Espèces d'espaces

Romain Krust

Lycée Champollion
Exposé ECE-ECS

Lundi 16 Décembre 2013

Plan de l'exposé

Georges Perec : Espèces d'espaces (1974)

ESPACE
ESPACE LIBRE
ESPACE CLOS
ESPACE FORCLOS
MANQUE D'ESPACE
ESPACE COMPTÉ
ESPACE VERT
ESPACE VITAL
ESPACE CRITIQUE
POSITION DANS L'ESPACE
ESPACE DÉCOUVERT
DÉCOUVERTE DE L'ESPACE
ESPACE OBLIQUE
ESPACE VIERGE
ESPACE EUCLIDIEN
ESPACE AÉRIEN
ESPACE GRIS
ESPACE TORDU
ESPACE DU RÊVE
BARRE D'ESPACE
PROMENADES DANS L'ESPACE
GÉOMÉTRIE DANS L'ESPACE
REGARD BALAYANT L'ESPACE
ESPACE TEMPS
ESPACE MESURÉ
LA CONQUÊTE DE L'ESPACE

ESPACE MORT
ESPACE D'UN INSTANT
ESPACE CÉLESTE
ESPACE IMAGINAIRE
ESPACE NUISIBLE
ESPACE BLANC
ESPACE DU DEDANS
LE PIÉTON DE L'ESPACE
ESPACE BRISÉ
ESPACE ORDONNÉ
ESPACE VÉCU
ESPACE MOU
ESPACE DISPONIBLE
ESPACE PARCOURU
ESPACE PLAN
ESPACE TYPE
ESPACE ALENTOUR
TOUR DE L'ESPACE
AUX BORDS DE L'ESPACE
ESPACE D'UN MATIN
REGARD PERDU DANS L'ESPACE
LES GRANDS ESPACES
L'ÉVOLUTION DES ESPACES
ESPACE SONORE
ESPACE LITTÉRAIRE
L'ODYSSÉE DE L'ESPACE

Espèces d'espaces : la suite

- Espace vectoriel
- Espace affine
- Espace vectoriel euclidien
- Espace affine euclidien
- Espace hermitien
- Espace projectif
- Espace pré-hilbertien
- Espace hilbertien
- Espace vectoriel normé
- Espace minkowskien
- Dimension d'un espace
- Espace métrique
- Espace topologique
- Espace connexe
- Espace compact

Espèces d'espaces : la suite

- Espace vectoriel
- Espace affine
- Espace vectoriel euclidien
- Espace affine euclidien
- Espace hermitien
- Espace projectif
- Espace pré-hilbertien
- Espace hilbertien
- Espace vectoriel normé
- Espace minkowskien
- Dimension d'un espace
- Espace métrique
- Espace topologique
- Espace connexe
- Espace compact
- Espace discret
- Espace des phases
- Espace riemannien
- Courbure d'un espace
- Espace hyperbolique
- Espace de Riemann
- Géométrie dans l'espace
- Géométrie de l'espace
- Espace de tentes
- Espace mesurable
- Espace probabilisable
- Espace probabilisé
- Espace fonctionnel
- Espace non commutatif

Une question de structure

Qu'est-ce qu'un espace ?

Une question de structure

Qu'est-ce qu'un espace ?

- L'espace n'est pas en soi une notion mathématique.

Une question de structure

Qu'est-ce qu'un espace ?

- L'espace n'est pas en soi une notion mathématique.
- Intuition fécondée par l'idée d'espace, omniprésente dans le champ mathématique.

Une question de structure

Qu'est-ce qu'un espace ?

- L'espace n'est pas en soi une notion mathématique.
- Intuition fécondée par l'idée d'espace, omniprésente dans le champ mathématique.
- Chaque notion d'espace capture et formalise une facette d'une "réalité" physique (ou mathématique...), donne corps à une intuition, permet de focaliser l'attention sur un aspect particulier d'un objet mathématique (ou physique...) en faisant abstraction d'autres propriétés.

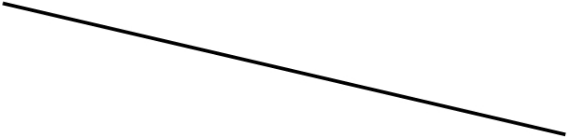
Une question de structure

Qu'est-ce qu'un espace ?

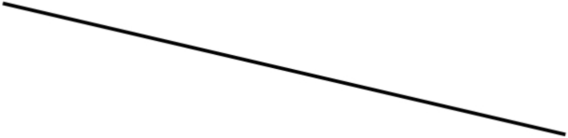
- L'espace n'est pas en soi une notion mathématique.
- Intuition fécondée par l'idée d'espace, omniprésente dans le champ mathématique.
- Chaque notion d'espace capture et formalise une facette d'une "réalité" physique (ou mathématique...), donne corps à une intuition, permet de focaliser l'attention sur un aspect particulier d'un objet mathématique (ou physique...) en faisant abstraction d'autres propriétés.
- Ces espaces sont formalisés au travers de structures mathématiques.

Petit jeu

Petit jeu

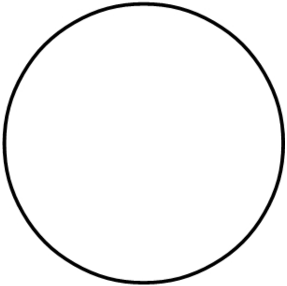


Petit jeu

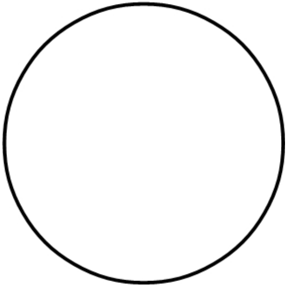


Droite

Petit jeu

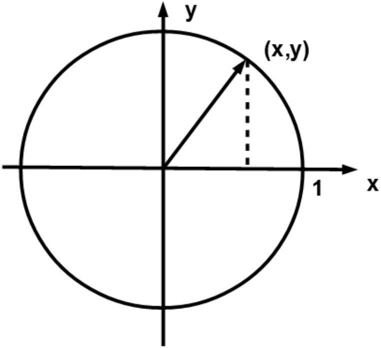


Petit jeu



Cercle

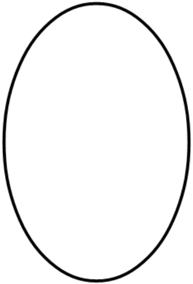
Petit jeu



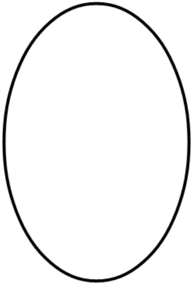
Cercle de centre O et de rayon 1

$$\|(x, y)\| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

Petit jeu

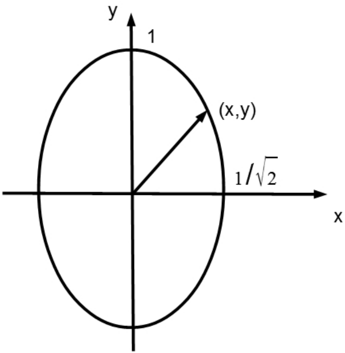


Petit jeu



Cercle

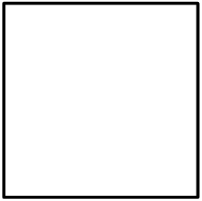
Petit jeu



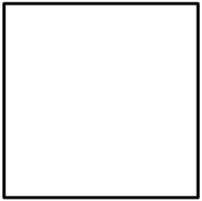
Cercle de centre 0 et de rayon 1 pour la norme

$$\|(x,y)\| = \sqrt{2x^2 + y^2}$$

Petit jeu

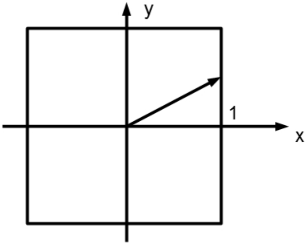


Petit jeu



Cercle

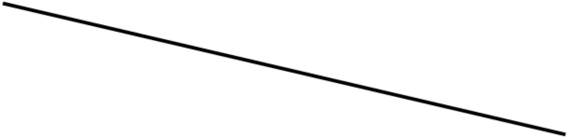
Petit jeu



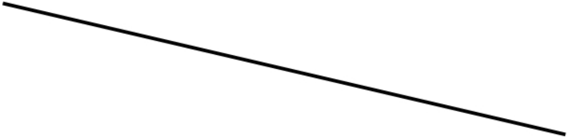
Cercle de centre 0 et de rayon 1 pour la norme

$$\|(x, y)\| = \max(|x|, |y|)$$

Petit jeu

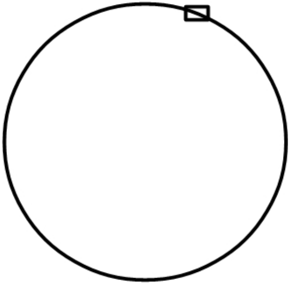


Petit jeu



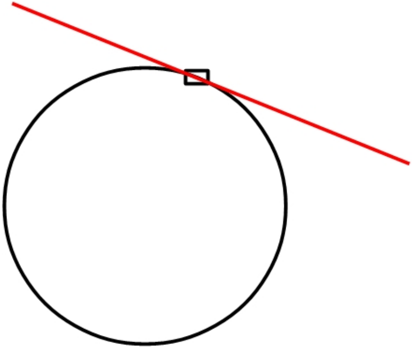
Cercle

Petit jeu



Cercle

Petit jeu



Cercle

Plan de l'exposé

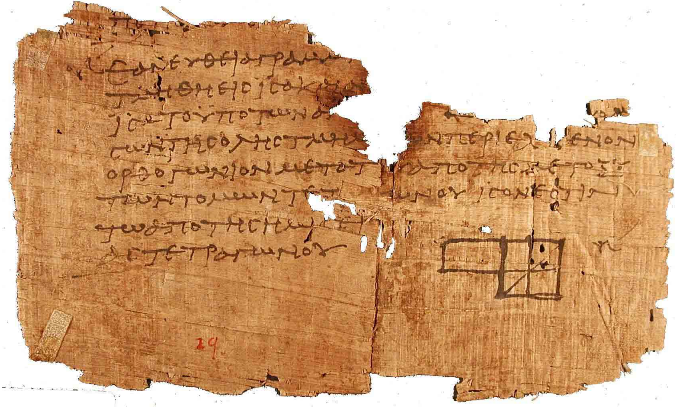
I. De la géométrie d'Euclide à la géométrie euclidienne

II. La géométrie non euclidienne

III . Géométrie des surfaces

IV. Éléments de géométrie riemannienne

Éléments d'Euclide ($\sim$ 300 av. JC)



Éléments d'Euclide ($\sim$ 300 av. JC)

Ensemble monumental constitué de 13 livres :

- Livres I à IV : géométrie du plan

Éléments d'Euclide ($\sim$ 300 av. JC)

Ensemble monumental constitué de 13 livres :

- Livres I à IV : géométrie du plan
- Livres V à VI : proportions (Thalès)

Éléments d'Euclide ($\sim$ 300 av. JC)

Ensemble monumental constitué de 13 livres :

- Livres I à IV : géométrie du plan
- Livres V à VI : proportions (Thalès)
- Livres VII à X : arithmétique (pgcd, infinité de nombres premiers, irrationalité de $\sqrt{2}$)

Éléments d'Euclide ($\sim$ 300 av. JC)

Ensemble monumental constitué de 13 livres :

- Livres I à IV : géométrie du plan
- Livres V à VI : proportions (Thalès)
- Livres VII à X : arithmétique (pgcd, infinité de nombres premiers, irrationalité de $\sqrt{2}$)
- Livres XI à XIII : géométrie dans l'espace

Éléments d'Euclide ($\sim$ 300 av. JC)

Livre premier : Euclide tente d'axiomatiser la géométrie du plan. La géométrie dont il parle (appelée aujourd'hui géométrie euclidienne) s'occupe de points, de segments, de droites, de cercles, d'angles.

Éléments d'Euclide ($\sim$ 300 av. JC)

Livre premier : Euclide tente d'axiomatiser la géométrie du plan. La géométrie dont il parle (appelée aujourd'hui géométrie euclidienne) s'occupe de points, de segments, de droites, de cercles, d'angles.

Euclide énonce 20 à 30 définitions (selon les éditions), 5 postulats, 10 axiomes, puis démontre des propositions.

Éléments d'Euclide ($\sim$ 300 av. JC)

Livre premier : Euclide tente d'axiomatiser la géométrie du plan. La géométrie dont il parle (appelée aujourd'hui géométrie euclidienne) s'occupe de points, de segments, de droites, de cercles, d'angles.

Euclide énonce 20 à 30 définitions (selon les éditions), 5 postulats, 10 axiomes, puis démontre des propositions.

Définitions

Éléments d'Euclide ($\sim$ 300 av. JC)

Livre premier : Euclide tente d'axiomatiser la géométrie du plan. La géométrie dont il parle (appelée aujourd'hui géométrie euclidienne) s'occupe de points, de segments, de droites, de cercles, d'angles.

Euclide énonce 20 à 30 définitions (selon les éditions), 5 postulats, 10 axiomes, puis démontre des propositions.

Définitions

- Un point est ce qui n'a pas de partie (à rapprocher du concept moderne de singleton).

Éléments d'Euclide ($\sim$ 300 av. JC)

Livre premier : Euclide tente d'axiomatiser la géométrie du plan. La géométrie dont il parle (appelée aujourd'hui géométrie euclidienne) s'occupe de points, de segments, de droites, de cercles, d'angles.

Euclide énonce 20 à 30 définitions (selon les éditions), 5 postulats, 10 axiomes, puis démontre des propositions.

Définitions

- Un point est ce qui n'a pas de partie (à rapprocher du concept moderne de singleton).
- Une ligne est une longueur sans largeur.

Éléments d'Euclide ($\sim$ 300 av. JC)

Livre premier : Euclide tente d'axiomatiser la géométrie du plan. La géométrie dont il parle (appelée aujourd'hui géométrie euclidienne) s'occupe de points, de segments, de droites, de cercles, d'angles.

Euclide énonce 20 à 30 définitions (selon les éditions), 5 postulats, 10 axiomes, puis démontre des propositions.

Définitions

- Un point est ce qui n'a pas de partie (à rapprocher du concept moderne de singleton).
- Une ligne est une longueur sans largeur.
- La ligne droite est une ligne dont l'extension entre deux de ses points est égale à la distance entre ces points.

Éléments d'Euclide ($\sim$ 300 av. JC)

Livre premier : Euclide tente d'axiomatiser la géométrie du plan. La géométrie dont il parle (appelée aujourd'hui géométrie euclidienne) s'occupe de points, de segments, de droites, de cercles, d'angles.

Euclide énonce 20 à 30 définitions (selon les éditions), 5 postulats, 10 axiomes, puis démontre des propositions.

Définitions

- Un point est ce qui n'a pas de partie (à rapprocher du concept moderne de singleton).
- Une ligne est une longueur sans largeur.
- La ligne droite est une ligne dont l'extension entre deux de ses points est égale à la distance entre ces points.
- Un cercle est une figure plane délimitée par une ligne qu'on nomme circonférence et telle que toutes les droites issues d'un point intérieur vers la circonférence sont égales entre elles.

Éléments d'Euclide ($\sim$ 300 av. JC)

Livre premier : Euclide tente d'axiomatiser la géométrie du plan. La géométrie dont il parle (appelée aujourd'hui géométrie euclidienne) s'occupe de points, de segments, de droites, de cercles, d'angles.

Euclide énonce 20 à 30 définitions (selon les éditions), 5 postulats, 10 axiomes, puis démontre des propositions.

Définitions

- Un point est ce qui n'a pas de partie (à rapprocher du concept moderne de singleton).
- Une ligne est une longueur sans largeur.
- La ligne droite est une ligne dont l'extension entre deux de ses points est égale à la distance entre ces points.
- Un cercle est une figure plane délimitée par une ligne qu'on nomme circonférence et telle que toutes les droites issues d'un point intérieur vers la circonférence sont égales entre elles.
- Ce point se nomme centre du cercle.
  Etc.

Éléments d'Euclide ($\sim$ 300 av. JC)

Livre premier : Euclide tente d'axiomatiser la géométrie du plan. La géométrie dont il parle (appelée aujourd'hui géométrie euclidienne) s'occupe de points, de segments, de droites, de cercles, d'angles.

Euclide énonce 20 à 30 définitions (selon les éditions), 5 postulats, 10 axiomes, puis démontre des propositions.

Notions communes (ou axiomes)

Éléments d'Euclide ($\sim$ 300 av. JC)

Livre premier : Euclide tente d'axiomatiser la géométrie du plan. La géométrie dont il parle (appelée aujourd'hui géométrie euclidienne) s'occupe de points, de segments, de droites, de cercles, d'angles.

Euclide énonce 20 à 30 définitions (selon les éditions), 5 postulats, 10 axiomes, puis démontre des propositions.

Notions communes (ou axiomes)

- Les grandeurs égales à une même grandeur sont égales entre elles.
- Si à des grandeurs égales on ajoute des grandeurs égales, les tous seront égaux.
- etc.

Éléments d'Euclide ($\sim$ 300 av. JC)

Livre premier : Euclide tente d'axiomatiser la géométrie du plan. La géométrie dont il parle (appelée aujourd'hui géométrie euclidienne) s'occupe de points, de segments, de droites, de cercles, d'angles.

Euclide énonce 20 à 30 définitions (selon les éditions), 5 postulats, 10 axiomes, puis démontre des propositions.

Demandes (ou postulats)

Éléments d'Euclide ($\sim$ 300 av. JC)

Livre premier : Euclide tente d'axiomatiser la géométrie du plan. La géométrie dont il parle (appelée aujourd'hui géométrie euclidienne) s'occupe de points, de segments, de droites, de cercles, d'angles.

Euclide énonce 20 à 30 définitions (selon les éditions), 5 postulats, 10 axiomes, puis démontre des propositions.

Demandes (ou postulats)

- Un segment de droite peut être tracé en joignant deux points quelconques distincts.

Éléments d'Euclide ($\sim$ 300 av. JC)

Livre premier : Euclide tente d'axiomatiser la géométrie du plan. La géométrie dont il parle (appelée aujourd'hui géométrie euclidienne) s'occupe de points, de segments, de droites, de cercles, d'angles.

Euclide énonce 20 à 30 définitions (selon les éditions), 5 postulats, 10 axiomes, puis démontre des propositions.

Demandes (ou postulats)

- Un segment de droite peut être tracé en joignant deux points quelconques distincts.
- Un segment de droite peut être prolongé indéfiniment en une ligne droite.

Éléments d'Euclide ($\sim$ 300 av. JC)

Livre premier : Euclide tente d'axiomatiser la géométrie du plan. La géométrie dont il parle (appelée aujourd'hui géométrie euclidienne) s'occupe de points, de segments, de droites, de cercles, d'angles.

Euclide énonce 20 à 30 définitions (selon les éditions), 5 postulats, 10 axiomes, puis démontre des propositions.

Demandes (ou postulats)

- Un segment de droite peut être tracé en joignant deux points quelconques distincts.
- Un segment de droite peut être prolongé indéfiniment en une ligne droite.
- Étant donné un segment de droite quelconque, un cercle peut être tracé en prenant ce segment comme rayon et l'une de ses extrémités comme centre (les points à distance r d'un point fixe forment donc une ligne : il y a en a beaucoup !).

Éléments d'Euclide ($\sim$ 300 av. JC)

Livre premier : Euclide tente d'axiomatiser la géométrie du plan. La géométrie dont il parle (appelée aujourd'hui géométrie euclidienne) s'occupe de points, de segments, de droites, de cercles, d'angles.

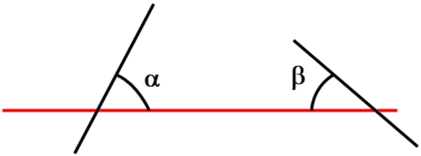
Euclide énonce 20 à 30 définitions (selon les éditions), 5 postulats, 10 axiomes, puis démontre des propositions.

Demandes (ou postulats)

- Un segment de droite peut être tracé en joignant deux points quelconques distincts.
- Un segment de droite peut être prolongé indéfiniment en une ligne droite.
- Étant donné un segment de droite quelconque, un cercle peut être tracé en prenant ce segment comme rayon et l'une de ses extrémités comme centre (les points à distance r d'un point fixe forment donc une ligne : il y en a beaucoup !).
- Tous les angles droits sont égaux (homogénéité du plan ; existence de déplacements).
- et...

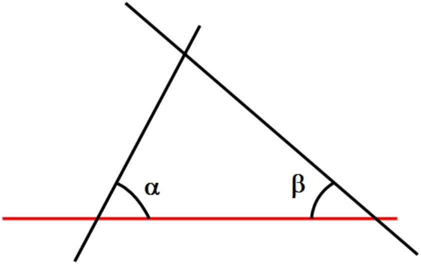
Le 5ième postulat

« Si une droite tombant sur deux droites fait les angles intérieurs du même côté plus petits que deux droits, ces droites, prolongées à l'infini, se rencontreront du côté où les angles sont plus petits que deux droits. »



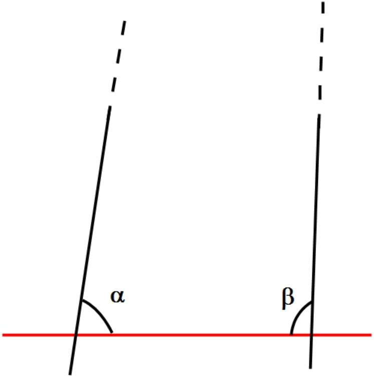
Le 5ième postulat

« Si une droite tombant sur deux droites fait les angles intérieurs du même côté plus petits que deux droits, ces droites, prolongées à l'infini, se rencontreront du côté où les angles sont plus petits que deux droits. »



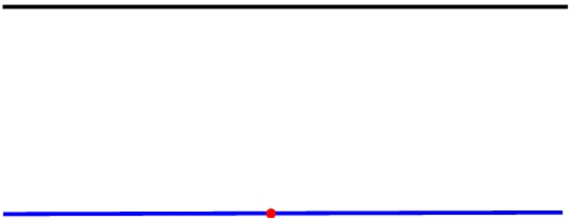
Le 5ième postulat

« Si une droite tombant sur deux droites fait les angles intérieurs du même côté plus petits que deux droits, ces droites, prolongées à l'infini, se rencontreront du côté où les angles sont plus petits que deux droits. »



Postulat équivalent (Proclus, Playfair) : postulat des parallèles

« Par chaque point du plan passe une et une seule parallèle à une droite donnée. »



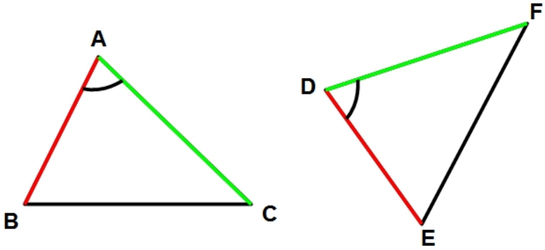
Exemple de preuve : égalité des triangles (proposition IV)

PROPOSITION IV.

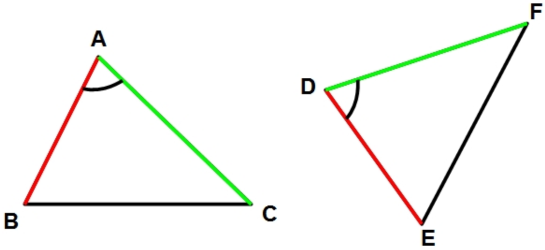
THÉORÈME.

Si deux côtés d'un triangle sont égaux à deux côtés d'un autre triangle chacun à chacun, et si les deux angles compris entre les côtés égaux de ces deux triangles sont aussi égaux, la base de l'un sera égale à la base de l'autre ; ces deux triangles seront égaux, et les autres angles compris entre les côtés égaux de ces deux triangles seront aussi égaux entr'eux.

Exemple de preuve : égalité des triangles (proposition IV)



Exemple de preuve : égalité des triangles (proposition IV)

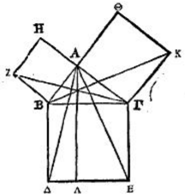


On déplace le point A vers D en superposant l'angle en A à l'angle en D ($4^{\text{ième}}$ postulat... bien compris !). Alors par égalité des longueurs des côtés, B se superpose à E, C se superpose à F : les triangles sont égaux.

Exemple de preuve : le théorème de Pythagore (proposition XXXV)

ΒΔ, ΑΛ· τοῦ δὲ ΖΒΓ τριγώνου διπλάσιον τὸ ΒΗ τετράγωνον, βάσιν τε γὰρ πάλιν τὴν αὐτὴν ἔχουσι τὴν ΖΒ καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς εἰσι παραλλήλοις ταῖς ΖΒ, ΗΓ· τὰ δὲ τῶν ἴσων διπλάσια ἴσα ἀλλήλοις ἐστίν· ἴσον ἄρα ἐστὶ καὶ τὸ ΒΛ παραλληλόγραμμον τῷ ΗΒ τετραγώνῳ. Ὁμοίως

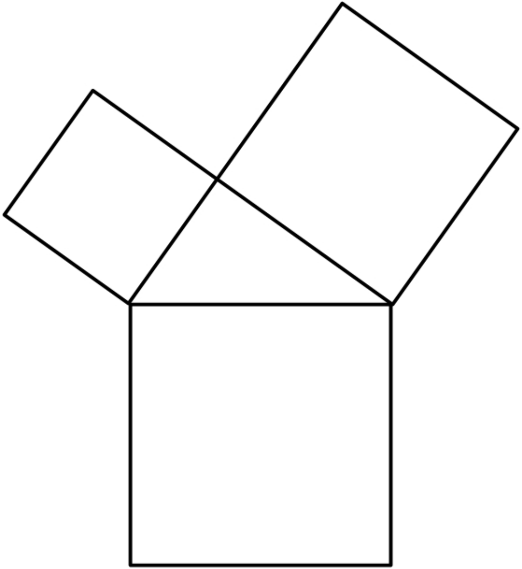
sunt parallelis ZB, HΓ; æqualium autem dupla æqualia inter se sunt; æquale igitur est et BΛ parallelogrammum ipsi HB quadrato. Similiter autem junctis AE, BK ostendetur et ΓΛ parallelogrammum æquale ipsi ΘΓ quadrato. Totum igitur BΔEΓ quadratum duobus HB, ΘΓ quadratis æ-



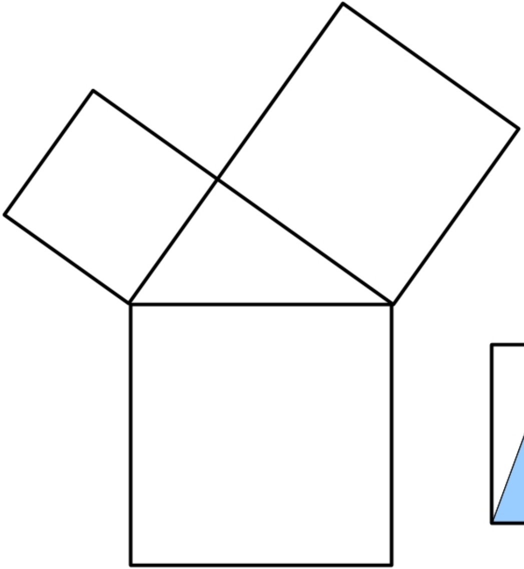
δὲ, ἐπιζευγνυμένων τῶν ΑΕ, ΒΚ, δειχθήσεται καὶ τὸ ΓΛ παραλληλόγραμμον ἴσον τῷ ΘΓ τετραγώνῳ· ὅλον ἄρα τὸ ΒΔΕΓ τετράγωνον δυσὶ τοῖς ΗΒ, ΘΓ τετραγώνοις ἴσον ἐστί. Καὶ ἔστι τὸ μὲν ΒΔΕΓ τετράγρωνον ἀπὸ τῆς ΒΓ ἀναγραφὲν, τὰ δὲ ΗΒ, ΘΓ ἀπὸ τῶν ΒΑ, ΑΓ· τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς ΒΓ πλευρᾶς τετράγωνον[8] ἴσον ἐστὶ τοῖς ἀπὸ τῶν ΒΑ, ΑΓ πλευρῶν τετραγώνοις. Ἐν ἄρα τοῖς ὀρθογωνίοις, καὶ τὰ ἑξῆς.

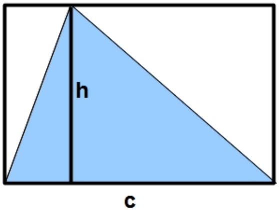
quale est, et est quidem BΔEΓ quadratum ex BΓ descriptum, ipsa vero HB, ΘΓ ex BA, AΓ; ergo quadratum ex BΓ latere æquale est quadratis ex BA, AΓ lateribus; ergo in rectangulis, etc.

Exemple de preuve : le théorème de Pythagore (proposition XXXV)

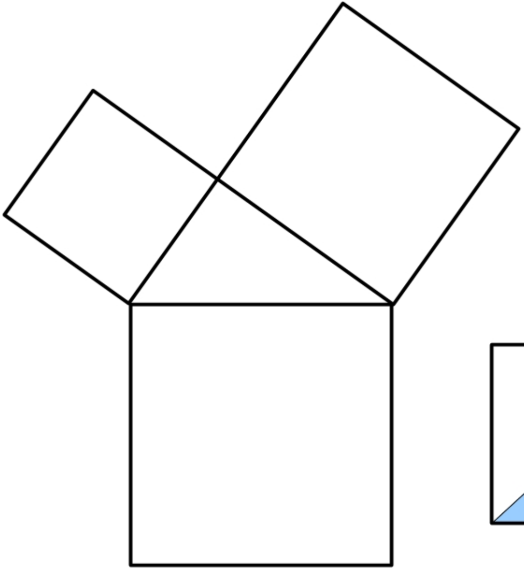


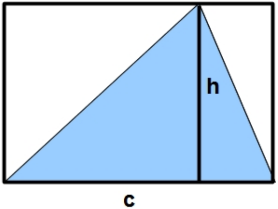
Exemple de preuve : le théorème de Pythagore (proposition XXXV)



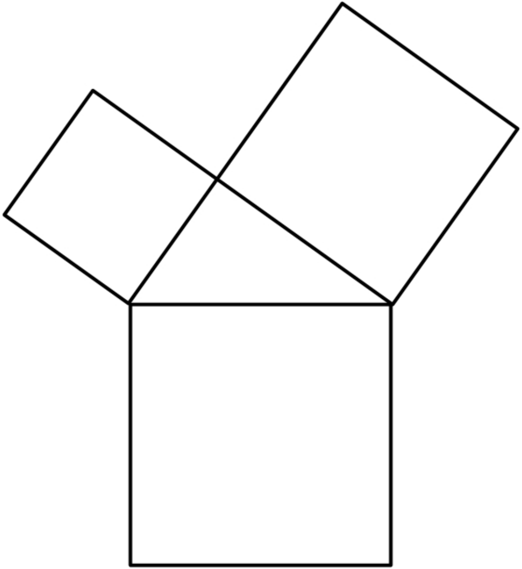


Exemple de preuve : le théorème de Pythagore (proposition XXXV)

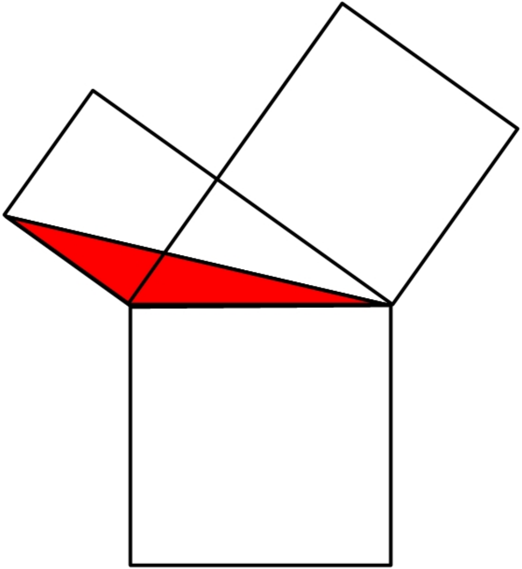




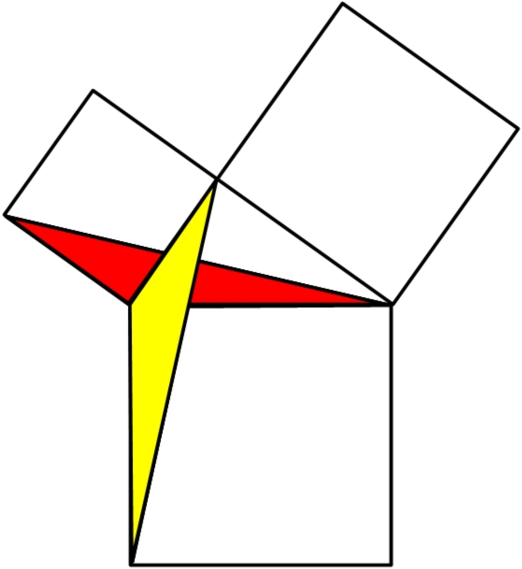
Exemple de preuve : le théorème de Pythagore (proposition XXXV)



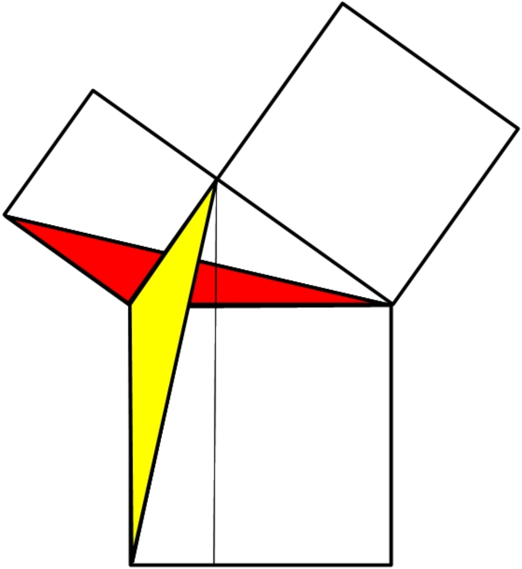
Exemple de preuve : le théorème de Pythagore (proposition XXXV)



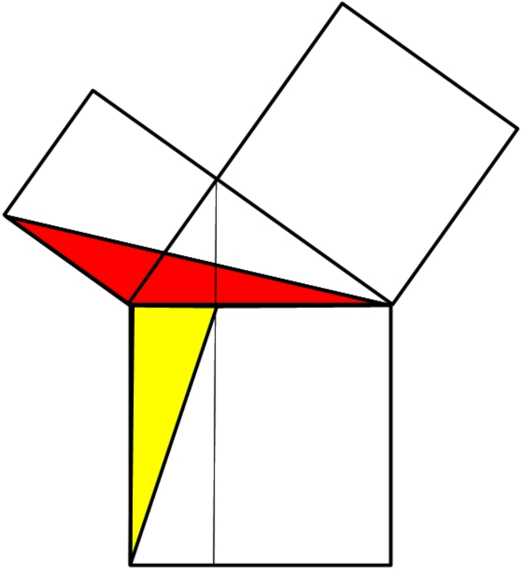
Exemple de preuve : le théorème de Pythagore (proposition XXXV)



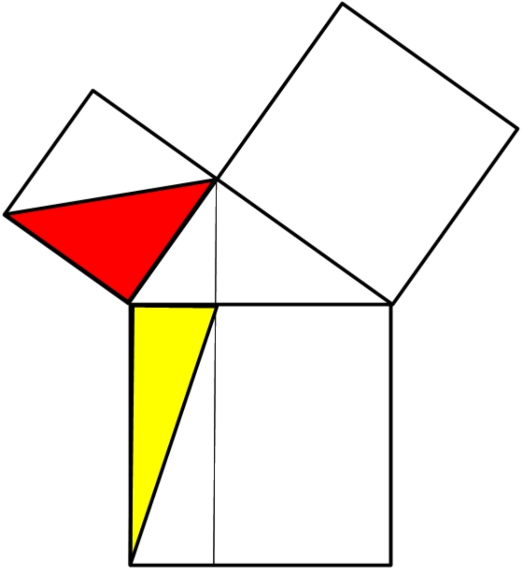
Exemple de preuve : le théorème de Pythagore (proposition XXXV)



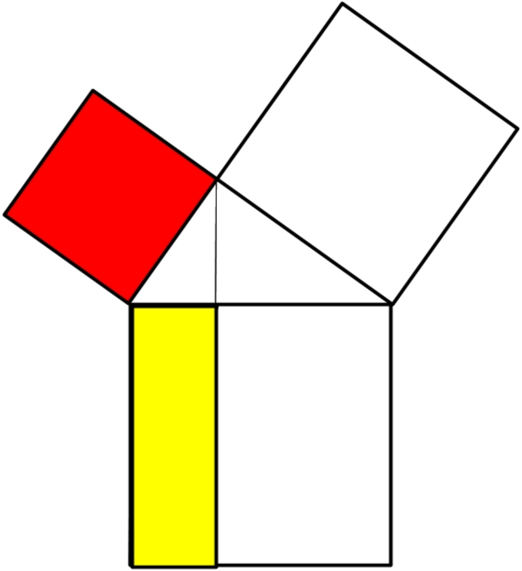
Exemple de preuve : le théorème de Pythagore (proposition XXXV)



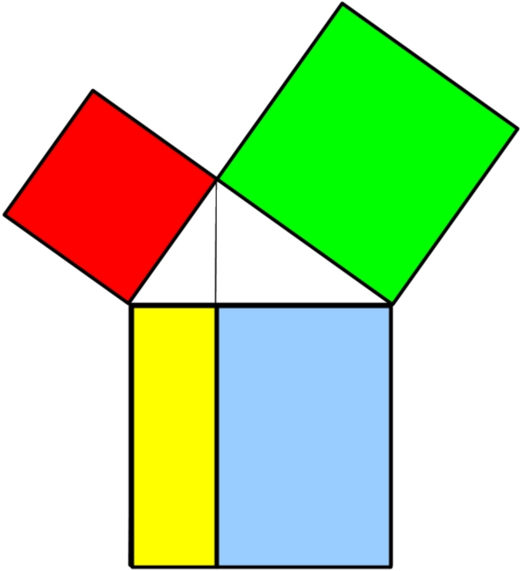
Exemple de preuve : le théorème de Pythagore (proposition XXXV)



Exemple de preuve : le théorème de Pythagore (proposition XXXV)



Exemple de preuve : le théorème de Pythagore (proposition XXXV)



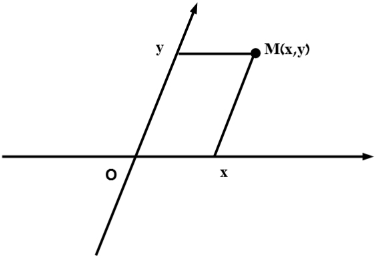
Première algébrisation : repère cartésien

Descartes, 1637

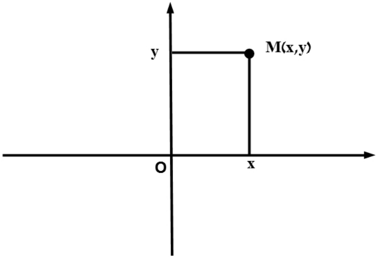
Introduction des coordonnées cartésiennes. Les problèmes géométriques sont ramenés à des questions de calcul.

Descartes, 1637

Introduction des coordonnées cartésiennes. Les problèmes géométriques sont ramenés à des questions de calcul.

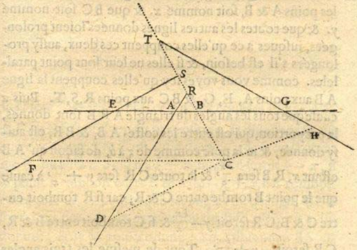


En géométrie affine



En géométrie affine euclidienne

Descarte, 1637 : Livre premier de la Géométrie



Soient A B, A D, E F, G H, &c. pluſieurs lignes données par poſition, & qu'il faille trouuer vn point, comme C, duquel ayant tiré d'autres lignes droites ſur les données, comme C B, C D, C F, & C H, en ſorte que les angles C B A, C D A, C F E, C H G, &c. ſoient donnés,

Qq 3 &

310 LA GEOMETRIE.

& que ce qui eſt produit par la multiplication d'vne partie de ces lignes, ſoit eſgal a ce qui eſt produit par la multiplication des autres, oubien qu'ils ayent quelque autre proportion donnée, car cela ne rend point la queſtion plus difficile.

Premierement ie ſuppoſe la choſe comme deſia faite, & pour me demeſler de la cõfuſion de toutes ces lignes, ie conſidere l'vne des données, & l'vne de celles qu'il faut trouuer, par exemple A B, & C B, comme les principales, & auſquelles ie taſche de rapporter ainſi toutes les autres. Que le ſegment de la ligne A B, qui eſt entre les poins A & B, ſoit nommé x. & que B C ſoit nommé y. & que toutes les autres lignes données ſoient prolongées, iuſques a ce qu'elles couppent ces deux, auſſy prolongées s'il eſt beſoin, & ſi elles ne leur ſont point paralleles. comme vous voyés icy qu'elles couppent la ligne

Seconde algébrisation

Seconde algébrisation

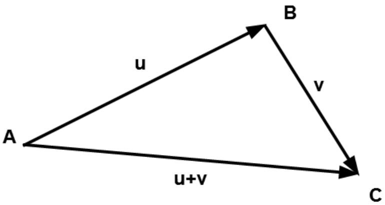
Newton (1643 - 1727)

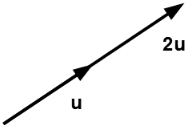
Une étape supplémentaire dans l'algébrisation de la géométrie a été franchie par l'introduction par Newton de la notion de vecteur. Comme chez Descartes, il n'est pas question d'axiomatiser la géométrie, mais d'introduire des outils pour résoudre des problèmes.

Seconde algébrisation

L'algébre se manifeste par

La possibilité d'additionner deux vecteurs
De multiplier un vecteur par un scalaire (réel).
De prendre le produit scalaire de deux vecteurs (métrique).

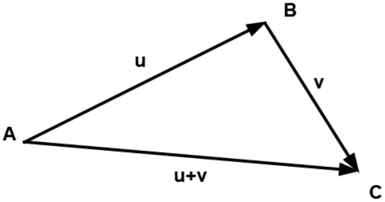


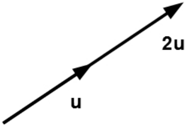


Propriétés :

L'algébre se manifeste par

La possibilité d'additionner deux vecteurs
De multiplier un vecteur par un scalaire (réel).
De prendre le produit scalaire de deux vecteurs (métrique).



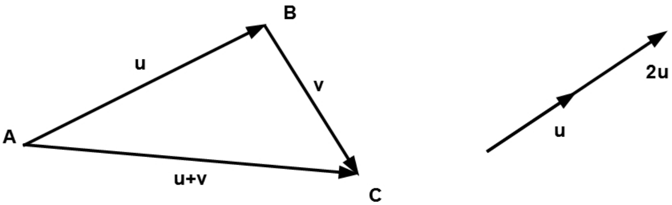


Propriétés :

$$\begin{cases} \vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u} \\ \\ \\ \end{cases}$$

L'algébre se manifeste par

La possibilité d'additionner deux vecteurs
De multiplier un vecteur par un scalaire (réel).
De prendre le produit scalaire de deux vecteurs (métrique).



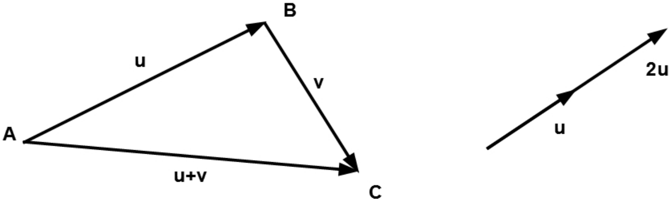
Propriétés :

$$\begin{cases} \vec{u}+\vec{v}=\vec{v}+\vec{u} \\ (\vec{u}+\vec{v})+\vec{w}=\vec{u}+(\vec{v}+\vec{w}) \\ \\ \end{cases}$$

Seconde algébrisation

L'algébre se manifeste par

La possibilité d'additionner deux vecteurs
De multiplier un vecteur par un scalaire (réel).
De prendre le produit scalaire de deux vecteurs (métrique).

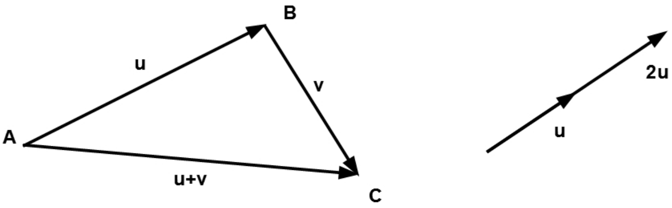


Propriétés :

$$\begin{cases} \vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u} \\ (\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w} = \vec{u} + (\vec{v} + \vec{w}) \\ \lambda.(\vec{u} + \vec{v}) = \lambda.\vec{u} + \lambda.\vec{v} \\ \text{etc.} \end{cases}$$

L'algébre se manifeste par

La possibilité d'additionner deux vecteurs
De multiplier un vecteur par un scalaire (réel).
De prendre le produit scalaire de deux vecteurs (métrique).



Algébrisation plus satisfaisante

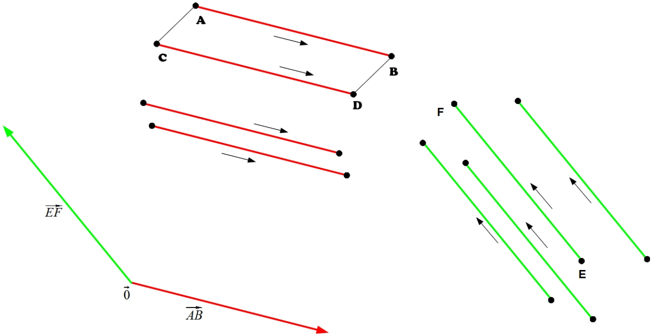
Avec la notion de vecteur, les calculs ne sont plus relatifs à un référentiel particulier.

Première formalisation

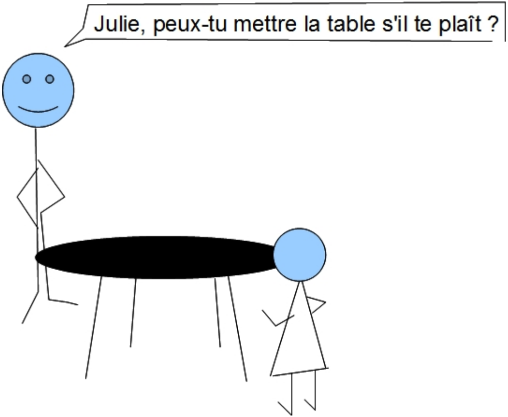
Plusieurs tentatives de formalisation de la notion de vecteur au XIXe.

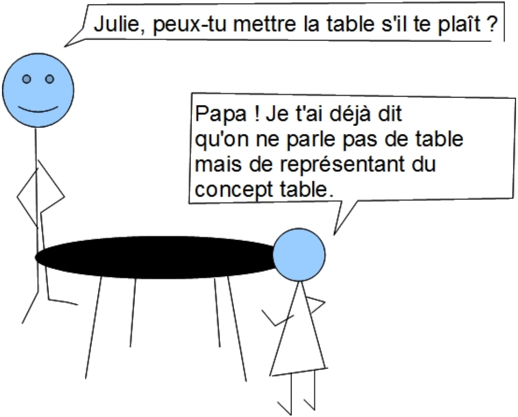
Giusto Ballavitis (1803-1880)

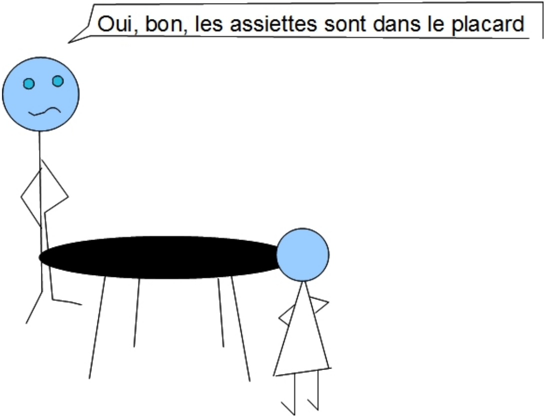
Deux bi-points (A, B) et (C, D) sont *équipollents* si le quadrilatère $ABDC$ est un parallélogramme. Un vecteur est une *classe d'équivalence* pour la relation d'équipollence. On note $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ le vecteur ainsi défini.



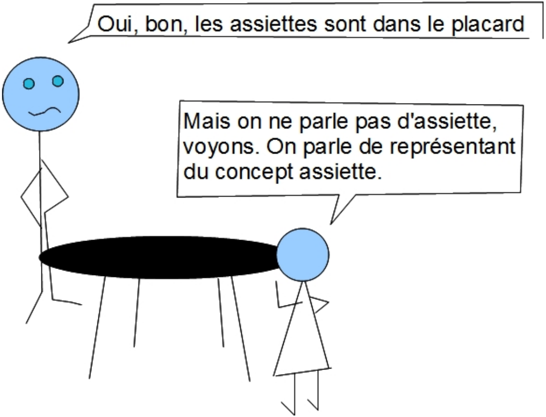
Récréation : Les maths à quoi ça sert ?

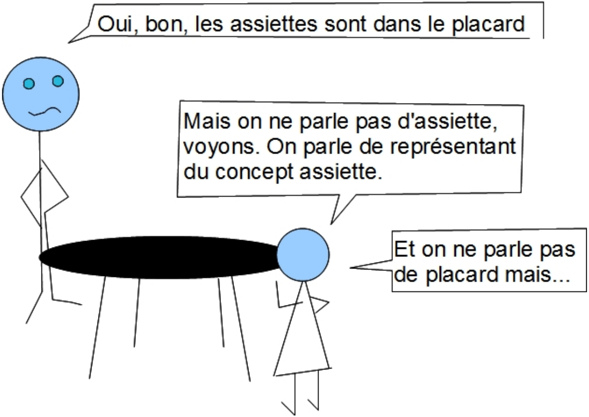

Julie, peux-tu mettre la table s'il te plaît ?


Julie, peux-tu mettre la table s'il te plaît ?
Papa ! Je t'ai déjà dit qu'on ne parle pas de table mais de représentant du concept table.

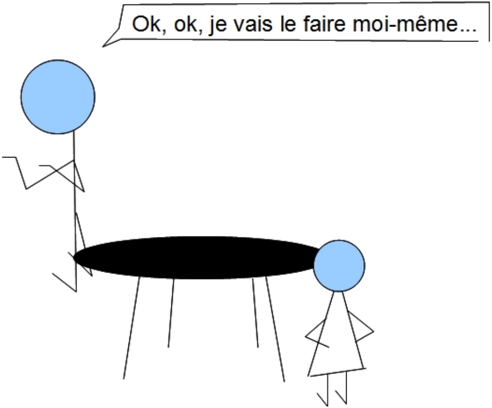

Oui, bon, les assiettes sont dans le placard

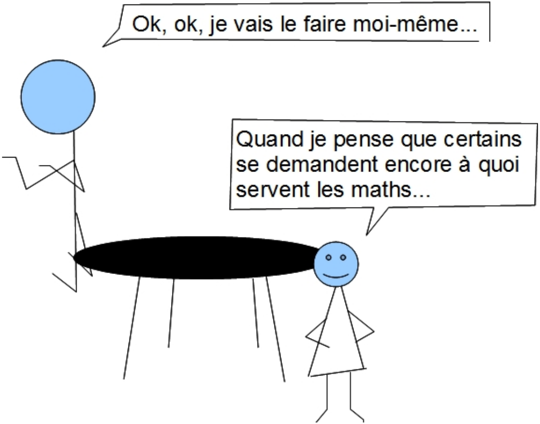
Récréation : Les maths à quoi ça sert ?




Oui, bon, les assiettes sont dans le placard
Mais on ne parle pas d'assiette, voyons. On parle de représentant du concept assiette.
Et on ne parle pas de placard mais...

Récréation : Les maths à quoi ça sert ?




Ok, ok, je vais le faire moi-même...
Quand je pense que certains se demandent encore à quoi servent les maths...

Formalisation définitive

Formalisation définitive

Notion moderne d'espace vectoriel (Peano, 1888)

Un espace vectoriel est la donnée
- D'un ensemble E dont les éléments sont appelés vecteurs
- De deux opérations (ou lois), notées $+$ et $\cdot$ (l'une correspond à la somme de deux vecteurs, l'autre au produit d'un vecteur par un réel).

Ces opérations devant vérifier l'axiomatique suivante :

Formalisation définitive

Notion moderne d'espace vectoriel (Peano, 1888)

Un espace vectoriel est la donnée
- D'un ensemble E dont les éléments sont appelés vecteurs
- De deux opérations (ou lois), notées $+$ et $\cdot$ (l'une correspond à la somme de deux vecteurs, l'autre au produit d'un vecteur par un réel).

Ces opérations devant vérifier l'axiomatique suivante :

$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u} \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \end{array} \right.$$

Formalisation définitive

Notion moderne d'espace vectoriel (Peano, 1888)

Un espace vectoriel est la donnée
- D'un ensemble E dont les éléments sont appelés vecteurs
- De deux opérations (ou lois), notées $+$ et $\cdot$ (l'une correspond à la somme de deux vecteurs, l'autre au produit d'un vecteur par un réel).

Ces opérations devant vérifier l'axiomatique suivante :

$$\begin{cases} \vec{u}+\vec{v}=\vec{v}+\vec{u} \\ (\vec{u}+\vec{v})+\vec{w}=\vec{u}+(\vec{v}+\vec{w}) \end{cases}$$

Formalisation définitive

Notion moderne d'espace vectoriel (Peano, 1888)

Un espace vectoriel est la donnée
- D'un ensemble E dont les éléments sont appelés vecteurs
- De deux opérations (ou lois), notées $+$ et $\cdot$ (l'une correspond à la somme de deux vecteurs, l'autre au produit d'un vecteur par un réel).

Ces opérations devant vérifier l'axiomatique suivante :

$$\left\{\begin{array}{l} \vec{u}+\vec{v}=\vec{v}+\vec{u} \\ (\vec{u}+\vec{v})+\vec{w}=\vec{u}+(\vec{v}+\vec{w}) \\ \text{Il existe un vecteur particulier, noté } \vec{0}\text{, qui vérifie, quelque soit } \vec{u} \text{ :} \\ \qquad \vec{u}+\vec{0}=\vec{u} \\ \text{Chaque vecteur } \vec{u} \text{ admet un vecteur opposé (noté } -\vec{u}\text{) :} \\ \qquad \vec{u}+(-\vec{u})=\vec{0}. \\ \\ \\ \\ \end{array}\right.$$

Formalisation définitive

Notion moderne d'espace vectoriel (Peano, 1888)

Un espace vectoriel est la donnée
- D'un ensemble E dont les éléments sont appelés vecteurs
- De deux opérations (ou lois), notées $+$ et $\cdot$ (l'une correspond à la somme de deux vecteurs, l'autre au produit d'un vecteur par un réel).

Ces opérations devant vérifier l'axiomatique suivante :

$$\begin{cases} \vec{u}+\vec{v}=\vec{v}+\vec{u} \\ (\vec{u}+\vec{v})+\vec{w}=\vec{u}+(\vec{v}+\vec{w}) \\ \text{Il existe un vecteur particulier, noté } \vec{0}\text{, qui vérifie, quelque soit } \vec{u} : \\ \qquad \vec{u}+\vec{0}=\vec{u} \\ \text{Chaque vecteur } \vec{u} \text{ admet un vecteur opposé (noté } -\vec{u}\text{) :} \\ \qquad \vec{u}+(-\vec{u})=\vec{0}. \\ \lambda.(\vec{u}+\vec{v})=\lambda.\vec{u}+\lambda.\vec{v} \\ (\lambda+\mu).\vec{u}=\lambda.\vec{u}+\mu.\vec{u} \\ (\lambda\times\mu).\vec{u}=\lambda.(\mu.\vec{u}) \\ 1.\vec{u}=\vec{u} \end{cases}$$

Théorie et modèles

La branche des mathématiques qui étudie les espaces vectoriels s'appelle l'*algèbre linéaire* ou *théorie des espaces vectoriels*.

Théorie et modèles

La branche des mathématiques qui étudie les espaces vectoriels s'appelle l'*algèbre linéaire* ou *théorie des espaces vectoriels*.

Une théorie est système axiomatique. Un exemple "d'objet" satisfaisant l'axiomatique de la théorie est un *modèle*.

Théorie et modèles

La branche des mathématiques qui étudie les espaces vectoriels s'appelle l'*algèbre linéaire* ou *théorie des espaces vectoriels*.

Une théorie est système axiomatique. Un exemple "d'objet" satisfaisant l'axiomatique de la théorie est un *modèle*.

Une théorie contradictoire n'a pas de modèle. Exhiber un modèle prouve que la théorie est *non contradictoire*.

Théorie et modèles

La branche des mathématiques qui étudie les espaces vectoriels s'appelle l'*algèbre linéaire* ou *théorie des espaces vectoriels*.

Une théorie est système axiomatique. Un exemple "d'objet" satisfaisant l'axiomatique de la théorie est un *modèle*.

Une théorie contradictoire n'a pas de modèle. Exhiber un modèle prouve que la théorie est *non contradictoire*.

En sciences expérimentales, les termes "théorie" et "modèles" ont des acceptations plus voisines l'une de l'autre :

Hervé Dole, astrophysicien (Le Monde, 25-06-2012)

« On pose parfois la question : "Croyez-vous au Big Bang ?". La question est mal posée puisque l'approche scientifique ne donne pas à croire, mais donne à montrer l'accord (ou pas) des données acquises avec des modèles. Il n'est point question de croyance dans cette approche, mais bien de théories, d'observations, de confrontation, de questionnements, de doutes, de débats, de remises en cause. »

Théorie et modèles

La branche des mathématiques qui étudie les espaces vectoriels s'appelle l'*algèbre linéaire* ou *théorie des espaces vectoriels*.

Une théorie est système axiomatique. Un exemple "d'objet" satisfaisant l'axiomatique de la théorie est un *modèle*.

Une théorie contradictoire n'a pas de modèle. Exhiber un modèle prouve que la théorie est *non contradictoire*.

Modèle 1

E peut être l'ensemble des couples de nombres réels (x, y).
Loi $+$: $(x, y) + (x', y') = (x + x', y + y')$
Loi . : $\lambda.(x, y) = (\lambda x, \lambda y)$

Modèle 2

E peut être l'ensemble des triplets de nombres réels (x, y, z).
Loi $+$: $(x, y, z) + (x', y', z') = (x + x', y + y', z + z')$
Loi . : $\lambda.(x, y, z) = (\lambda x, \lambda y, \lambda z)$

Théorie et modèles

La branche des mathématiques qui étudie les espaces vectoriels s'appelle l'*algèbre linéaire* ou *théorie des espaces vectoriels*.

Une théorie est système axiomatique. Un exemple "d'objet" satisfaisant l'axiomatique de la théorie est un *modèle*.

Une théorie contradictoire n'a pas de modèle. Exhiber un modèle prouve que la théorie est *non contradictoire*.

Modèle 3

E peut être l'ensemble des quadruplets de nombres réels (x, y, z, t).
Loi $+$: $(x, y, z, t) + (x', y', z', t') = (x + x', y + y', z + z', t + t')$
Loi . : $\lambda.(x, y, z, t) = (\lambda x, \lambda y, \lambda z, \lambda t)$

Modèle 4

E peut être l'ensemble des fonctions continues de $[0, 1]$ dans $\mathbb{R}$.
Loi $+$: $(f + g)(t) = f(t) + g(t)$
Loi . : $(\lambda.f)(t) = \lambda f(t)$

Au secours !

Au secours !

Où sont les points ? !

Au secours !

Où sont les points ?!
Où est la métrique ?!

Récupérons les points

Espace affine

Étant donné un espace vectoriel $(E, +, .)$, un espace affine dirigé par E est un ensemble $\mathcal{E}$ muni d'une opération $+ : \mathcal{E} \times E \to \mathcal{E}$ vérifiant

$$\begin{cases} \text{Pour tous } A, B \text{ dans } \mathcal{E}, \text{ il existe un unique } \vec{u} \text{ dans } E \text{ tel que } A + \vec{u} = B \\ A + (\vec{u} + \vec{v}) = (A + \vec{u} + \vec{v}) \end{cases}$$

Récupérons les points

Espace affine

Étant donné un espace vectoriel $(E, +, .)$, un espace affine dirigé par E est un ensemble $\mathcal{E}$ muni d'une opération $+ : \mathcal{E} \times E \to \mathcal{E}$ vérifiant

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Pour tous } A, B \text{ dans } \mathcal{E}, \text{ il existe un unique } \vec{u} \text{ dans } E \text{ tel que } A + \vec{u} = B \\ A + (\vec{u} + \vec{v}) = (A + \vec{u} + \vec{v}) \end{array} \right.$$

Modèle

Étant donné un espace vectoriel $(E, +, .)$, on peut poser $\mathcal{E} = E$ et

$$A +_{\mathcal{E}} \vec{u} = A +_E \vec{u}$$

Récréation : un plan fini

Récréation : un plan fini

Remplaçons, dans les structures d'espace vectoriel et d'espace affine, l'ensemble des scalaires (les réels) par un ensemble de nombres moins usuels, par exemple le corps

$$\mathbb{F}_3 = \{\overline{0}, \overline{1}, \overline{2}\}$$

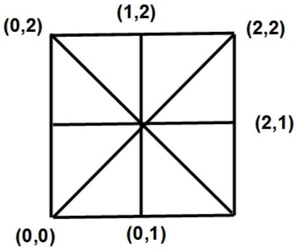
Alors une droite affine comporte 3 éléments, un plan affine comporte $3^2 = 9$ éléments et $\frac{9\times 8}{6} = 12$ droites.

Récréation : un plan fini

Remplaçons, dans les structures d'espace vectoriel et d'espace affine, l'ensemble des scalaires (les réels) par un ensemble de nombres moins usuels, par exemple le corps

$$\mathbb{F}_3 = \{\overline{0}, \overline{1}, \overline{2}\}$$

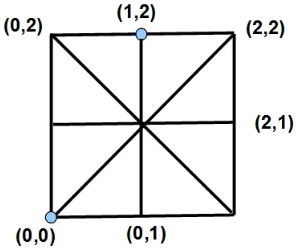
Alors une droite affine comporte 3 éléments, un plan affine comporte $3^2 = 9$ éléments et $\frac{9\times 8}{6} = 12$ droites.



Remplaçons, dans les structures d'espace vectoriel et d'espace affine, l'ensemble des scalaires (les réels) par un ensemble de nombres moins usuels, par exemple le corps

$$\mathbb{F}_3 = \{\overline{0}, \overline{1}, \overline{2}\}$$

Alors une droite affine comporte 3 éléments, un plan affine comporte $3^2 = 9$ éléments et $\frac{9\times 8}{6} = 12$ droites.

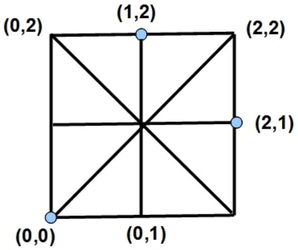


Récréation : un plan fini

Remplaçons, dans les structures d'espace vectoriel et d'espace affine, l'ensemble des scalaires (les réels) par un ensemble de nombres moins usuels, par exemple le corps

$$\mathbb{F}_3 = \{\overline{0}, \overline{1}, \overline{2}\}$$

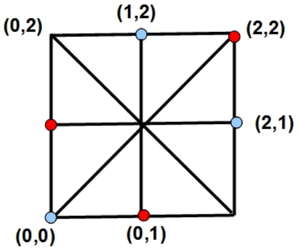
Alors une droite affine comporte 3 éléments, un plan affine comporte $3^2 = 9$ éléments et $\frac{9 \times 8}{6} = 12$ droites.



Remplaçons, dans les structures d'espace vectoriel et d'espace affine, l'ensemble des scalaires (les réels) par un ensemble de nombres moins usuels, par exemple le corps

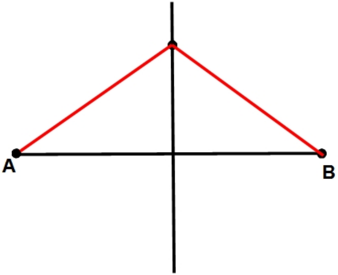
$$\mathbb{F}_3 = \{\overline{0}, \overline{1}, \overline{2}\}$$

Alors une droite affine comporte 3 éléments, un plan affine comporte $3^2 = 9$ éléments et $\frac{9\times 8}{6} = 12$ droites.

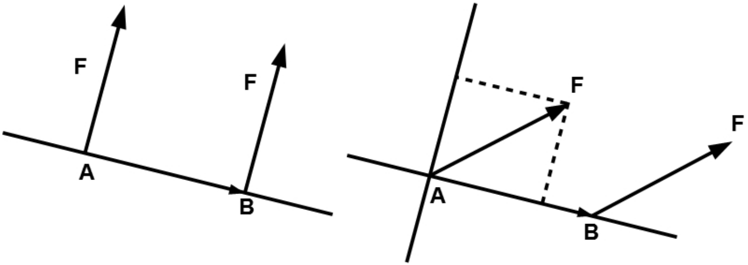


Récupérons la métrique

Métrique euclidienne : notion de longueur, mais aussi orthogonalité, angles.



Pour appréhender le produit scalaire : travail d'une force



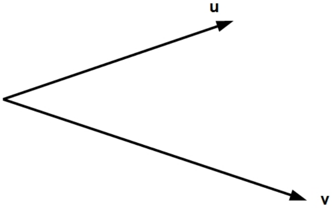
Le produit scalaire des deux vecteurs $\vec{F}$ et $\overrightarrow{AB}$ est égal au produit de la longueur de l'un multiplié par la longueur (algébrique) du projeté orthogonal du premier sur la droite dirigée par le second.

Produit scalaire (définition heuristique)

Le produit scalaire de deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ est égal au produit de la longueur de l'un multiplié par la longueur (algébrique) du projeté orthogonal de l'autre sur la droite dirigée par le premier.

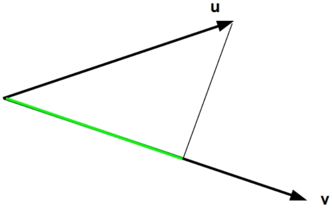
Produit scalaire (définition heuristique)

Le produit scalaire de deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ est égal au produit de la longueur de l'un multiplié par la longueur (algébrique) du projeté orthogonal de l'autre sur la droite dirigée par le premier.



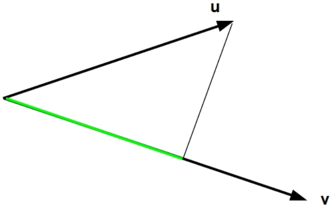
Produit scalaire (définition heuristique)

Le produit scalaire de deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ est égal au produit de la longueur de l'un multiplié par la longueur (algébrique) du projeté orthogonal de l'autre sur la droite dirigée par le premier.



Produit scalaire (définition heuristique)

Le produit scalaire de deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ est égal au produit de la longueur de l'un multiplié par la longueur (algébrique) du projeté orthogonal de l'autre sur la droite dirigée par le premier.

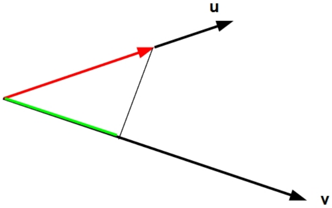


propriétés

$$\begin{cases} \langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = \langle \vec{v}, \vec{u} \rangle \\ \langle \lambda.\vec{u} + \vec{v}, \vec{w} \rangle = \lambda \langle \vec{u}, \vec{w} \rangle + \langle \vec{v}, \vec{w} \rangle \\ \langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = 0 \iff \vec{u} \perp \vec{v} \end{cases} \quad \begin{cases} \langle \vec{u}, \vec{u} \rangle \geq 0 \\ \langle \vec{u}, \vec{u} \rangle = 0 \implies \vec{u} = \vec{0} \\ \|\vec{u}\| = \sqrt{\langle \vec{u}, \vec{u} \rangle} \end{cases}$$

Produit scalaire (définition heuristique)

Le produit scalaire de deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ est égal au produit de la longueur de l'un multiplié par la longueur (algébrique) du projeté orthogonal de l'autre sur la droite dirigée par le premier.

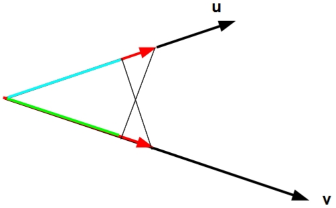


propriétés

$$\left\{\begin{array}{l} \langle \vec{u}, \vec{v}\rangle = \langle \vec{v}, \vec{u}\rangle \\ \langle \lambda.\vec{u} + \vec{v}, \vec{w}\rangle = \lambda\langle \vec{u}, \vec{w}\rangle + \langle \vec{v}, \vec{w}\rangle \\ \langle \vec{u}, \vec{v}\rangle = 0 \iff \vec{u} \perp \vec{v} \end{array}\right. \quad \left\{\begin{array}{l} \langle \vec{u}, \vec{u}\rangle \geq 0 \\ \langle \vec{u}, \vec{u}\rangle = 0 \implies \vec{u} = \vec{0} \\ \|\vec{u}\| = \sqrt{\langle \vec{u}, \vec{u}\rangle} \end{array}\right.$$

Produit scalaire (définition heuristique)

Le produit scalaire de deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ est égal au produit de la longueur de l'un multiplié par la longueur (algébrique) du projeté orthogonal de l'autre sur la droite dirigée par le premier.

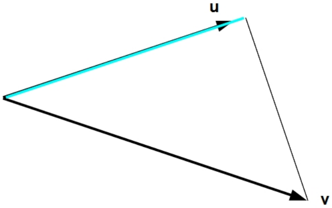


propriétés

$$\left\{\begin{array}{l}\langle\vec{u},\vec{v}\rangle = \langle\vec{v},\vec{u}\rangle\\ \langle\lambda.\vec{u}+\vec{v},\vec{w}\rangle = \lambda\langle\vec{u},\vec{w}\rangle + \langle\vec{v},\vec{w}\rangle\\ \langle\vec{u},\vec{v}\rangle = 0 \iff \vec{u}\perp\vec{v}\end{array}\right. \quad \left\{\begin{array}{l}\langle\vec{u},\vec{u}\rangle \geq 0\\ \langle\vec{u},\vec{u}\rangle = 0 \implies \vec{u}=\vec{0}\\ \|\vec{u}\| = \sqrt{\langle\vec{u},\vec{u}\rangle}\end{array}\right.$$

Produit scalaire (définition heuristique)

Le produit scalaire de deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ est égal au produit de la longueur de l'un multiplié par la longueur (algébrique) du projeté orthogonal de l'autre sur la droite dirigée par le premier.



propriétés

$$\begin{cases} \langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = \langle \vec{v}, \vec{u} \rangle \\ \langle \lambda.\vec{u} + \vec{v}, \vec{w} \rangle = \lambda \langle \vec{u}, \vec{w} \rangle + \langle \vec{v}, \vec{w} \rangle \\ \langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = 0 \iff \vec{u} \perp \vec{v} \end{cases} \quad \begin{cases} \langle \vec{u}, \vec{u} \rangle \geq 0 \\ \langle \vec{u}, \vec{u} \rangle = 0 \implies \vec{u} = \vec{0} \\ \|\vec{u}\| = \sqrt{\langle \vec{u}, \vec{u} \rangle} \end{cases}$$

Produit scalaire : formalisation définitive

Définition

Soit E un espace vectoriel. Un produit scalaire sur E est une application $\langle ., . \rangle : E \times E \to \mathbb{R}$ vérifiant

$$\left\{ \begin{array}{l} \langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = \langle \vec{v}, \vec{u} \rangle \\ \langle \lambda.\vec{u} + \vec{v}, \vec{w} \rangle = \lambda \langle \vec{u}, \vec{w} \rangle + \langle \vec{v}, \vec{w} \rangle \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} \langle \vec{u}, \vec{u} \rangle \geq 0 \\ \langle \vec{u}, \vec{u} \rangle = 0 \implies \vec{u} = \vec{0} \end{array} \right.$$

On pose alors $\quad \|\vec{u}\| = \sqrt{\langle \vec{u}, \vec{u} \rangle}$
Et on dit que $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux lorsque $\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = 0$.

Produit scalaire : formalisation définitive

Définition

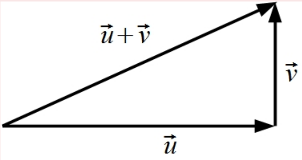
Soit E un espace vectoriel. Un produit scalaire sur E est une application $\langle .,. \rangle : E \times E \to \mathbb{R}$ vérifiant

$$\begin{cases} \langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = \langle \vec{v}, \vec{u} \rangle \\ \langle \lambda.\vec{u} + \vec{v}, \vec{w} \rangle = \lambda \langle \vec{u}, \vec{w} \rangle + \langle \vec{v}, \vec{w} \rangle \end{cases} \quad \begin{cases} \langle \vec{u}, \vec{u} \rangle \geq 0 \\ \langle \vec{u}, \vec{u} \rangle = 0 \implies \vec{u} = \vec{0} \end{cases}$$

On pose alors $\quad \|\vec{u}\| = \sqrt{\langle \vec{u}, \vec{u} \rangle}$

Et on dit que $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux lorsque $\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = 0$.

Exemple de preuve : le théorème de Pythagore



Produit scalaire : formalisation définitive

Définition

Soit E un espace vectoriel. Un produit scalaire sur E est une application $\langle .,. \rangle : E \times E \to \mathbb{R}$ vérifiant

$$\begin{cases} \langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = \langle \vec{v}, \vec{u} \rangle \\ \langle \lambda.\vec{u} + \vec{v}, \vec{w} \rangle = \lambda \langle \vec{u}, \vec{w} \rangle + \langle \vec{v}, \vec{w} \rangle \end{cases} \quad \begin{cases} \langle \vec{u}, \vec{u} \rangle \geq 0 \\ \langle \vec{u}, \vec{u} \rangle = 0 \implies \vec{u} = \vec{0} \end{cases}$$

On pose alors $\quad \|\vec{u}\| = \sqrt{\langle \vec{u}, \vec{u} \rangle}$

Et on dit que $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux lorsque $\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = 0$.

Exemple de preuve : le théorème de Pythagore

Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux alors

$$\begin{aligned} \|\vec{u} + \vec{v}\|^2 &= \langle \vec{u} + \vec{v}, \vec{u} + \vec{v} \rangle \\ &= \langle \vec{u}, \vec{u} + \vec{v} \rangle + \langle \vec{v}, \vec{u} + \vec{v} \rangle \\ &= \langle \vec{u}, \vec{u} \rangle + \langle \vec{u}, \vec{v} \rangle + \langle \vec{v}, \vec{u} \rangle + \langle \vec{v}, \vec{v} \rangle \\ &= \|u\|^2 + \|v\|^2 \end{aligned}$$

Isométrie

Deux plans euclidiens

$$E_1 = E_2 = \mathbb{R}^2$$

$$\vec{u} = (x, y) \quad \vec{v} = (x', y')$$

$$E_1 : \quad \langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = xx' + yy' \qquad \|\vec{u}\| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$E_2 : \quad (\vec{u} | \vec{v}) = 2xx' + yy' \qquad \|\vec{u}\| = \sqrt{2x^2 + y^2}$$

Isométrie

Deux plans euclidiens

$$E_1 = E_2 = \mathbb{R}^2$$

$$\vec{u} = (x, y) \quad \vec{v} = (x', y')$$

$$E_1 : \quad \langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = xx' + yy' \qquad \|\vec{u}\| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$E_2 : \quad (\vec{u}|\vec{v}) = 2xx' + yy' \qquad \|\vec{u}\| = \sqrt{2x^2 + y^2}$$

Isométrie

$$\Phi : \begin{array}{ccc} (E_1, \langle ., . \rangle) & \to & (E_2, (.|.)) \\ (x, y) & \mapsto & (\frac{x}{\sqrt{2}}, y) \end{array}$$

$$(\Phi(\vec{u})|\Phi(\vec{v})) = \langle \vec{u}, \vec{v} \rangle$$

Les espaces E_1 et E_2 sont indifférentiables !

Isométrie

Deux plans euclidiens

$$E_1 = E_2 = \mathbb{R}^2$$

$$\vec{u} = (x, y) \quad \vec{v} = (x', y')$$

$$E_1 : \quad \langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = xx' + yy' \qquad \|\vec{u}\| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$E_2 : \quad (\vec{u}|\vec{v}) = 2xx' + yy' \qquad \|\vec{u}\| = \sqrt{2x^2 + y^2}$$

Théorème

Il n'existe, à isométrie près, qu'un seul espace (affine) euclidien de dimension n.

Bilan

On a mis en évidence 4 structures mathématiques :

- Espace vectoriel (lieu de l'algèbre linéaire)
- Espace vectoriel euclidien (lieu de l'algèbre euclidienne)
- Espace affine (lieu de la géométrie affine)
- Espace affine euclidien (lieu de la géométrie euclidienne et de la mécanique de Newton)

Plan de l'exposé

Géométries non euclidiennes : le carcan du réel

- Durant des centaines d'années, on cherche à prouver le 5ième postulat à partir des quatre premiers.

Géométries non euclidiennes : le carcan du réel

- Durant des centaines d'années, on cherche à prouver le 5ième postulat à partir des quatre premiers.
- Nombreuses "preuves" mais, à chaque fois, il s'avère que celle-ci fait implicitement appel à un axiome supplémentaire : Saccheri (1677-1733), Lambert (1728-1777), Legendre (1752-1833).

Géométries non euclidiennes : le carcan du réel

- Durant des centaines d'années, on cherche à prouver le 5ième postulat à partir des quatre premiers.
- Nombreuses "preuves" mais, à chaque fois, il s'avère que celle-ci fait implicitement appel à un axiome supplémentaire : Saccheri (1677-1733), Lambert (1728-1777), Legendre (1752-1833).
- Certains cherchent une preuve par l'absurde. Ils travaillent dans le système axiomatique formé des 4 premiers postulats et de la négation du 5ième.

Géométries non euclidiennes : le carcan du réel

- Durant des centaines d'années, on cherche à prouver le 5ième postulat à partir des quatre premiers.
- Nombreuses "preuves" mais, à chaque fois, il s'avère que celle-ci fait implicitement appel à un axiome supplémentaire : Saccheri (1677-1733), Lambert (1728-1777), Legendre (1752-1833).
- Certains cherchent une preuve par l'absurde. Ils travaillent dans le système axiomatique formé des 4 premiers postulats et de la négation du 5ième.
- Ils démontrent ainsi des théorèmes de géométrie non euclidienne, auxquels ils ne "croient" pas puisqu'ils croient au 5ième postulat. Ils sont "englués" par la non séparation de la théorie, du modèle et du réel (la Vérité, ça colle !).

Legendre (1752-1833)

Legendre veut prouver (sans le 5ième postulat) que la somme des angles d'un triangle vaut π.

Legendre (1752-1833)

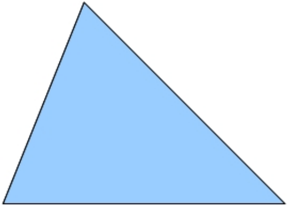
Legendre veut prouver (sans le 5ième postulat) que la somme des angles d'un triangle vaut π.

- Il prouve que la somme des angles ne peut excéder π (voir annexe).

Legendre (1752-1833)

Legendre veut prouver (sans le 5ième postulat) que la somme des angles d'un triangle vaut π.

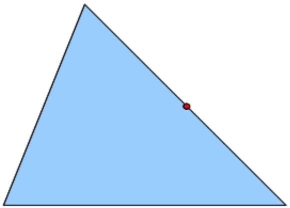
- Il prouve que la somme des angles ne peut excéder π (voir annexe).
- Puis il "prouve" qu'elle ne peut être inférieure à π de la façon suivante :



Hypothèse : somme des angles **S** $< \pi$. En terme de déficit : $\pi -$ **S** > 0

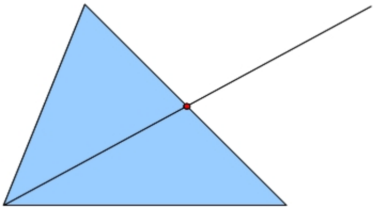
Legendre veut prouver (sans le 5ième postulat) que la somme des angles d'un triangle vaut π.

- Il prouve que la somme des angles ne peut excéder π (voir annexe).
- Puis il "prouve" qu'elle ne peut être inférieure à π de la façon suivante :



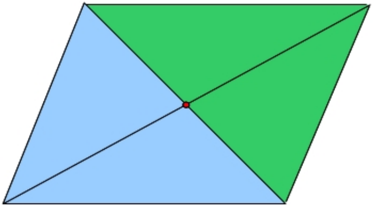
Milieu d'un côté

Legendre veut prouver (sans le 5ième postulat) que la somme des angles d'un triangle vaut π.
- Il prouve que la somme des angles ne peut excéder π (voir annexe).
- Puis il "prouve" qu'elle ne peut être inférieure à π de la façon suivante :



Symétrique du sommet opposé

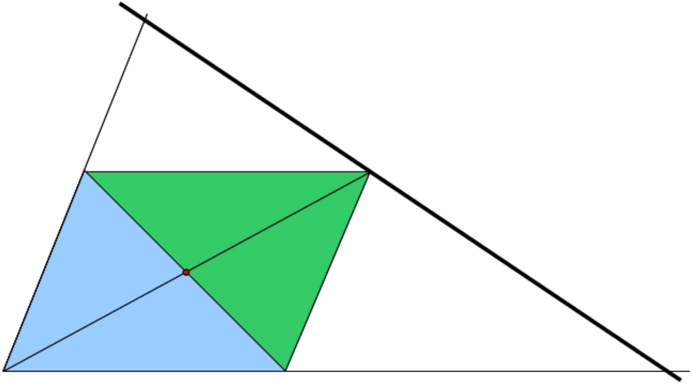
Legendre veut prouver (sans le 5ième postulat) que la somme des angles d'un triangle vaut π.
- Il prouve que la somme des angles ne peut excéder π (voir annexe).
- Puis il "prouve" qu'elle ne peut être inférieure à π de la façon suivante :



Les deux triangles sont égaux

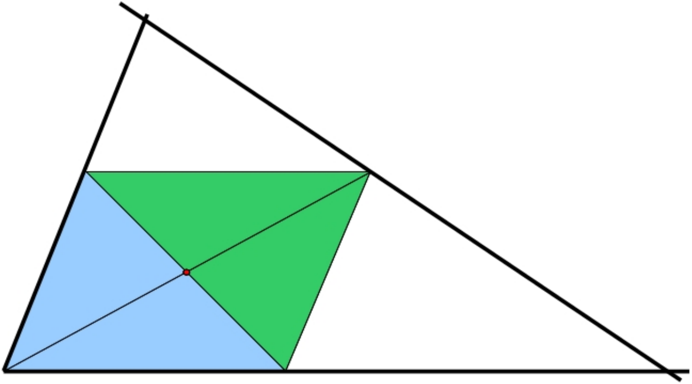
Legendre veut prouver (sans le 5ième postulat) que la somme des angles d'un triangle vaut π.

- Il prouve que la somme des angles ne peut excéder π (voir annexe).
- Puis il "prouve" qu'elle ne peut être inférieure à π de la façon suivante :



Droite quelconque passant le sommet et intersectant les deux côtés du triangle bleu

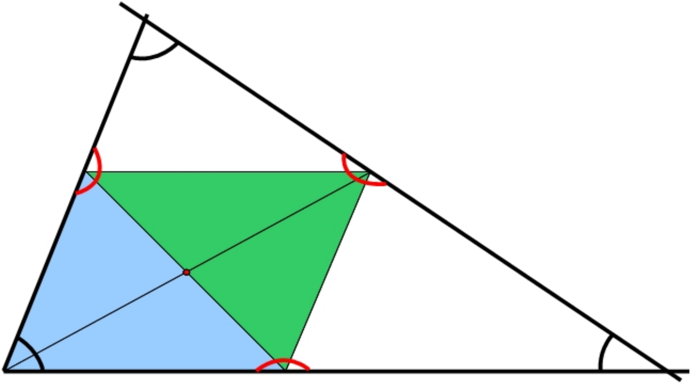
Legendre veut prouver (sans le 5ième postulat) que la somme des angles d'un triangle vaut π.
- Il prouve que la somme des angles ne peut excéder π (voir annexe).
- Puis il "prouve" qu'elle ne peut être inférieure à π de la façon suivante :



On examine la somme des angles **S** du triangle gras

Legendre (1752-1833)

Legendre veut prouver (sans le 5ième postulat) que la somme des angles d'un triangle vaut π.
- Il prouve que la somme des angles ne peut excéder π (voir annexe).
- Puis il "prouve" qu'elle ne peut être inférieure à π de la façon suivante :



$\mathbf{S} + 3\pi \leq 2\mathbf{S} + 2\pi$. Donc $\pi - \mathbf{S} \geq 2(\pi - \mathbf{S})$. Si on recommence, on construit un triangle dont le déficit est aussi grand qu'on veut : absurde !

Legendre (1752-1833)

L'erreur de Legendre : l'existence d'une droite passant par le sommet du triangle vert et intersectant les deux côtés du triangle bleu n'est pas certaine sans le 5ième postulat.

Legendre (1752-1833)

L'erreur de Legendre : l'existence d'une droite passant par le sommet du triangle vert et intersectant les deux côtés du triangle bleu n'est pas certaine sans le 5ième postulat.
Ce type de raisonnement mène à une formulation équivalente du 5ième postulat :

Théorème de Legendre

Si le 5ième postulat est vrai, la somme des angles d'un triangle vaut π.
Sinon, la somme des angles d'un triangle quelconque est strictement inférieure à π.

Les artisans de la géométrie non euclidienne

Ils s'appellent Bolyai, Lobatchevsky et Gauss. Ils continuent dans cette voie, mais cette fois, ils y "croient". Ils construisent une nouvelle géométrie, une "géométrie imaginaire" (Lobatchevsky), une "géométrie non-euclidienne" (Gauss), qui suppose l'existence de plusieurs parallèles à une droite donnée menées par un point.

Janos Bolyai (1802-1860)

Farkas Bolyai à son fils Janos :

Janos Bolyai (1802-1860)

Farkas Bolyai à son fils Janos : « Tu ne devrais pas t'engager sur ce chemin pour mettre à l'épreuve les parallèles ; je connais ce chemin jusqu'au bout moi aussi, j'ai mesuré cette nuit sans fond et elle a éteint toute lumière et toute joie dans ma vie. »

Janos Bolyai (1802-1860)

Farkas Bolyai à son fils Janos : « Tu ne devrais pas t'engager sur ce chemin pour mettre à l'épreuve les parallèles ; je connais ce chemin jusqu'au bout moi aussi, j'ai mesuré cette nuit sans fond et elle a éteint toute lumière et toute joie dans ma vie. »

Janos : « J'ai découvert des choses si belles que j'en ai été ébloui... J'ai tiré du néant un nouvel univers. »

Carl Friedrich Gauss (1777 - 1855)

À Farkas Bolyai :

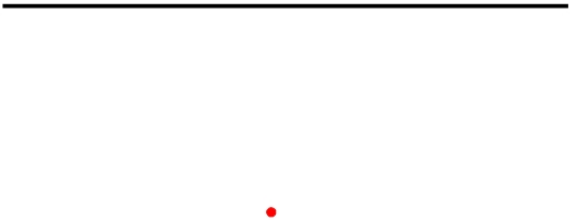
Carl Friedrich Gauss (1777 - 1855)

À Farkas Bolyai : « Parlons maintenant un peu du travail de ton fils. Si je commence en disant que je ne puis louer ce travail, tu pourras bien un instant reculer d'étonnement ; mais je ne puis pas dire autre chose ; le louer serait me louer moi-même ; en effet, le contenu tout entier de l'Ouvrage, la voie qu'a frayée ton fils, (...) coïncident presque entièrement avec mes propres méditations, qui ont occupé en partie mon esprit depuis trente à trente-cinq ans. Aussi ai-je été complètement stupéfait. (...) la plupart des hommes n'ont pas l'esprit juste sur les questions dont il s'agit. »

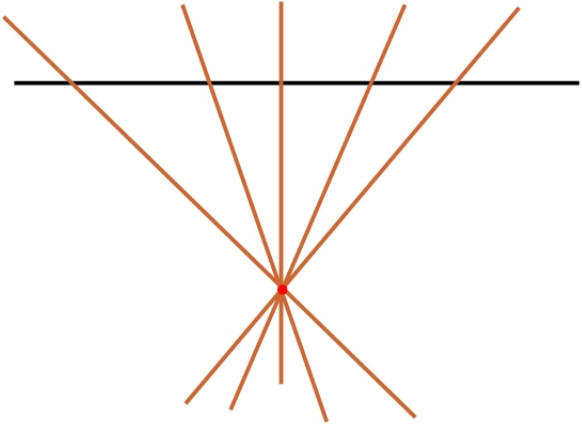
Lobatchevsky (1793-1856)

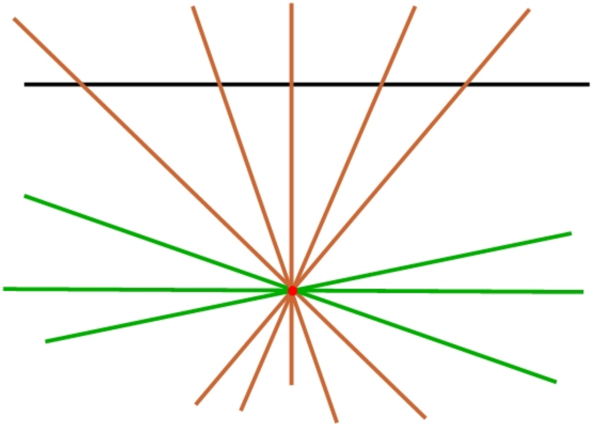
Partage des droites : « Toutes les droites passées par un même point dans un plan peuvent se distribuer par rapport à une droite donnée dans ce plan en deux classes, savoir : en droites qui coupent la droite donnée et en droites qui ne la coupent pas. La droite qui forme la limite commune de ces deux classes est dite parallèle à la droite donnée. »

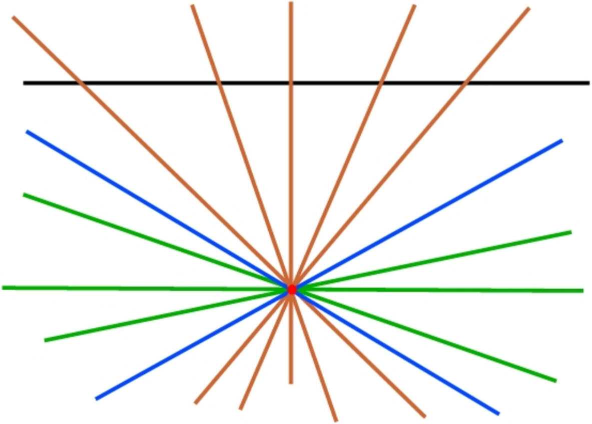
Les artisans de la géométrie non euclidienne

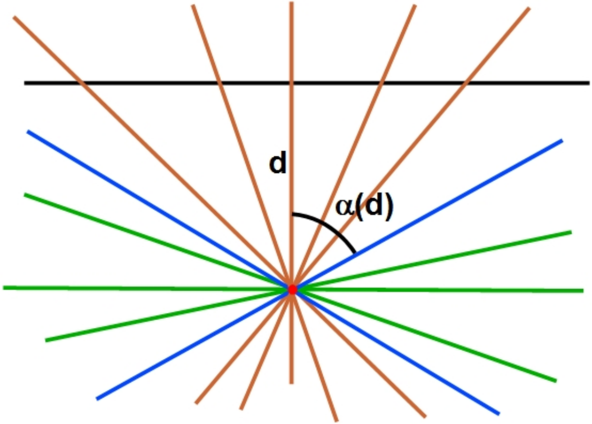


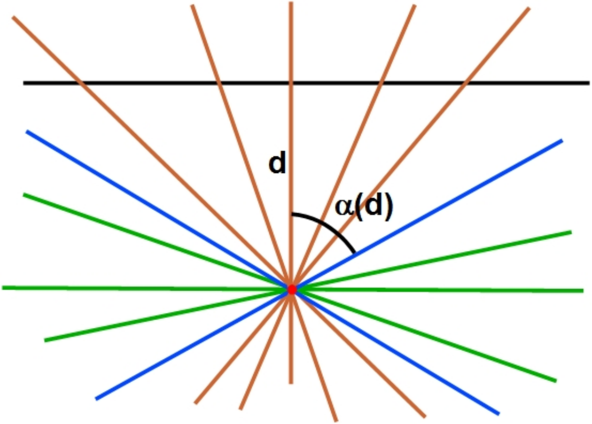
Les artisans de la géométrie non euclidienne








d
α(d)



$$\tan\left(\frac{\alpha(d)}{2}\right) = e^{-\frac{d}{k}}$$

Le point de vue de Gauss

Carl Friedrich Gauss (1777 - 1855)

Lettre à Schumacher : «(...) la géométrie non-euclidienne ne renferme en elle rien de contradictoire, quoique, à première vue, beaucoup de ses résultats aient l'air de paradoxes. Ces contradictions apparentes doivent être regardées comme l'effet d'une illusion, due à l'habitude que nous avons prise de bonne heure de regarder la géométrie euclidienne comme rigoureuse.»

Le point de vue de Gauss

Carl Friedrich Gauss (1777 - 1855)

1817 : «Je suis de plus en plus convaincu que l'on ne peut démontrer par le seul raisonnement la nécessité de la géométrie euclidienne. Il est possible que dans l'avenir, nous puissions avoir des idées sur la nature de l'espace qui aujourd'hui nous sont inaccessibles. Ainsi, la géométrie ne peut être mise à côté de l'arithmétique, qui est de nature a priori, mais plutôt à côté de la mécanique.»

Le point de vue de Gauss

Carl Friedrich Gauss (1777 - 1855)

1817 : «Je suis de plus en plus convaincu que l'on ne peut démontrer par le seul raisonnement la nécessité de la géométrie euclidienne. Il est possible que dans l'avenir, nous puissions avoir des idées sur la nature de l'espace qui aujourd'hui nous sont inaccessibles. Ainsi, la géométrie ne peut être mise à côté de l'arithmétique, qui est de nature a priori, mais plutôt à côté de la mécanique.»

Gauss souligne ainsi l'impossibilité de passer du local au global. Nous vivons en quelque sorte dans l'espace tangent à notre univers. Sa géométrie globale nous échappe au premier abord.

Le point de vue de Gauss

Carl Friedrich Gauss (1777 - 1855)

1817 : «Je suis de plus en plus convaincu que l'on ne peut démontrer par le seul raisonnement la nécessité de la géométrie euclidienne. Il est possible que dans l'avenir, nous puissions avoir des idées sur la nature de l'espace qui aujourd'hui nous sont inaccessibles. Ainsi, la géométrie ne peut être mise à côté de l'arithmétique, qui est de nature a priori, mais plutôt à côté de la mécanique.»

Gauss souligne ainsi l'impossibilité de passer du local au global. Nous vivons en quelque sorte dans l'espace tangent à notre univers. Sa géométrie globale nous échappe au premier abord.

Emmanuel Kant (1724-1804)

«Le concept d'espace n'est en aucun sens d'origine empirique, mais est une nécessité inévitable de la pensée.»

Modèles du plan non-euclidien

- Premier modèle de plan non euclidien :
  Klein et Beltrami, 1868, issu de la géométrie projective.
- On explicitera le modèle de Poincaré (fin XIX$^{\text{ième}}$) ultérieurement.

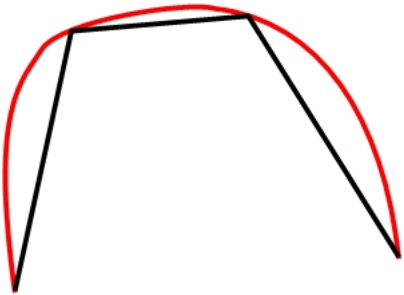
Patience !...

Plan de l'exposé

Longueur d'une courbe

$$\Gamma : [a, b] \to \mathcal{E}$$

Longueur d'une courbe

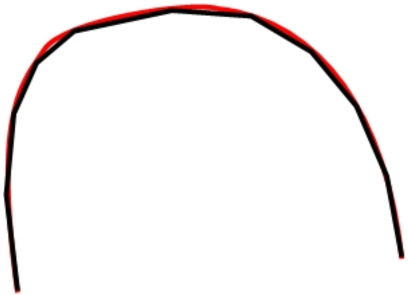


$$\Gamma : [a, b] \to \mathcal{E}$$

Longueur d'une courbe

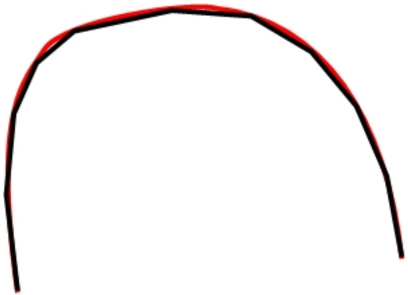
$$\Gamma : [a, b] \to \mathcal{E}$$

Longueur d'une courbe



$$\Gamma : [a, b] \to \mathcal{E}$$

Longueur d'une courbe

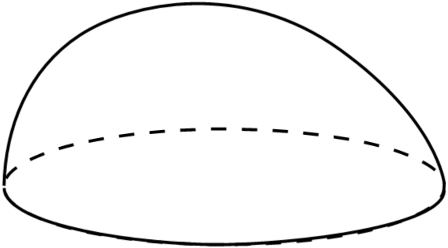


$$\sum_i \left\| \overrightarrow{\Gamma(t_i)\Gamma(t_{i+1})} \right\| = \sum_i (t_{i+1} - t_i) \times \left\| \frac{\overrightarrow{\Gamma(t_i)\Gamma(t_{i+1})}}{t_{i+1} - t_i} \right\|$$

$$L = \int_a^b \left\| \overrightarrow{\Gamma'(t)} \right\| \mathrm{d}t$$

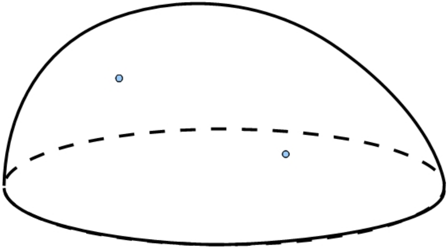
Métrique d'une surface

Soit S une surface d'un espace affine euclidien $\mathcal{E}$.



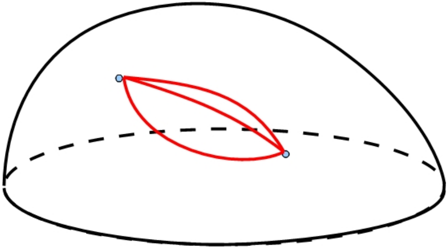
Métrique d'une surface

Soit S une surface d'un espace affine euclidien $\mathcal{E}$.



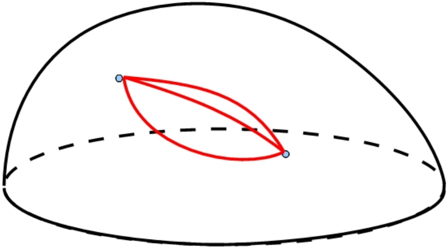
Métrique d'une surface

Soit S une surface d'un espace affine euclidien $\mathcal{E}$.



Métrique d'une surface

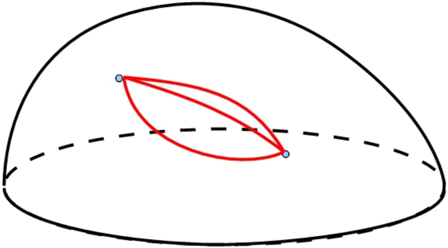
Soit S une surface d'un espace affine euclidien $\mathcal{E}$.



$$d(p,q) = \inf_{\Gamma} L(\Gamma)$$

Métrique d'une surface

Soit S une surface d'un espace affine euclidien $\mathcal{E}$.



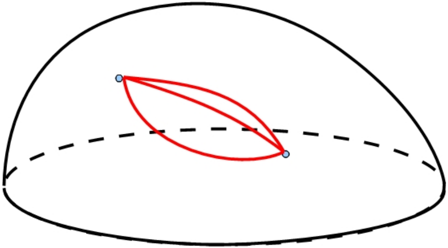
$$d(p,q) = \inf_{\Gamma} L(\Gamma)$$

Géodésiques

Un arc géodésique est chemin de longueur minimale d'un point à un autre

Métrique d'une surface

Soit S une surface d'un espace affine euclidien $\mathcal{E}$.

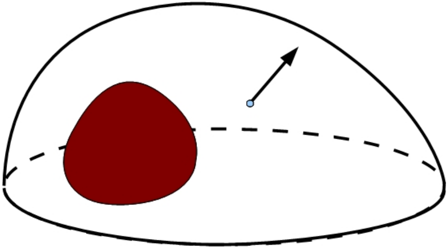


$$d(p,q) = \inf_{\Gamma} L(\Gamma)$$

Notions intrinsèques et notions extrinsèques

Notions intrinsèques : qui peuvent être définies en ne faisant appel qu'à la distance d.
Notions extrinsèques : relatives au "plongement" de la surface dans $\mathcal{E}$.

Soit S une surface d'un espace affine euclidien $\mathcal{E}$.

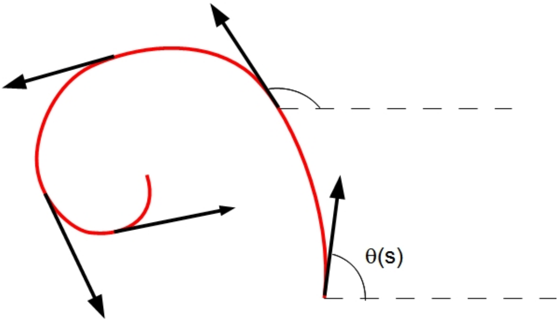


Exemples

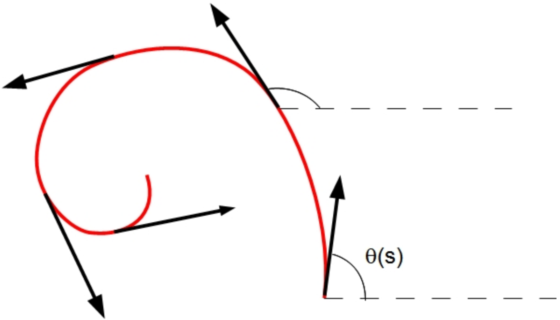
Aire d'une portion de la surface : notion intrinsèque
Vecteur normal à la surface : notion extrinsèque

Courbure d'une courbe plane

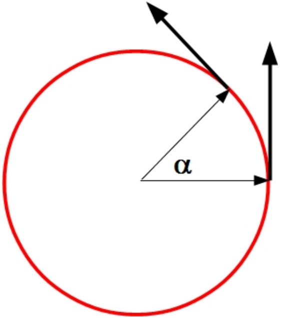
Courbure d'une courbe plane



Courbure d'une courbe plane

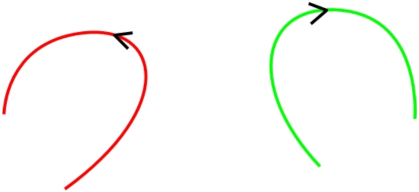


$$C(s) = \frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}s}$$



$$C(s) = \frac{\alpha}{R\alpha} = \frac{1}{R}$$

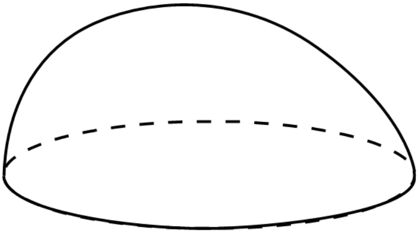
Signe de la courbure



$C > 0$ $\quad$ $C < 0$

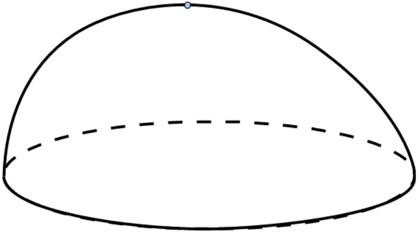
Courbure d'une surface

Soit S une surface d'un espace affine euclidien de dimension 3.



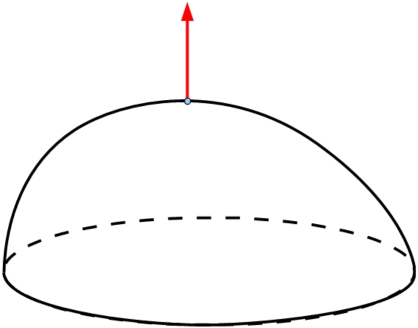
Courbure d'une surface

Soit S une surface d'un espace affine euclidien de dimension 3.

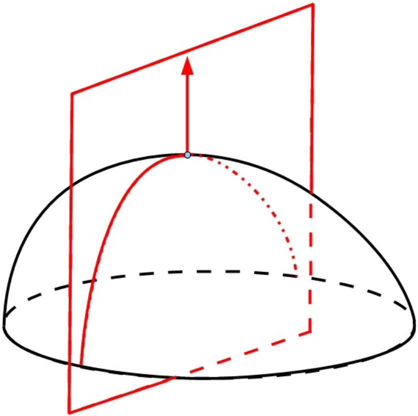


Courbure d'une surface

Soit S une surface d'un espace affine euclidien de dimension 3.



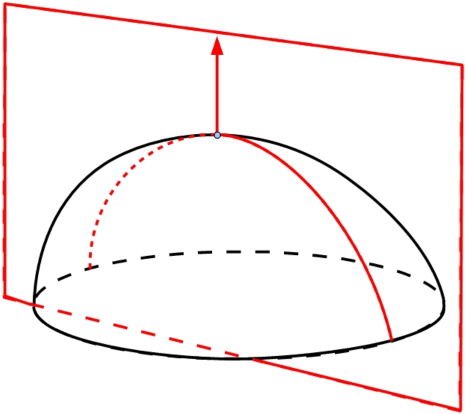
Soit S une surface d'un espace affine euclidien de dimension 3.



On associe au plan P la courbure au point M de la courbe d'intersection.

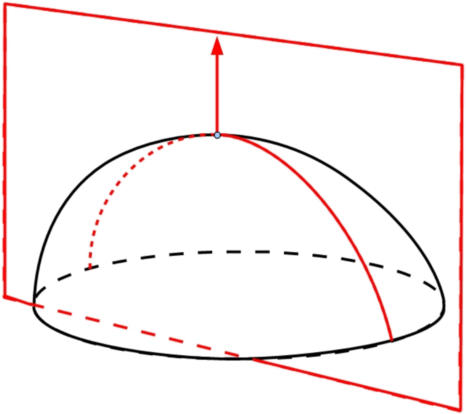
Courbure d'une surface

Soit S une surface d'un espace affine euclidien de dimension 3.



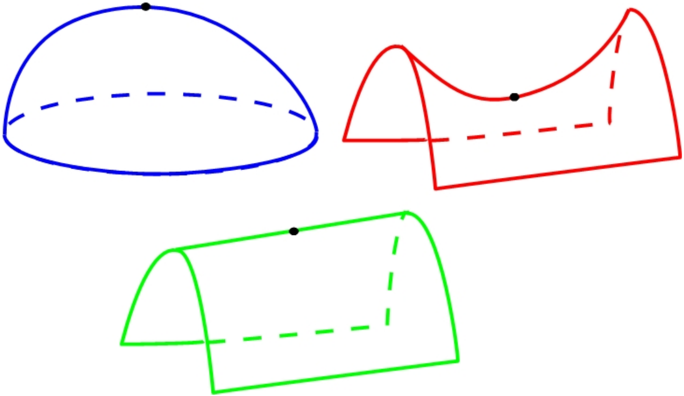
On fait tourner le plan autour de la normale : la courbure varie. Les valeurs minimales et maximales k_1 et k_2 sont appelées courbures principales. Elles sont atteintes pour deux plans perpendiculaires.

Soit S une surface d'un espace affine euclidien de dimension 3.



Gauss définit la courbure par $K = k_1 k_2$

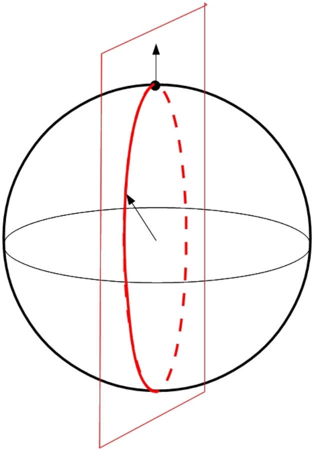
Signe de la courbure



$K > 0$ $K < 0$ $K = 0$

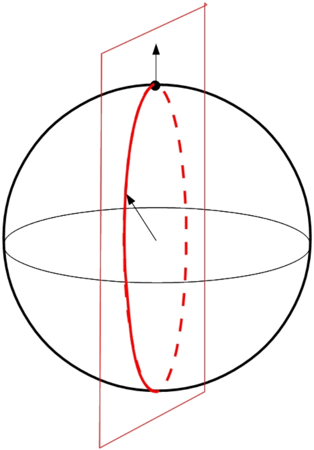
Courbure d'une sphère

S = une sphère de rayon R



Courbure d'une sphère

S = une sphère de rayon R



$$k_1 = k_2 = \frac{1}{R} \qquad K = \frac{1}{R^2}$$

Theorema egregium

La courbure est a priori définie de manière extrinsèque. Et pourtant :

Theorema egregium

La courbure est a priori définie de manière extrinsèque. Et pourtant :

Théorème de Gauss

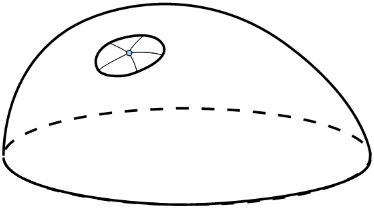
La courbure est une notion intrinsèque

Theorema egregium

La courbure est a priori définie de manière extrinsèque. Et pourtant :

Théorème de Gauss

La courbure est une notion intrinsèque

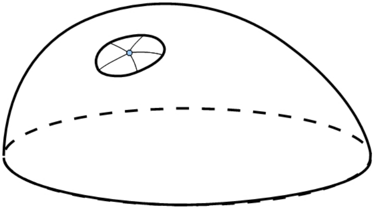


Theorema egregium

La courbure est a priori définie de manière extrinsèque. Et pourtant :

Théorème de Gauss

La courbure est une notion intrinsèque



$$\text{Longueur du "cercle"} = 2\pi r\left(1 - \frac{K}{6}r^2 + o(r^2)\right)$$

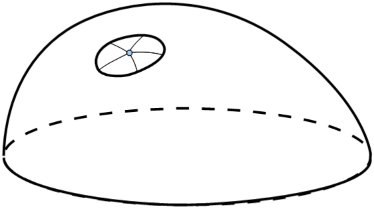
$$\text{Aire du "disque"} = \pi r^2\left(1 - \frac{K}{12}r^2 + o(r^2)\right)$$

Theorema egregium

La courbure est a priori définie de manière extrinsèque. Et pourtant :

Théorème de Gauss

La courbure est une notion intrinsèque

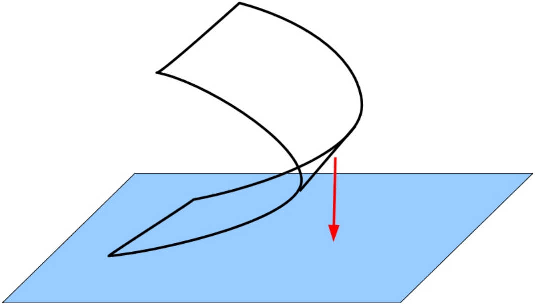


$$\text{Longueur du "cercle"} = 2\pi r \left(1 - \frac{K}{6} r^2 + o(r^2)\right)$$

$$\text{Aire du "disque"} = \pi r^2 \left(1 - \frac{K}{12} r^2 + o(r^2)\right)$$

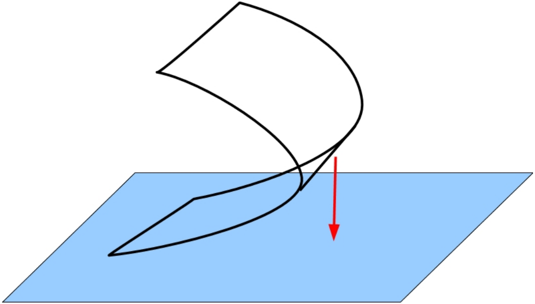
Remarque : $K < 0 \implies A < \frac{1}{4\pi} L^2 \qquad K > 0 \implies A > \frac{1}{4\pi} L^2$

On peut "appliquer" un cyclindre sur un plan : ils sont donc isométriques.



Cartes géographiques

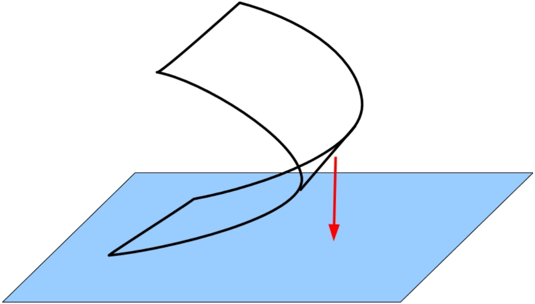
On peut "appliquer" un cyclindre sur un plan : ils sont donc isométriques.



Le théorème de Gauss montre qu'une isométrie doit conserver la courbure.

Cartes géographiques

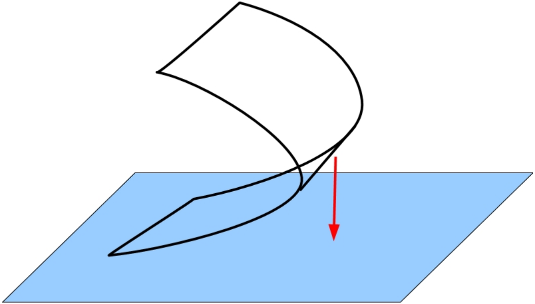
On peut "appliquer" un cyclindre sur un plan : ils sont donc isométriques.



Le théorème de Gauss montre qu'une isométrie doit conserver la courbure.
Courbure du plan $= 0$.

Cartes géographiques

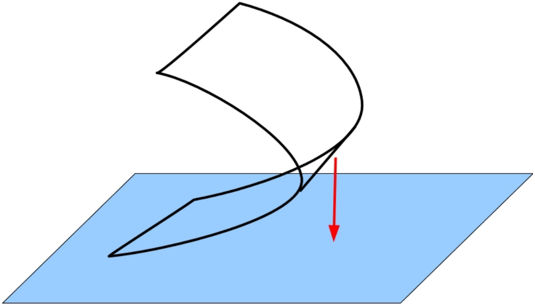
On peut "appliquer" un cyclindre sur un plan : ils sont donc isométriques.



Le théorème de Gauss montre qu'une isométrie doit conserver la courbure.
Courbure du plan $= 0$.
Courbure de la sphère > 0

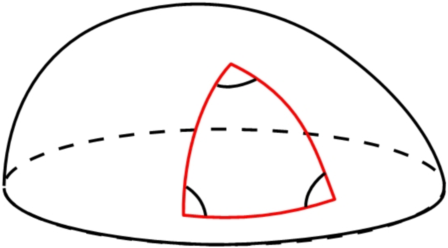
Cartes géographiques

On peut "appliquer" un cyclindre sur un plan : ils sont donc isométriques.



Le théorème de Gauss montre qu'une isométrie doit conserver la courbure.
Courbure du plan $= 0$.
Courbure de la sphère > 0
Il n'existe pas de représentation cartographique "idéale" de la terre.

Aire d'un triangle géodésique



Formule de Gauss

$$\alpha + \beta + \gamma = \pi + \int_T K d\sigma$$

Plan de l'exposé

Thèse d'habilitation, 1854

«Sur les hypothèses qui servent de fondement à la géométrie»

Bernhard Riemann (1826 -1866)

Thèse d'habilitation, 1854

«Sur les hypothèses qui servent de fondement à la géométrie»

Il introduit (entre autres !) les notions de

- Métrique riemannienne

Thèse d'habilitation, 1854

«Sur les hypothèses qui servent de fondement à la géométrie»

Il introduit (entre autres !) les notions de

- Métrique riemannienne
- Variété riemannienne

Métrique riemannienne

Métrique Riemannienne

Soit $\mathcal{E}$ un plan affine. Soit Ω un domaine du plan affine. Une métrique riemannienne sur Ω est la donnée, pour chaque point A de $\mathcal{E}$ d'une norme euclidienne $\|.\|_A$.

Métrique riemannienne

Métrique Riemannienne

Soit $\mathcal{E}$ un plan affine. Soit Ω un domaine du plan affine. Une métrique riemannienne sur Ω est la donnée, pour chaque point A de $\mathcal{E}$ d'une norme euclidienne $\|.\|_A$.

- Lorsque l'on calcule la norme d'un vecteur, il faut préciser à point de Ω on lie ce vecteur. Celui-ci n'est plus libre comme en géométrie affine.

Métrique Riemannienne

Soit $\mathcal{E}$ un plan affine. Soit Ω un domaine du plan affine. Une métrique riemannienne sur Ω est la donnée, pour chaque point A de $\mathcal{E}$ d'une norme euclidienne $\|.\|_A$.

- Lorsque l'on calcule la norme d'un vecteur, il faut préciser à point de Ω on lie ce vecteur. Celui-ci n'est plus libre comme en géométrie affine.
- Longueur d'une courbe : $L = \int_a^b \left\| \overrightarrow{\Gamma'(t)} \right\|_{\Gamma(t)} \mathrm{d}t$

Métrique riemannienne

Métrique Riemannienne

Soit $\mathcal{E}$ un plan affine. Soit Ω un domaine du plan affine. Une métrique riemannienne sur Ω est la donnée, pour chaque point A de $\mathcal{E}$ d'une norme euclidienne $\|.\|_A$.

- Lorsque l'on calcule la norme d'un vecteur, il faut préciser à point de Ω on lie ce vecteur. Celui-ci n'est plus libre comme en géométrie affine.
- Longueur d'une courbe : $L = \int_a^b \left\| \overrightarrow{\Gamma'(t)} \right\|_{\Gamma(t)} \mathrm{d}t$
- L'ensemble des vecteurs "liés" au point A constituent le plan tangent à Ω en A

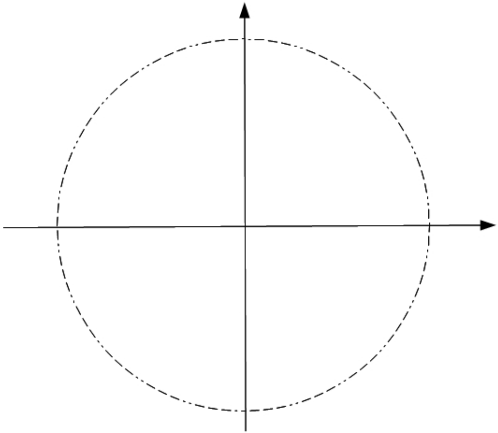
Métrique riemannienne

Métrique Riemannienne

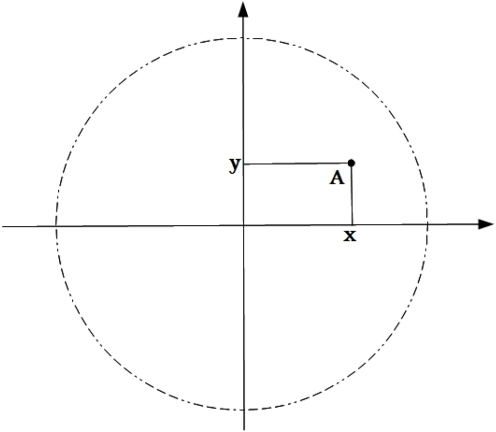
Soit $\mathcal{E}$ un plan affine. Soit Ω un domaine du plan affine. Une métrique riemannienne sur Ω est la donnée, pour chaque point A de $\mathcal{E}$ d'une norme euclidienne $\|.\|_A$.

- Lorsque l'on calcule la norme d'un vecteur, il faut préciser à point de Ω on lie ce vecteur. Celui-ci n'est plus libre comme en géométrie affine.
- Longueur d'une courbe : $L = \int_a^b \left\| \overrightarrow{\Gamma'(t)} \right\|_{\Gamma(t)} \mathrm{d}t$
- L'ensemble des vecteurs "liés" au point A constituent le plan tangent à Ω en A
- Courbure en A : $K = \lim_{r \to 0} \frac{6}{r^2} \left(1 - \frac{L(r)}{2\pi r}\right)$

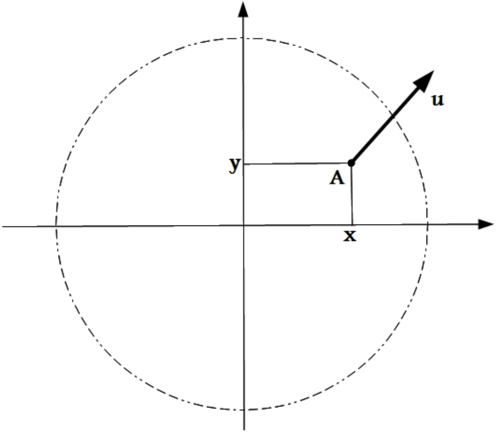
Exemple : le disque de Poincaré



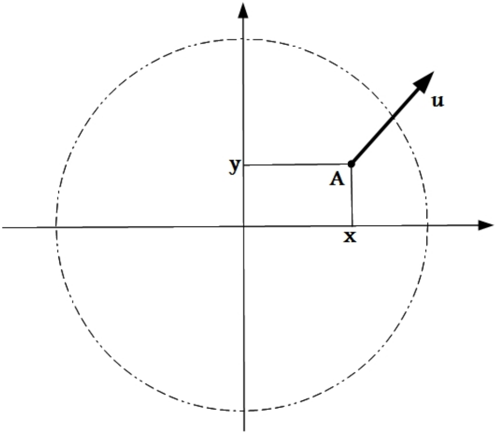
Exemple : le disque de Poincaré



Exemple : le disque de Poincaré

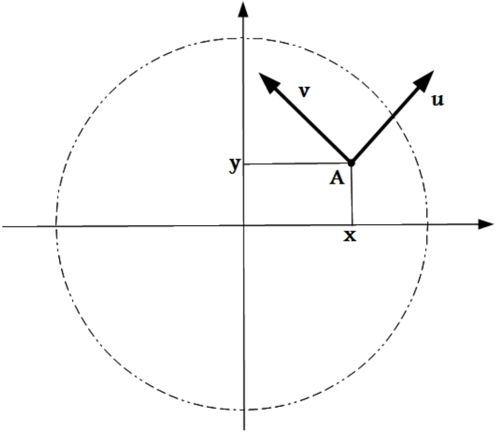


Exemple : le disque de Poincaré



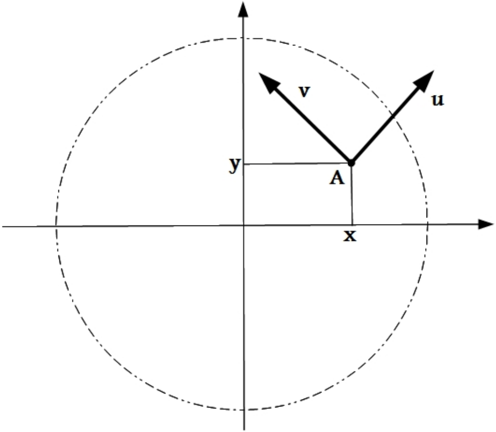
$$\|\vec{u}\|_A = 2\frac{\|\vec{u}\|}{1-(x^2+y^2)}$$

Exemple : le disque de Poincaré

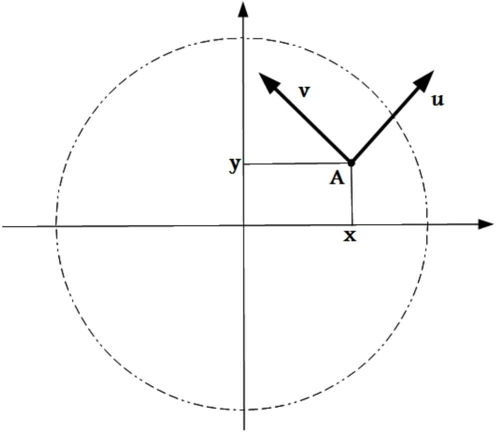


$$\|\vec{u}\|_A = 2\frac{\|\vec{u}\|}{1-(x^2+y^2)}$$

Exemple : le disque de Poincaré



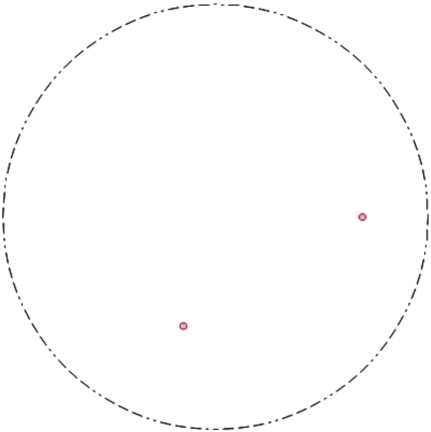
$$< \vec{u}, \vec{v} >_A = 4 \frac{< \vec{u}, \vec{v} >}{[1 - (x^2 + y^2)]^2}$$



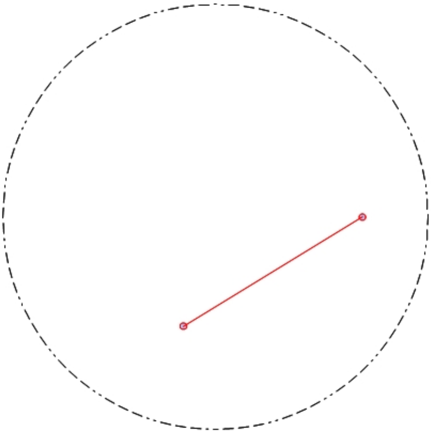
$$< \vec{u}, \vec{v} >_A = 4 \frac{< \vec{u}, \vec{v} >}{[1 - (x^2 + y^2)]^2}$$

Orthogonalité pour la métrique euclidienne standard = orthogonalité pour la métrique de Poincaré (représentation conforme)

Géodésiques du disque de Poincaré

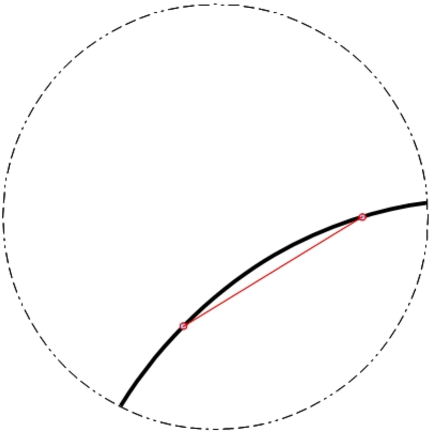


Géodésiques du disque de Poincaré



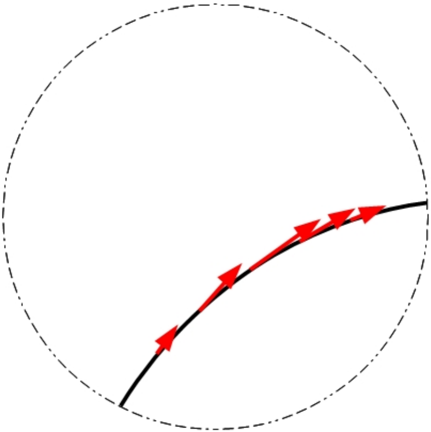
Ceci n'est pas le chemin le plus court !

Géodésiques du disque de Poincaré



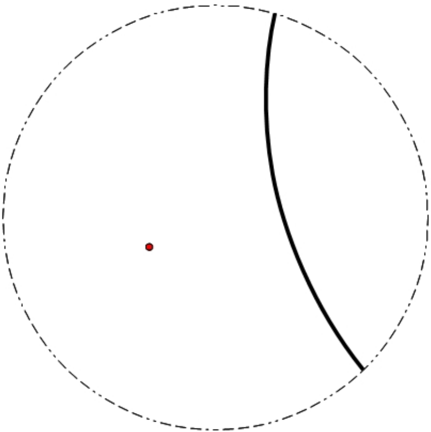
Géodésiques = arcs de cercle "tombant" orthogonalement (du point de vue euclidien) sur le cercle de l'infini

Géodésiques du disque de Poincaré



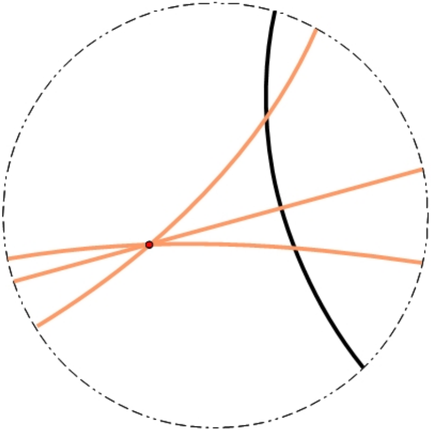
Parcours à vitesse constante

Géodésiques du disque de Poincaré



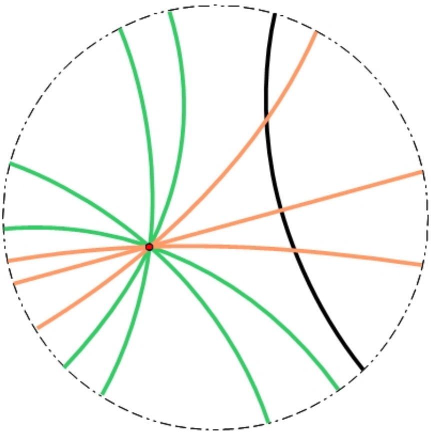
Partage des droites

Géodésiques du disque de Poincaré



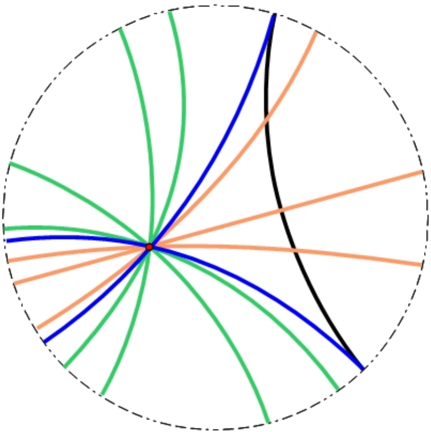
Partage des droites

Géodésiques du disque de Poincaré



Partage des droites

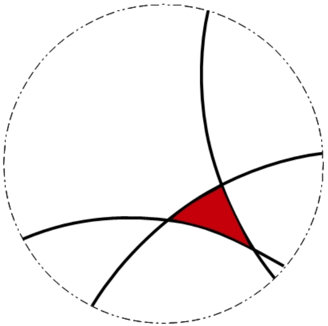
Géodésiques du disque de Poincaré



Partage des droites

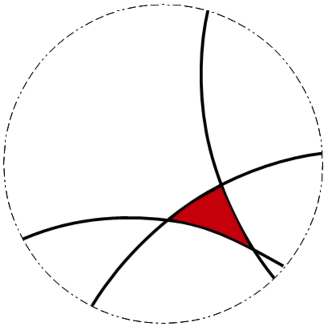
Courbure et triangle géodésique

Courbure $K = -1$



Courbure et triangle géodésique

Courbure $K = -1$

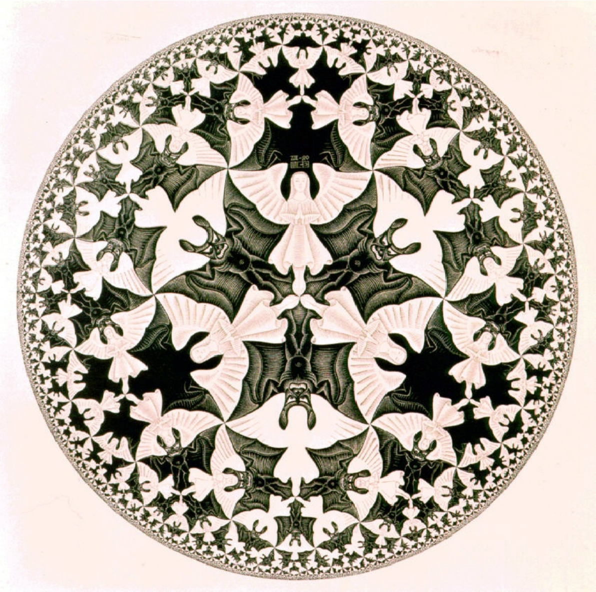


Formule de Gauss :

$$\alpha + \beta + \gamma = \pi + \int_T K \mathrm{d}\sigma = \pi - A(T)$$

$$A(T) = \pi - (\alpha + \beta + \gamma)$$

Maurits Cornelis Escher (1898-1972)



Variétés riemanniennes

- La notion de variété riemannienne permet de définir des espaces "abstraits", c'est-à-dire qui ne sont pas "vus" dans $\mathbb{R}^n$.

Variétés riemanniennes

- La notion de variété riemannienne permet de définir des espaces "abstraits", c'est-à-dire qui ne sont pas "vus" dans $\mathbb{R}^n$.
- Une variété riemannienne est un ensemble V (en fait un espace topologique) muni d'un "atlas" $\mathcal{A}$.

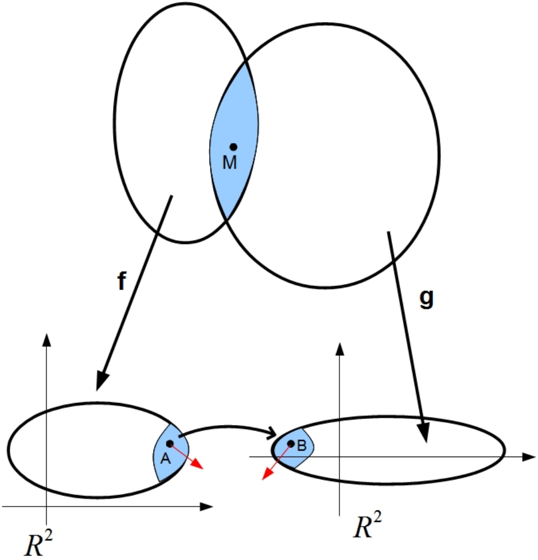
Variétés riemanniennes

- La notion de variété riemannienne permet de définir des espaces "abstraits", c'est-à-dire qui ne sont pas "vus" dans $\mathbb{R}^n$.
- Une variété riemannienne est un ensemble V (en fait un espace topologique) muni d'un "atlas" $\mathcal{A}$.
- Un atlas est un ensemble de cartes recouvrant V.

Variétés riemanniennes

- La notion de variété riemannienne permet de définir des espaces "abstraits", c'est-à-dire qui ne sont pas "vus" dans $\mathbb{R}^n$.
- Une variété riemannienne est un ensemble V (en fait un espace topologique) muni d'un "atlas" $\mathcal{A}$.
- Un atlas est un ensemble de cartes recouvrant V.
- Une carte est une application bijective (en fait un homéomorphisme) $f : U \to \Omega$, où U est un ouvert de V et Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$ muni d'une métrique riemannienne

Les cartes et les métriques doivent être "compatibles" :



Une métrique minkowskienne sur $\mathbb{R}^4$ (espace-temps) est une métrique de "signature" $(3, 1)$.
Exemple :

$$\|\vec{u}\|^2 = x^2 + y^2 + z^2 - c^2t^2$$

- La notion de variété riemannienne a fourni à Einstein le cadre idéal pour formaliser sa théorie ("théorie" au sens des physiciens !).
- C'est en fait une variante que doit utiliser Einstein, puisque c'est l'espace-temps qu'il formalise : la métrique riemannienne est remplacée par une métrique minkowskienne.
- Les fameux coefficients $g^{i,j}$ sont les paramètres de cette métrique.

Jean-Pierre Serre (1926 -)

Les lois de la physique, ce sont les lois que Dieu a choisies. Les mathématiques, ce sont les lois auxquelles Dieu a dû obéir.

Jean-Pierre Serre (1926 -)

Les lois de la physique, ce sont les lois que Dieu a choisies. Les mathématiques, ce sont les lois auxquelles Dieu a dû obéir.

Georg Cantor (1845 - 1918)

L'essence des mathématiques, c'est la liberté.

Jean-Pierre Serre (1926 -)

Les lois de la physique, ce sont les lois que Dieu a choisies. Les mathématiques, ce sont les lois auxquelles Dieu a dû obéir.

Georg Cantor (1845 - 1918)

L'essence des mathématiques, c'est la liberté.

Alain Connes (1947 -)

La seule autorité en mathématiques, c'est soi-même.

Bibliographie

- *Les élémens de géométrie d'Euclide*, F. Peyrard, 1804, F. Louis (http://gallica.bnf.fr/ark:/12148/bpt6k110982q ou http://remacle.org/bloodwolf/erudits/euclide/table.htm)
- *Les géométries non euclidiennes*, Daniel Perrin (http://www.math.u-psud.fr/~perrin/Conferences/Romilly.pdf)
- *Les géométries non euclidiennes*, Jean-Luc Chabert, Repères - Irem, n°1, octobre 1990 (http://www.univ-irem.fr/reperes/articles/1_article_4.pdf)
- *Les mathématiques et le réel*, Maurice Thirion, Ellipses, 1999
- *Poincaré et son disque*, Etienne Ghys, dans *L'héritage scientifique de Poincaré*, Belin.
- *Dimensions*, Film d'animation de Aurélien Alvarez, Etienne Ghys et Jos Leys http://www.dimensions-math.org/Dim_fr.htm

Conclusion en poésie

Guillevic (1907 - 1997)

Parallèles

On va, l'espace est grand
On se côtoie,
On veut parler.
Mais ce qu'on se raconte,
L'autre le sait déjà,
Car depuis l'origine
Effacée, oubliée,
C'est la même aventure.
En rêve on se rencontre,
On s'aime, on se complète.
On ne va plus loin
Que dans l'autre et dans soi.

Eugéne Guillevic, Euclidiennes, 1967