) = -X\} = D^\perp = P$.

prop. 2

$\text{Tr}\ (u) = 1 + 2\cos\theta$ permet le calcul de $\cos\theta$. Alors $\sin^2\theta = 1 - \cos^2\theta$, d'où $|\sin\theta|$

$\sin\theta$ a le signe de $[X, u(X), e_3]$ pour tout $X \notin D$

2) *Description des isométries vectorielles de E*

On classe les éléments u de $\mathcal{O}(E)$ suivant la dimension de $F = \text{Ker}(u - Id_E)$.

Si $\dim\ (F) = 3$ **alors** $u = Id_E$.

Si $\dim\ (F) = 2$ **alors** u est la symétrie orthogonale par rapport au plan $F = \text{Ker}(u - Id_E)$,.
ie la réflexion par rapport à F.

Si $\dim\ (F) = 1$ **alors** u est une rotation autour de l' axe $F = \text{Ker}(u - Id_E)$.

Si $\dim\ (F) = 0$ **alors** Seul le vecteur 0_E est invariant. On a l'alternative :

- $u = -Id_E$.
- $u \neq -Id_E$ et il existe un axe δ, un plan Π orthogonal à δ, tels que $u = r \circ s = s \circ r$, r étant une rotation autour de δ et s une réflexion par rapport à Π.
  De plus, r et s sont uniques. u s'appelle anti- rotation.

$\mathcal{SO}(E)$ est constitué de Id_E et des rotations autour d'un axe.
$\mathcal{O}(E) - \mathcal{SO}(E)$ est constitué des réflexions, de $-Id_E$ et des anti-rotations.

Remarque : Un retournement d'axe D, ie une symétrie orthogonale par rapport à D, est une rotation d'axe D et d'angle π.

I - RÉDUCTION DES ENDOMORPHISMES SYMÉTRIQUES

1) Définition

déf. *$u \in \mathcal{L}(E)$ est un endomorphisme symétrique lorsque* $\forall (x, y) \in E^2, \quad < u(x), y >=< x, u(y) >$
On notera $\mathcal{S}(E)$ l'ensemble des endomorphismes symétriques.

th. 1 Soit $\mathcal{B}$ est une base orthonormale de E et $u \in \mathcal{L}(E)$.

Alors $u \in \mathcal{S}(E)$ si et seulement si $M_{\mathcal{B}}(\mathbf{u})$ est symétrique

th. 2 $\mathcal{S}(E)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}(E)$ isomorphe à $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$. Donc $\dim\,(\mathcal{S}(E)) = \dfrac{n(n+1)}{2}$.

th. 3 Soit u un endomorphisme symétrique de E.

- Si F est un sous espace vectoriel de E stable par u alors $F^{\perp}$ est également stable par u et les endomorphismes induits par u sur F et $F^{\perp}$ sont symétriques.
- Si λ et μ sont deux valeurs propres distinctes de u alors $E_{\lambda}(u) \perp E_{\mu}(u)$.

Exemples : Les projecteurs orthogonaux et les symétries orthogonales sont des endomorphismes symétriques.

2) Théorème spectral

th. 1 Soit u un endomorphisme symétrique de l'espace vectoriel euclidien E. Alors

- Toute valeur propre de u est réelle. χ_u est donc scindé dans $\mathbb{R}$.
- u est diagonalisable et admet une base orthonormée de vecteurs propres.
  E est donc la somme directe orthogonale des sous espaces propres de u.
- Les sous espaces propres de u sont deux à deux orthogonaux.

th. 2 Soit $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$. A est donc une matrice symétrique réelle.

Alors « A est diagonalisable en base orthonormale » c'est-à-dire :

Il existe D une matrice diagonale et P une matrice orthogonale telles que : $A = P\ D\ {}^tP$.