PSI

ESPACES VECTORIELS PRÉHILBERTIENS RÉELS

Dans ce chapitre E est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$, a priori de dimension quelconque.
Mais certains paragraphes ne sont valables qu'en dimension finie.

I - PRODUIT SCALAIRE

1) Définition et propriétés du produit scalaire

déf. 1

Soit une application $< \mid > : E \times E \longrightarrow \mathbb{R}, \quad (x,y) \longmapsto < x \mid y >$.

- *On dit que* $< \mid >$ *est une forme bilinéaire sur* E *lorsque c'est une application bilinéaire de* $E \times E$ *dans* $\mathbb{R}$.
  càd $\forall y \in E, \quad (x \longmapsto < x \mid y >)$ *est une application linéaire sur* E
  et $\forall x \in E, \quad (y \longmapsto < x \mid y >)$ *est une application linéaire sur* E
- *On dit que* $< \mid >$ *est symétrique lorsque* $\forall (x,y) \in E, \quad < x \mid y > = < y \mid x >$
- *On dit que* $< \mid >$ *est définie positive lorsque* $\forall x \in E, \quad < x \mid x > \geqslant 0$ *et* $\big(< x \mid x > = 0 \implies x = 0_E \big)$

déf. 2

On appelle produit scalaire sur E *toute forme bilinéaire symétrique définie positive sur* E.

On note $< x \mid y >, \quad (x|y), \quad < x, y >, \quad (x,y), \quad x.y, \quad \varphi(x,y)$ *entre autres.*

$(E, < \mid >)$ *s'appelle un espace vectoriel* *<u>préhilbertien réel</u>.*
Lorsque E *est de dimension finie,* $(E, < \mid >)$ *s'appelle un espace vectoriel* *<u>euclidien</u>.*

Une application $< \mid > : E \times E \longrightarrow \mathbb{R}$ est donc un produit scalaire lorsque :

a) $\forall (x,y) \in E^2, \quad < x \mid y > = < y \mid x >$.
b) $\forall (x,y,z) \in E^3, \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}, \quad < x \mid \lambda y + z > = \lambda < x \mid y > + < x \mid z >$.
La linéarité par rapport à la première variable est alors obtenue grâce à la symétrie.
c) $\forall x \in E, \quad < x \mid x > \geqslant 0$ et $< x \mid x > = 0 \implies x = 0_E$.

th. 1

Soit $(E, < \mid >)$ un espace vectoriel préhilbertien réel. On note : $\forall x \in E : \quad ||x|| = \sqrt{< x \mid x >}$

Soient $(x,y) \in E^2$ et $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$.

a) $||\lambda x + \mu y||^2 = \lambda^2 ||x||^2 + 2\lambda\mu < x \mid y > + \mu^2 ||y||^2$.

b) $||x+y||^2 = ||x||^2 + 2 < x \mid y > + ||y||^2$ et $||x-y||^2 = ||x||^2 - 2 < x \mid y > + ||y||^2$.

c) Identité du parallélogramme : $||x+y||^2 + ||x-y||^2 = 2(||x||^2 + ||y||^2)$.

d) Identité de polarisation : $< x \mid y > = \dfrac{1}{2}\,(||x+y||^2 - ||x||^2 - ||y||^2) = \dfrac{1}{4}\,(||x+y||^2 - ||x-y||^2)$.

e) Théorème de Pythagore : $||x+y||^2 = ||x||^2 + ||y||^2 \iff < x \mid y > = 0$.

th. 2

Soit $(E, < \mid >)$ un espace vectoriel préhilbertien réel.

Inégalité de Cauchy - Schwarz : $\forall (x,y) \in E \times E, \quad | < x \mid y > | \leqslant ||x|| \, ||y||$

Cas d'égalité : $| < x \mid y > | = ||x|| \, ||y||$ si et seulement si x et y sont colinéaires.

th. 3

Soit $(E, < \mid >)$ un espace vectoriel préhilbertien réel.

L'application $|| \; ||$ est une norme sur E appelée norme euclidienne associée à $< \mid >$.

Une norme vérifie les trois axiomes suivants :

a) $\forall x \in E, \quad ||x|| \geqslant 0$ et $||x|| = 0 \iff x = 0_E$.

b) Homogénéité : $\forall x \in E, \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}, \quad ||\lambda . x|| = |\lambda| \, ||x||$.

c) Inégalité triangulaire : $\forall (x,y) \in E^2, \quad ||x+y|| \leqslant ||x|| + ||y||$.

De plus $||x+y|| = ||x|| + ||y||$ si et seulement si x et y sont colinéaires de même sens.

2) Exemples fondamentaux de produits scalaires

a) $E=\mathbb{R}^n$ muni du produit scalaire usuel : $\forall\,(X,Y)\in E^2,\quad <X\mid Y>=\displaystyle\sum_{i=1}^{n}x_iy_i$

b) $E=M_n(\mathbb{R})$ muni du produit scalaire : $\forall\,(A,B)\in E^2,\quad <A\mid B>=\mathrm{Tr}(A^TB)$.
Remarque : C'est aussi le produit scalaire usuel sur $\mathbb{R}^{(n^2)}$

c) $E=C([a,b],\mathbb{R}),\quad a<b,$ et : $\forall\,(f,g)\in E^2,\quad <f\mid g>=\displaystyle\int_a^b f(x)g(x)\,dx$

d) $E=\mathbb{R}[X],\quad a<b,$ et : $\forall\,(P,Q)\in E^2,\quad <P\mid Q>=\displaystyle\int_a^b P(x)Q(x)\,dx$

e) L'espace vectoriel des fonctions **continues de carré intégrable** sur I, intervalle de $\mathbb{R}$, non réduit à un point :

$$E=L_c^2(I,\mathbb{R})=\{f\in C^0(I,\mathbb{R})\ /\ |f|^2 \text{ est intégrable sur } I\}$$

L'application : $E\times E\longrightarrow\mathbb{R},\quad (f,g)\longmapsto <f\mid g>=\displaystyle\int_I fg$ définit un produit scalaire sur E.
La norme associée, notée N_2, est la norme de la convergence en moyenne quadratique sur I.

3) En dimension finie : Expression d'une forme linéaire

Dans ce paragraphe, $(E,<\ \mid\ >)$ est un espace vectoriel euclidien de dimension finie $n\geqslant 1$.

th. Soit f une forme linéaire sur E càd une application linéaire de E dans $\mathbb{R}$.
Alors il existe un unique vecteur a de E tel que : $\forall\,x\in E,\quad f(x)=<a\mid x>$

Démonstration :

a) Pour $x\in E$, on définit $\delta_x:E\longrightarrow\mathbb{R},\quad y\longmapsto <x\mid y>$.
Par linéarité à droite du produit scalaire, δ_x appartient à $\mathcal{L}(E,\mathbb{R})$.

b) On considère alors $\delta:E\longrightarrow\mathcal{L}(E,\mathbb{R}),\quad x\longmapsto\delta_x$. Montrons que δ est un isomorphisme d'espaces vectoriels :

- Prenons $(x,x')\in E^2$ et $\lambda\in\mathbb{R}$. Montrons que $\delta(x+\lambda x')=\delta(x)+\lambda\delta(x')$.

$$\begin{aligned}\forall\,y\in E,\quad \delta(x+\lambda x')(y)&=\delta_{x+\lambda x'}(y)\\&=<x+\lambda x'\mid y>\\&=<x\mid y>+\lambda<x'\mid y> \quad\text{par linéarité à gauche du produit scalaire}\\&=\delta_x(y)+\lambda\delta_{x'}(y)\\&=\delta(x)(y)+\lambda\delta(x')(y)\\&=(\delta(x)+\lambda\delta(x'))(y)\end{aligned}$$

  Ceci prouve donc que $\forall\,(x,x')\in E^2,\quad\forall\,\lambda\in\mathbb{R},\quad\delta(x+\lambda x')=\delta(x)+\lambda\delta(x')$ et donc que δ est une application linéaire.

- Montrons que $\mathrm{Ker}(\delta)=\{0_E\}$. Soit $x\in E$.

$$x\in\mathrm{Ker}(\delta)\iff\delta_x=0_{\mathcal{L}(E,\mathbb{R})}\iff\forall\,y\in E,\quad\delta_x(y)=0\iff\forall\,y\in E,\quad <x\mid y>=0$$

  En particulier, pour $y=x,\quad <x\mid x>=0$ donc $||x||^2=0$ et ainsi $x=0_E$. Donc δ est injective.

- De plus, $\dim(\mathcal{L}(E,\mathbb{R}))=\dim(E)\times\dim(\mathbb{R})=\dim(E)$. Donc δ est un isomorphisme d'espaces vectoriels.

c) Soit f une forme linéaire sur E. On a donc $f\in\mathcal{L}(E,\mathbb{R})$. Par bijectivité de δ :

$$\exists\,!a\in E\ /\ f=\delta_a\quad\text{ie}\quad\exists\,!a\in E\ /\ \forall\,x\in E,\quad f(x)=\delta_a(x)=<a\mid x>$$

cor. *Soient $E=\mathbb{R}^n$ muni du produit scalaire usuel et f une forme linéaire sur $\mathbb{R}^n$.*
Il existe donc un unique $A=(a_1,a_2,\ldots,a_n)\in\mathbb{R}^n$ tel que

$$\forall\,X=(x_1,x_2,\ldots,x_n)\in\mathbb{R}^n,\quad f(x_1,x_2,...,x_n)=<A\mid X>=\sum_{i=1}^{n}x_ia_i.$$

Si $A\neq 0_{\mathbb{R}^n}$, l'hyperplan $H=\mathrm{Ker}\,f$ a pour équation $<A\mid X>=0$. A est alors un vecteur othogonal à H.

II - ORTHOGONALITÉ

1) *Familles orthogonales ou orthonormales*

Soit $(E, < \mid >)$ un espace vectoriel préhilbertien réel et $|| \; ||$ la norme euclidienne associée à $< \mid >$.

déf.

- *Deux vecteurs x et y sont orthogonaux lorsque* $< x \mid y >= 0$.
- *Un vecteur x est normé ou unitaire lorsque* $||x|| = 1$.
- *Une famille* $(x_i)_{i \in I}$ *de vecteurs de E est orthogonale lorsque* $\forall (i,j) \in I^2, \quad (i \neq j \implies < x_i \mid x_j >= 0)$.
- *Une famille* $(x_i)_{i \in I}$ *de vecteurs de E est orthonormale (ou orthonormée) lorsqu'elle est orthogonale et tous ses vecteurs sont normés*

  donc lorsque $\forall (i,j) \in I^2, \quad < x_i \mid x_j >= \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & si \quad i = j \\ 0 & sinon \end{cases}$.

prop.

Si $(x_i)_{i \in I}$ est une famille orthogonale de vecteurs tous non nuls de E

alors la famille $\left(\dfrac{x_i}{||x_i||} \right)_{i \in I}$ est orthonormale

th.

Si $x_1, x_2, \ldots, x_p$ sont p vecteurs de E non nuls et deux à deux orthogonaux

alors ils forment une famille libre

2) *Bases orthonormales (ou orthonormées)*

Dans ce paragraphe, $(E, < \mid >)$ est un espace vectoriel euclidien de dimension finie $n \geqslant 1$.

prop. 1

Soit $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \ldots, e_n)$ une base orthonormale de E.

Si $x = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i e_i$ et $y = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} y_i e_i$ sont deux vecteurs de E

alors en notant $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$, respectivement $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$

le vecteur colonne représentant x (resp. y) dans la base $\mathcal{B}$, on a

$$< x \mid y >= X^T Y = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i \quad \text{et} \quad ||x|| = \sqrt{X^T X} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2} \quad \text{et} \quad x = \sum_{i=1}^{n} < e_i \mid x > .e_i$$

prop. 2

Soit u un endomorphisme de E, $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \ldots, e_n)$ une base orthonormale de E et A la matrice de u dans $\mathcal{B}$.

Alors, en notant $A = (a_{ij})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$, on a $\forall (i,j) \in [\![1, n]\!]^2, \quad a_{ij} =< e_i \mid u(e_j) >$

th. 1

Si $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n$ sont n vecteurs de E, unitaires et deux à deux orthogonaux

alors ils forment une base de E

Démonstration :
Par hypothèse, ces n vecteurs sont unitaires donc non nuls, et deux à deux orthogonaux.
D'après **II. 1) th.**, ces n vecteurs forment donc une famille libre de E.
E étant de dimension n, ces n vecteurs forment une base de E.

th. 2

Méthode d'orthonormalisation de Schmidt :

Si $(e_1, e_2, \ldots, e_n)$ est une base de E, il existe une base orthonormale $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n)$ de E telle que : $\forall k \in [\![1, n]\!], \quad Vect(e_1, e_2, \ldots, e_k) = Vect(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_k)$

Tout espace vectoriel euclidien de dimension $n \geqslant 1$ admet une base orthonormale directe.

3) Sous espaces vectoriels orthogonaux

Soit $(E, < \mid >)$ un espace vectoriel préhilbertien réel et $|| \ ||$ la norme euclidienne associée à $< \mid >$.

déf. 1 *On dit que deux sous-espaces vectoriels de E, F et G sont orthogonaux lorsque :*
$\forall x \in F, \quad \forall y \in G, \quad < x \mid y >= 0.$ *On note* $F \perp G$.

prop.
- Si F et G sont de dimensions finies et $(f_i)_{i \in [\![1,p]\!]}$ est une base de F et $(g_j)_{j \in [\![1,q]\!]}$ une base de G alors $F \perp G \iff \forall (i,j) \in [\![1,p]\!] \times [\![1,q]\!], \quad < f_i \mid g_j >= 0$
- Si F_1, F_2, ..., F_p sont p sous-espaces vectoriels de E deux à deux orthogonaux alors la somme $F_1 \oplus F_2 \oplus \cdots \oplus F_p$ est directe et s'appelle la somme directe orthogonale des F_i

déf. 2 *On dit que deux sous-espaces vectoriels de E, F et G sont supplémentaires orthogonaux lorsque*
$F \oplus G = E$ *et* $F \perp G$.

On dispose alors de deux projections orthogonales et de deux symétries orthogonales.

4) Orthogonal d'un sous-espace vectoriel

Soit $(E, < \mid >)$ un espace vectoriel préhilbertien réel et $|| \ ||$ la norme euclidienne associée à $< \mid >$.

déf. *On appelle orthogonal d'un sous-espace vectoriel F de E l'ensemble*
$F^\circ = F^\perp = \{x \in E \ / \ \forall y \in F, \quad < y \mid x >= 0\}$

prop. 1
- $F^\perp$ est un sous-espace vectoriel de E.
- $E^\perp = \{0_E\}$ et $\{0_E\}^\perp = E$.
- $F \cap F^\perp = \{0_E\}$. Donc $F \oplus F^\perp$ est une somme directe orthogonale.
  Mais attention, **cette somme ne vaut pas toujours** E.
- $F \subset F^{\perp\perp}$. Mais il n'y a pas forcément égalité.

Démonstration :

a) Montrons que $F^\perp$ est un sous-espace vectoriel de E.
- $0_E \in F^\perp$ puisque $\forall y \in F, \quad < y \mid 0_E >= 0$.
- Montrons que $F^\perp$ est stable par combinaison linéaire.
  Prenons $(x, x') \in (F^\perp)^2$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. On a donc $\forall y \in F, \quad < x \mid y >=< x' \mid y >= 0$. Donc

$$\forall y \in F, \quad < \lambda x + x' \mid y >= \lambda < x \mid y > + < x' \mid y >= 0$$

  Donc $\lambda x + x' \in F^\perp$ et $F^\perp$ est stable par combinaison linéaire.
- Conclusion : $F^\perp$ est un sous-espace vectoriel de E.

b)
- Si un vecteur x est dans $E^\perp$ alors il est orthogonal à tout vecteur de E donc en particulier à lui-même.
  Donc $||x||^2 =< x \mid x >= 0$ et donc $x = 0_E$. Donc $E^\perp = \{0_E\}$
- On a : $\forall y \in E, \quad < y \mid 0_E >= 0$ donc $\forall y \in E, \quad y \in \{0_E\}^\perp$. Donc $\{0_E\}^\perp = E$.

c) Si un vecteur x appartient à $F \cap F^\perp$ alors il est dans F et orthogonal à tout vecteur de F donc en particulier à lui-même.
Donc $F \cap F^\perp = \{0_E\}$.

d) Par définition de $F^{\perp\perp} = \left(F^\perp\right)^\perp$:
$\forall x \in F, \quad \forall y \in F^\perp, \quad < x \mid y >= 0$ donc $\forall x \in F, \quad x \in \left(F^\perp\right)^\perp$. Donc $F \subset F^{\perp\perp}$.

prop. 2
Si H est de dimension finie et $(h_1, h_2, \ldots, h_p)$ est une base de H
alors $H^\perp = \{x \in E \ / \ \forall i \in [\![1,p]\!], \quad < h_i \mid x >= 0\}$

5) Projection orthogonale sur un sous-espace vectoriel de dimension finie

Dans ce paragraphe, E est un espace préhilbertien réel de dimension quelconque et
F est un sous-espace vectoriel **de dimension finie** de E.

th. 1

a) **Si** F est un sous espace de dimension finie de E **alors** $F \oplus F^{\perp} = E$ et $F = F^{\perp\perp}$.
On peut donc définir p_F la projection orthogonale sur F.

b) **Si** $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_p)$ est une base orthonormale de F **alors** $\forall\, x \in E, \quad p_F(x) = \sum_{j=1}^{p} < \varepsilon_j \mid x > .\varepsilon_j$.

déf.

Distance à un sous-espace vectoriel : Soit F un sous-espace vectoriel de dimension finie de E et $x \in E$.
$\{||x-y|| \ / \ y \in F\}$ est une partie de $\mathbb{R}$, non vide (car $F \neq \emptyset$), et minorée par 0.
*Elle admet donc une borne inférieure appelée **distance de** x **à** F et notée $d(x,F)$.*

$$d(x,F) = \inf\{||x-y|| \ / \ y \in F\}$$

th. 2

Soit F un sous-espace vectoriel de dimension finie de E et $x \in E$.
On dispose de p_F la projection orthogonale sur F, puisque $F \oplus F^{\perp} = E$

a) $\exists!\ a \in F \ / \ d(x,F) = ||x-a||$ et $a = p_F(x)$. De plus : $d^2(x,F) = ||x-a||^2 = ||x||^2 - ||a||^2$

b) *Inégalité de Bessel :* $||p_F(x)|| \leqslant ||x||$

th. 3

Distance d'un vecteur à un hyperplan dans $E = \mathbb{R}^n$ muni du produit scalaire usuel
et de la base canonique $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$.

Soit $a_1, a_2, \ldots, a_n$, n réels non tous nuls et H l'hyperplan de E d'équation dans $\mathcal{B}$: $a_1x_1 + \cdots + a_nx_n = 0$

Soit $M = \sum_{i=1}^{n} c_i e_i = \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}$ un vecteur de E. Alors $d(M,H) = \dfrac{|a_1c_1 + \cdots + a_nc_n|}{\sqrt{a_1^2 + \cdots + a_n^2}}$

III - ISOMÉTRIES VECTORIELLES OU AUTOMORPHISMES ORTHOGONAUX

Dans ce paragraphe, $(E, < \mid >)$ est un espace vectoriel euclidien de dimension finie $n \geqslant 1$.

1) *Définitions et propriétés*

th. 1

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. Les assertions suivantes sont équivalentes :

a) u conserve la norme : $\forall x \in E, \quad ||u(x)|| = ||x||$.
b) u conserve le produit scalaire : $\forall (x, y) \in E^2, \quad < u(x) \mid u(y) >=< x \mid y >$.
c) L'image d'une base orthonormale par u est une base orthonormale .

Lorsque u vérifie l'une des ces assertions, u est bijective
et on dit que u est une isométrie vectorielle ou un automorphisme orthogonal.
On note $\mathcal{O}(E)$ l'ensemble des isométries vectorielles.

th. 2

La composée de deux isométries vectorielles est une isométrie vectorielle.
L'application linéaire réciproque d'une isométrie vectorielle est une isométrie vectorielle.
Le déterminant d'une isométrie vectorielle vaut 1 ou -1.

L'ensemble $\{u \in O(E) \ / \ det(u) = 1\}$ est appelé groupe spécial orthogonal ou groupe des rotations,
et est noté $\mathcal{SO}(E)$ ou $\mathcal{O}_+(E)$.

th. 3

Soit u une isométrie vectorielle.
a) Si λ est une valeur propre réelle de u **alors** $\lambda \in \{1, -1\}$. Donc $Sp_{\mathbb{R}}(u) \subset \{-1, 1\}$.
b) Les sous espaces vectoriels $\operatorname{Ker}(u - Id_E)$ et $\operatorname{Ker}(u + Id_E)$ sont orthogonaux.

th. 4

Soient u une isométrie vectorielle et F un sous espace vectoriel de E.
a) Si F stable par u **alors** $F^\perp$ est également stable par u.
b) Dans ce cas, les endomorphismes induits par u sur F et $F^\perp$ sont des isométries vectorielles.

2) *Matrices orthogonales*

déf.

Une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ *est orthogonale lorsque* A *est inversible et* $A^{-1} = A^T$
Cela équivaut à $A \times A^T = I_n$ *ou encore à* $A^T \times A = I_n$
On note $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ *l'ensemble des matrices orthogonales.*

th. 1

Soit $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \ldots, e_n)$ une base orthonormale de E fixée.
Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $u \in \mathcal{L}(E)$ tel que $A = M_{\mathcal{B}}(\mathbf{u})$.

Alors u est une isométrie vectorielle si et seulement si A est une matrice orthogonale.
C'est- à-dire : $u \in \mathcal{O}(E) \iff A \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$

th. 2

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Les propriétés suivantes sont équivalentes :

a) A est orthogonale.
b) A^T est orthogonale.
c) Les vecteurs colonnes de A forment une base orthonormale de $\mathcal{M}_{n1}(\mathbb{R})$ pour le produit scalaire usuel.
d) Les vecteurs lignes de A forment une base orthonormale de $\mathcal{M}_{1n}(\mathbb{R})$ pour le produit scalaire usuel.
e) A est la matrice de passage entre deux bases orthonomales de $\mathbb{R}^n$.

th. 3

Le produit de deux matrices orthogonales est une matrice orthogonale.
L'inverse d'une matrice orthogonale est une matrice orthogonale.
Le déterminant d'une matrice orthogonale vaut 1 ou -1.

$\mathcal{SO}_n(\mathbb{R}) = \{A \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R}) \ / \ \det(A) = 1\}$ s'appelle le groupe spécial orthogonal.

3) ***Symétries orthogonales***

Soit F est un sous espace de E. Comme E, donc F, est de dimension finie, on sait que $E = F \oplus F^{\perp}$.
La symétrie s par rapport à F parallèlement à $F^{\perp}$ est appelée symétrie orthogonale par rapport à F.
La symétrie s' par rapport $F^{\perp}$ parallèlement à F est appelée symétrie orthogonale par rapport à $F^{\perp}$.
Rappelons que si $x = y + z \in F \oplus F^{\perp}$ alors $s(x) = y - z$ et $s'(x) = -y + z = -s(x)$.

prop. 1 | **Si** s est une symétrie orthogonale **alors** $s \in \mathcal{O}(E)$.

prop. 2 | Soit s une symétrie orthogonale par rapport à un hyperplan H.
s s'appelle la <u>réflexion</u> par rapport à H.

Alors : $s(x) = x - 2 < x \mid \dfrac{a}{||a||} > . \dfrac{a}{||a||}$ où a est un vecteur non nul normal à H.

Soit s' la symétrie orthogonale par rapport à la droite $D = \mathbb{R}.a$ où $a \in E - \{0_E\}$.
s' s'appelle le <u>retournement</u> d'axe D.

Alors : $s'(x) = -s(x) = -x + 2 < x \mid \dfrac{a}{||a||} > . \dfrac{a}{||a||}$

IV - RÉDUCTION DES ENDOMORPHISMES SYMÉTRIQUES

Dans ce paragraphe, $(E, < \mid >)$ est un espace vectoriel euclidien de <u>dimension finie</u> $n \geqslant 1$.

1) ***Définition***

déf. | *$u \in \mathcal{L}(E)$ est un endomorphisme symétrique lorsque* $\forall (x,y) \in E^2, \quad < u(x) \mid y > = < x \mid u(y) >$
On notera $\mathcal{S}(E)$ *l'ensemble des endomorphismes symétriques.*

th. 1 | Soit $\mathcal{B}$ est une base orthonormale de E et $u \in \mathcal{L}(E)$.

Alors $u \in \mathcal{S}(E)$ si et seulement si $M_{\mathcal{B}}(\mathbf{u})$ est symétrique

On en déduit que $\mathcal{S}(E)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}(E)$ isomorphe à $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$. Donc $\dim(\mathcal{S}(E)) = \dfrac{n(n+1)}{2}$

th. 2 | Soit u un endomorphisme symétrique de E.

- Si F est un sous espace vectoriel de E stable par u alors $F^{\perp}$ est également stable par u et les endomorphismes induits par u sur F et $F^{\perp}$ sont symétriques.
- Si λ et μ sont deux valeurs propres <u>distinctes</u> de u alors $E_{\lambda}(u) \perp E_{\mu}(u)$.

Exemples : Les projecteurs orthogonaux et les symétries orthogonales sont des endomorphismes symétriques.

2) ***Théorème spectral***

th. 1 | Soit u un endomorphisme symétrique de l'espace vectoriel euclidien E. Alors

- Toute valeur propre de u est réelle. χ_u est donc scindé dans $\mathbb{R}$.
- Les sous espaces propres de u sont deux à deux orthogonaux.
- u est diagonalisable et admet une base orthonormée de vecteurs propres.
  On dit que « u est diagonalisable en base orthonormale ».

th. 2 | *Traduction matricielle* :
Soit $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$. A est donc une matrice symétrique réelle.

Alors « A est orthodiagonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ », c'est-à-dire : Il existe dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$,

D une matrice diagonale et P une matrice orthogonale telles que : $A = P\ D\ P^{-1} = P\ D\ P^T$

3) ***Exemples fondamentaux***

a) Diagonaliser dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$.

b) La matrice $A = \begin{pmatrix} 2\,\mathrm{i} & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ est une matrice symétrique de $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ mais n'est pas diagonalisable.

c) Si A est une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ alors $A^T A$ et AA^T sont diagonalisables dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

d) Soit A une matrice symétrique réelle de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
Elle est donc diagonalisable et on note $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ ses valeurs réelles comptées avec leur ordre de multiplicité.

On suppose : $\lambda_1 \leqslant \lambda_2 \leqslant \cdots \leqslant \lambda_n$ et on note $\mathcal{D} = \left\{ \dfrac{X^T A X}{X^T X} \;/\; X \in M_{n,1}(\mathbb{R}) - \{0\} \right\}$.

Montrer que : $\sup \mathcal{D} = \max\{\lambda_i \;/\; 1 \leqslant i \leqslant n\} = \lambda_1$ et $\inf \mathcal{D} = \min\{\lambda_i \;/\; 1 \leqslant i \leqslant n\} = \lambda_n$.

e) Soit A une matrice symétrique réelle de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
Elle est donc diagonalisable et on note $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ ses valeurs réelles comptées avec leur ordre de multiplicité.

On dit que A est positive lorsque $\forall i \in [\![1, n]\!], \quad \lambda_i \geqslant 0$.

i) Montrer que A est positive si et seulement si $\forall X \in \mathbb{R}^n, \quad X^T A X \geqslant 0$.

ii) On suppose que A est positive.
Montrer qu'il existe une matrice R de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $A = R^2$.

iii) On suppose que A est positive.
Montrer qu'il existe une matrice M de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $A = M^T M$.
Exprimer , pour $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, $X^T A X$ en fonction de M et X.