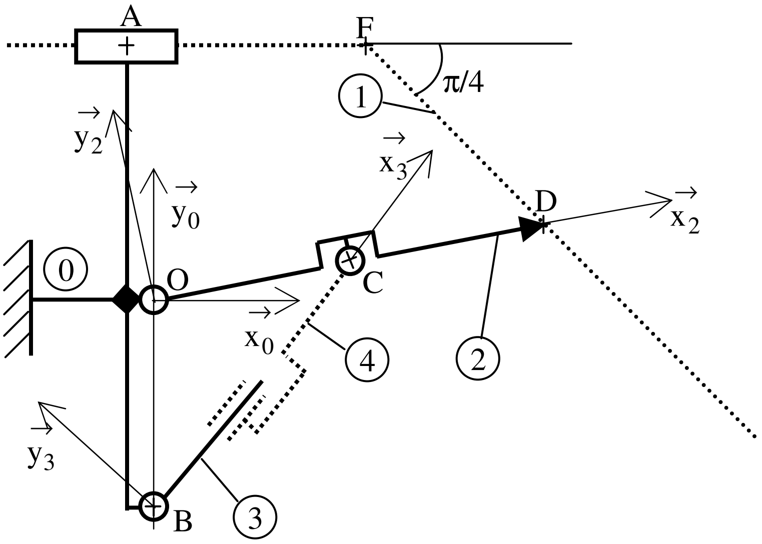
EXERCICE N°1 : Commande de table de rectifieuse (d'après école de l'aire 2000 MP)



Paramétrage :

$\overrightarrow{BO} = a\,\vec{y}_0$; $\overrightarrow{OC} = a\,\vec{x}_2$; $\overrightarrow{OD} = l\,\vec{x}_2$; $\overrightarrow{OA} = b\,\vec{y}_0 - c\,\vec{x}_0$; $\overrightarrow{AF} = x\,\vec{x}_0$

$\overrightarrow{BC} = \lambda\,\vec{x}_3$; $\alpha = (\vec{x}_0, \vec{x}_2)$; $\beta = (\vec{x}_0, \vec{x}_3)$

Description :

Les pièces **3** et **4** sont le corps et la tige du vérin hydraulique de commande du mécanisme.

3 et **2** sont en liaison pivot avec le bâti **0** ; **4** est en liaison pivot avec **2.**

1 est en liaison glissière avec le bâti **0** ; 2 est en liaison sphère plan avec 1 (représentée avec le symbole de la liaison ponctuelle car on fait l'hypothèse que le point de contact D reste sur l'axe $(O, \vec{x}_2)$)

4 se déplace par rapport à **3** avec une vitesse **v constante** : $\vec{V}(C,4/3) = v\,\vec{x}_3 = \dot{\lambda}\,\vec{x}_3$

QUESTIONS :

-1- Déterminer $\vec{V}(C,4/0)$; en fonction de v , β de ses dérivées et des paramètres géométriques.

Déterminer $\vec{V}(C,2/0)$ en fonction de $\dot{\alpha}$ et des paramètres géométriques.

En déduire deux relations scalaires

-2- Déterminer $\vec{\Gamma}(C,4/0)$ en fonction de v , β de ses dérivées et des paramètres géométriques

-3- Déterminer $\vec{V}(D,2/0)$ et $\vec{\Gamma}(D,2/0)$ en fonction de v , α et β de leurs dérivées et des paramètres géométriques.

-4- Déterminer $\dot{x}$ et $\ddot{x}$, vitesse et accélération de la table 1 de la rectifieuse en fonction de v , α et β de leurs dérivées et des

paramètres géométriques.

CORRIGE

-1- $\vec{V}(C,4/0)$ et $\vec{\Gamma}(C,4/0)$

$$\vec{V}(C,4/0)=\vec{V}(C,4/3)+\vec{V}(C,3/0)=v\,\vec{x}_3+\vec{V}(B,3/0)+\vec{CB}\wedge\vec{\Omega}(3/0)=v\,\vec{x}_3+\vec{0}+-\lambda\,\vec{x}_3\wedge\dot{\beta}\,\vec{z}$$

$$\vec{V}(C,4/0)=v\,\vec{x}_3+(-a\vec{x}_2-a\,\vec{y}_0)\wedge\dot{\beta}\,\vec{z}=v\,\vec{x}_3+\lambda\dot{\beta}\,\vec{y}_3\quad\textbf{(1)}$$

Autre expression :

$$\vec{V}(C,4/0)=\vec{V}(O,4/0)+\vec{CO}\wedge\vec{\Omega}(4/0)=\vec{0}+(-a\,\vec{x}_2)\wedge\dot{\alpha}\,\vec{z}=a\,\dot{\alpha}\,\vec{y}_2\quad\textbf{(2)}$$

$$\vec{\Gamma}(C,4/0)=a\,\ddot{\alpha}\,\vec{y}_2-a\,\dot{\alpha}^2\,\vec{x}_2$$

$$\vec{\Gamma}(C,4/0)=v\dot{\beta}\,\vec{y}_3+a\,\ddot{\beta}\,\vec{y}_2-a\dot{\beta}\dot{\alpha}\,\vec{x}_2-a\,\dot{\beta}^2\,\vec{x}_0$$

-2- $\vec{V}(D,2/0)$ et $\vec{\Gamma}(D,2/0)$

$$\vec{V}(D,2/0)=\vec{V}(O,2/0)+\vec{DO}\wedge\vec{\Omega}(2/0)=\vec{0}+(-l\,\vec{x}_2)\wedge\dot{\alpha}\,\vec{z}=l\dot{\alpha}\,\vec{y}_2\quad\Rightarrow\vec{\Gamma}(D,2/0)=l\,\ddot{\alpha}\,\vec{y}_2-l\,\dot{\alpha}^2\,\vec{x}_2$$

-3- $\dot{x}$ et $\ddot{x}$

$$\vec{V}(D,2/0)=\vec{V}(D,2/1)+\vec{V}(D,1/0)$$

$\vec{V}(D,2/1)$ est suivant $\vec{y}_1$; $\vec{V}(D,1/0)$ est suivant $\vec{x}_0$ $\Rightarrow l\dot{\alpha}\,\vec{y}_2=\lambda\,\vec{y}_1+\dot{x}\,\vec{x}_0$

$$l\dot{\alpha}\,\vec{y}_2=l\dot{\alpha}(\cos\alpha\,\vec{y}_0-\sin\alpha\,\vec{x}_0)\ ;\quad\lambda\,\vec{y}_1=\lambda(\cos\frac{\pi}{4}\vec{y}_0-\sin\frac{\pi}{4}\vec{x}_0)$$

Donc : $l\dot{\alpha}(\cos\alpha\,\vec{y}_0-\sin\alpha\,\vec{x}_0)=\lambda(\cos\frac{\pi}{4}\vec{y}_0-\sin\frac{\pi}{4}\vec{x}_0)+\dot{x}\,\vec{x}_0$, d'où :

$$\begin{cases}l\dot{\alpha}\sin\alpha=-\lambda\sin\frac{\pi}{4}+\dot{x}\\ l\dot{\alpha}\cos\alpha=\lambda\cos\frac{\pi}{4}\end{cases}\Rightarrow\lambda=\frac{2l\dot{\alpha}\cos\alpha}{\sqrt{2}}\ \text{et}\ \ \dot{x}=l\dot{\alpha}(\sin\alpha+\cos\alpha)$$

D'autre part d'après (1) = (2) $\Rightarrow a\,\dot{\alpha}\,\vec{y}_2=v\,\vec{x}_3+a\dot{\beta}\,\vec{y}_2-a\dot{\beta}\,\vec{x}_0$ autre méthode voire (*)

$$\vec{y}_2=-\sin\alpha\,\vec{x}_0+\cos\alpha\,\vec{y}_0\ ;\ \vec{x}_3=\cos\beta\,\vec{x}_0+\sin\beta\,\vec{y}_0$$

$$\Rightarrow a\,\dot{\alpha}(-\sin\alpha\,\vec{x}_0+\cos\alpha\,\vec{y}_0)=v(\cos\beta\,\vec{x}_0+\sin\beta\,\vec{y}_0)+a\dot{\beta}(-\sin\alpha\,\vec{x}_0+\cos\alpha\,\vec{y}_0)-a\dot{\beta}\,\vec{x}_0$$

$$\Rightarrow\begin{cases}-a\,\dot{\alpha}\sin\alpha=v\cos\beta-a\dot{\beta}\sin\alpha-a\dot{\beta}\\ a\,\dot{\alpha}\cos\alpha=v\sin\beta+a\dot{\beta}\cos\alpha\end{cases}$$ la deuxième équation donne : $\dot{\alpha}=\dfrac{v\sin\beta+a\dot{\beta}\cos\alpha}{a\cos\alpha}=\dot{\beta}+\dfrac{v\sin\beta}{a\cos\alpha}$

$$\boxed{\dot{x}=l\dot{\alpha}(\sin\alpha+\cos\alpha)=l(\dot{\beta}+\frac{v\sin\beta}{a\cos\alpha})(\sin\alpha+\cos\alpha)}$$

$$\boxed{\ddot{x}=l(\ddot{\beta}+\frac{v\dot{\beta}\cos\beta}{a\cos\alpha}+\frac{av\dot{\alpha}\sin\beta\sin\alpha}{a^2\cos^2\alpha})(\sin\alpha+\cos\alpha)+l(\dot{\beta}+\frac{v\sin\beta}{a\cos\alpha})(\dot{\alpha}\cos\alpha-\dot{\alpha}\sin\alpha)}$$

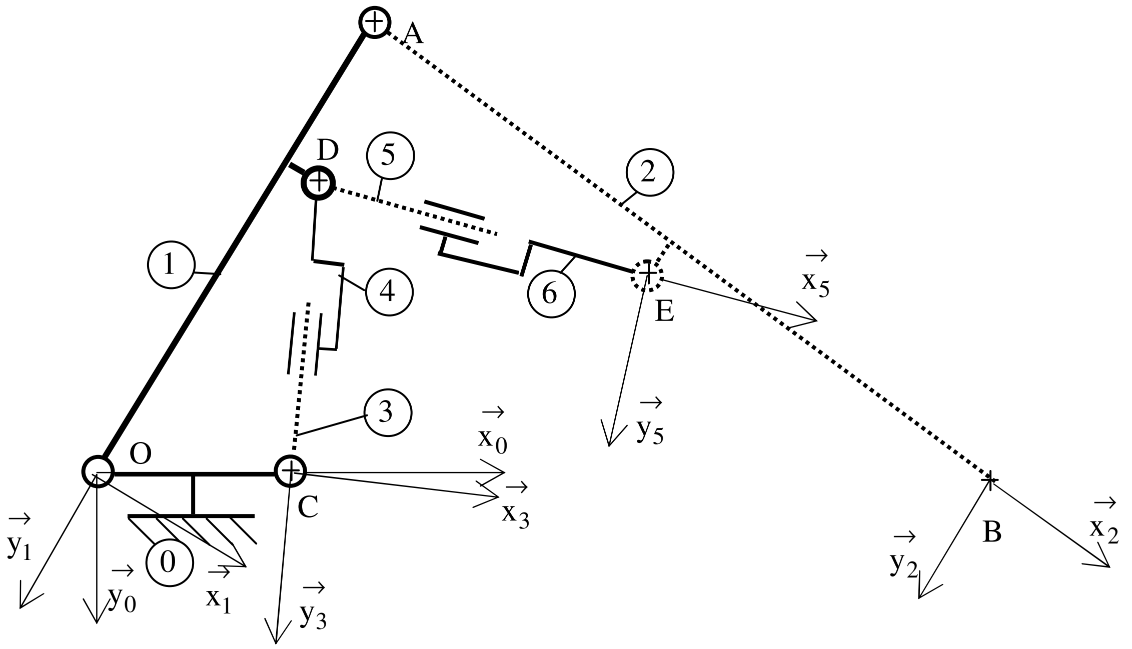
(*)Dans le triangle BOC : $\vec{BC}.\vec{x}_0=\vec{OC}.\vec{x}_0$

En dérivant on obtient : $\left[\dfrac{d(\vec{BC}.\vec{x}_0)}{dt}\right]_0=\left[\dfrac{d(\vec{OC}.\vec{x}_0)}{dt}\right]_0\Rightarrow\left[\dfrac{d(\vec{BC})}{dt}\right]_0.\vec{x}_0=\left[\dfrac{d(\vec{OC})}{dt}\right]_0.\vec{x}_0$

$$\left[\frac{d(\vec{BC})}{dt}\right]_0=\left[\frac{d(\vec{BC})}{dt}\right]_3+\vec{\Omega}(3/0)\wedge\vec{BC}=v\,\vec{x}_3+\dot{\beta}\,\vec{z}\wedge((a\vec{x}_2+a\,\vec{y}_0)=v\,\vec{x}_3+a\dot{\beta}\,\vec{y}_2-a\dot{\beta}\,\vec{x}_0$$

$$\left[\frac{d(\vec{OC})}{dt}\right]_0=\left[\frac{d(a\,\vec{x}_2)}{dt}\right]_0=a\,\dot{\alpha}\,\vec{y}_2$$

EXERCICE N°2: BRAS MANIPULATEUR



Paramétrage :

$\vec{AO} = a\,\vec{y}_1$; $\vec{OC} = b\,\vec{x}_0$; $\vec{DC} = \lambda\,\vec{y}_3$; $\vec{AB} = l\,\vec{x}_2$; ; $\vec{DE} = \mu\,\vec{x}_5$

$\alpha = (\vec{x}_0, \vec{x}_1)$; $\beta = (\vec{x}_0, \vec{x}_2)$; $\gamma = (\vec{x}_0, \vec{x}_3)$; $\theta = (\vec{x}_0, \vec{x}_5)$

Description :

Les pièces **3** et **4** sont le corps et la tige d'un vérin hydraulique de même pour les pièces 5 et 6.

1 et **3** sont en liaison pivot avec le bâti **0** ; **4** est en liaison pivot avec **1 ; 4** et **5** sont en liaison pivot avec **1 .**

6 est en liaison pivot avec **2**

4 se déplace par rapport à **3** avec une vitesse $\mathbf{v_{43}}$: $\vec{V}(D,4/3) = v_{43}\,\vec{y}_3 = \dot{\lambda}\,\vec{y}_3$

6 se déplace par rapport à **5** avec une vitesse $\mathbf{v_{56}}$: $\vec{V}(E,6/5) = v_{56}\,\vec{x}_5 = \dot{\mu}\,\vec{x}_5$

QUESTIONS :

-1- Déterminer $\vec{V}(D,4/0)$ en fonction de v_{43}, γ de sa dérivée et des paramètres géométriques.

-2- Déterminer $\vec{V}(D,1/0)$ en fonction de α de sa dérivée et des paramètres géométriques.

-3- Quelles relations obtient t-on a partir de ces deux vitesses

-4- Déterminer $\vec{V}(E,6/0)$ en fonction de v_{43}, v_{56}, γ et θ et de leurs dérivées, des paramètres géométriques.

-5- Déterminer $\vec{V}(B,2/0)$ en fonction de v_{43}, v_{56}, α, γ, θ, et β de leurs dérivées et des paramètres géométriques.

-6- Déterminer $\vec{\Gamma}(B,2/0)$,

Corrigé de l'exercice 1

-1- $\vec{V}_{(D,4/0)} = \vec{V}_{(D,4/3)} + \vec{V}_{(D,3/0)} = v_{43}\,\vec{y}_3 + \vec{V}_{(C,3/0)} + \vec{DC} \wedge \vec{\Omega}_{(3/0)} = v_{43}\,\vec{y}_3 + \vec{0} + \lambda\,\vec{y}_3 \wedge \dot{\gamma}\,\vec{z} = \dot{\lambda}\,\vec{y}_3 + \lambda\dot{\gamma}\,\vec{x}_3$

-2- $\vec{V}_{(D,1/0)} = \vec{V}_{(O,1/0)} + \vec{V}_{(D,3/0)} + \vec{DO} \wedge \vec{\Omega}_{(1/0)} = \vec{0} + (\lambda\,\vec{y}_3 - b\,\vec{x}_0) \wedge \dot{\alpha}\,\vec{z} = \lambda\dot{\alpha}\,\vec{x}_3 + b\dot{\alpha}\,\vec{y}_0$

-3- $\vec{V}_{(D,4/0)} = \vec{V}_{(D,1/0)} \Rightarrow \lambda\dot{\alpha}\,\vec{x}_3 + b\dot{\alpha}\,\vec{y}_0 = \dot{\lambda}\,\vec{y}_3 + \lambda\dot{\gamma}\,\vec{x}_3$

On projette dans B_3 : $\vec{y}_0 = \sin\gamma\,\vec{x}_3 + \cos\gamma\,\vec{y}_3$. D'où :

sur $\vec{x}_3$: $\lambda\dot{\alpha} + \sin\gamma b\dot{\alpha} = \lambda\dot{\gamma}$

sur $\vec{y}_3$: $\cos\gamma b\dot{\alpha} = \dot{\lambda}$

-4- $\vec{V}_{(E,6/0)} = \vec{V}_{(E,6/5)} + \vec{V}_{(E,5/0)} = v_{56}\,\vec{x}_5 + \vec{V}_{(D,4/0)} + \vec{ED} \wedge \vec{\Omega}_{(5/0)} = \dot{\mu}\,\vec{x}_5 + \dot{\lambda}\,\vec{y}_3 + \lambda\dot{\gamma}\,\vec{x}_3 + (-\mu\,\vec{x}_5) \wedge \dot{\theta}\,\vec{z}$

$\vec{V}_{(E,6/0)} = \dot{\mu}\,\vec{x}_5 + \dot{\lambda}\,\vec{y}_3 + \lambda\dot{\gamma}\,\vec{x}_3 + \mu\dot{\theta}\,\vec{y}_5$

-5- $\vec{V}_{(B,2/0)} = \vec{V}_{(E,2/0)} + \vec{BE} \wedge \vec{\Omega}_{(2/0)} = \vec{V}_{(E,6/0)} + (a\,\vec{y}_1 - \lambda\,\vec{y}_3 + b\,\vec{x}_0 + \mu\,\vec{x}_5 - 1\,\vec{x}_2) \wedge \dot{\beta}\,\vec{z}$

$\vec{V}_{(B,2/0)} = \dot{\mu}\,\vec{x}_5 + \dot{\lambda}\,\vec{y}_3 + \lambda\dot{\gamma}\,\vec{x}_3 + \mu\dot{\theta}\,\vec{y}_5 + \dot{\beta}(a\,\vec{x}_1 + 1\,\vec{y}_2 - \lambda\,\vec{x}_3 - b\,\vec{y}_0 - \mu\,\vec{y}_5)$

-6-

$$\vec{\Gamma}_{(B,2/0)} = \left[\frac{d(\vec{V}_{(B,2/0)})}{dt}\right]_0 = \ddot{\mu}\,\vec{x}_5 + \dot{\mu}\dot{\theta}\,\vec{y}_5 + \ddot{\lambda}\,\vec{y}_3 - \dot{\lambda}\dot{\gamma}\,\vec{x}_3 + \dot{\lambda}\dot{\gamma}\,\vec{x}_3 + \lambda\ddot{\gamma}\,\vec{x}_3 + \lambda\dot{\gamma}^2\,\vec{y}_3 + \dot{\mu}\dot{\theta}\,\vec{y}_5 + \mu\ddot{\theta}\,\vec{y}_5 - \mu\dot{\theta}^2\,\vec{x}_5$$

$$+\ddot{\beta}(a\,\vec{x}_1 + 1\,\vec{y}_2 - \lambda\,\vec{x}_3 - b\,\vec{y}_0 - \mu\,\vec{y}_5) + \dot{\beta}(a\dot{\alpha}\,\vec{y}_1 - 1\dot{\beta}\,\vec{x}_2 - \dot{\lambda}\,\vec{x}_3 - \lambda\dot{\gamma}\,\vec{y}_3 - \dot{\mu}\,\vec{y}_5 + \mu\dot{\theta}\,\vec{x}_5)$$

$$\vec{\Gamma}_{(B,2/0)} = (\lambda\ddot{\gamma} - \lambda\ddot{\beta} - \dot{\mu}\dot{\beta})\,\vec{x}_3 + (\ddot{\lambda} + \lambda\dot{\gamma}^2 - \lambda\dot{\gamma}\dot{\beta})\,\vec{y}_3 + (\ddot{\mu} - \mu\dot{\theta}^2 + \mu\dot{\theta}\dot{\beta})\,\vec{x}_5 + (2\dot{\mu}\dot{\theta} + \mu\ddot{\theta} - \mu\ddot{\beta} - \dot{\mu}\dot{\beta})\,\vec{y}_5$$

$$+\ddot{\beta}(a\,\vec{x}_1 + 1\,\vec{y}_2 - b\,\vec{y}_0) + \dot{\beta}(a\dot{\alpha}\,\vec{y}_1 - 1\dot{\beta}\,\vec{x}_2)$$

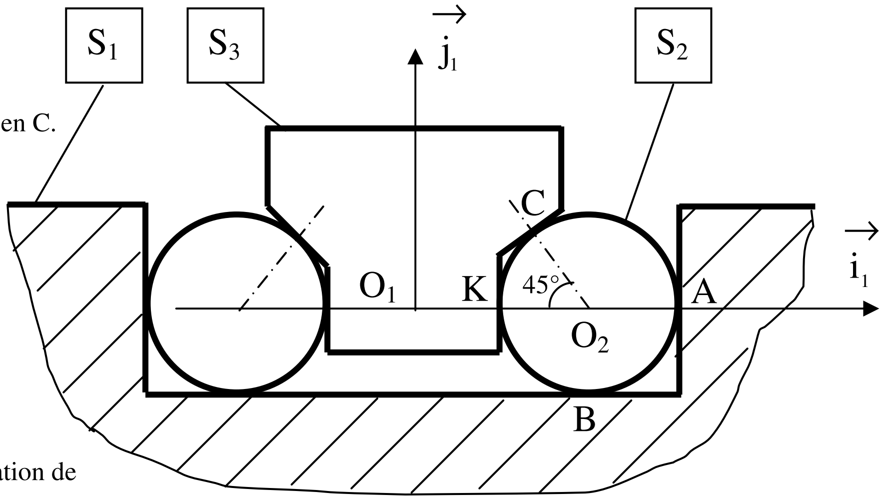
Ou compte, tenu de l'énoncé, beaucoup plus simplement

$\vec{V}_{(B,2/0)} = \vec{V}_{(A,2/0)} + \vec{BA} \wedge \vec{\Omega}_{(2/0)} = \vec{AO} \wedge \vec{\Omega}_{(1/0)} + (-1\,\vec{x}_2) \wedge \dot{\beta}\,\vec{z} = a\,\vec{y}_1 \wedge \dot{\alpha}\,\vec{z} + 1\dot{\beta}\,\vec{y}_2 = a\dot{\alpha}\,\vec{x}_1 + 1\dot{\beta}\,\vec{y}_2$

$\Rightarrow \vec{\Gamma}_{(B,2/0)} = a\ddot{\alpha}\,\vec{x}_1 + 1\ddot{\beta}\,\vec{y}_2 + a\dot{\alpha}^2\,\vec{y}_1 - 1\dot{\beta}^2\,\vec{x}_2$

EXERCICE N°3 : CHARIOT SUR BILLES

Un chariot (**S_3**) est animé d'un mouvement de translation d'axe $\vec{k_1}$ par rapport à un bâti fixe (**S_1**). Il est guidé par l'intermédiaire de billes (**S_2**) de rayon R.



On suppose qu'aucun glissement n'est en A, B, et K mais qu'un glissement peut exister en C. Connaissant la vitesse de translation de S_3/S_1 :
$\vec{V}(O_3,3/1) = V\vec{k_1}$ avec V constant , on s'intéresse au mouvement d'une bille (S_2).

QUESTIONS

-1- A partir des conditions de roulement sans glissement en A, B, et K, déterminer en fonction de V et de R :
- les composantes p , q , r du vecteur rotation de la bille par rapport au bâti $\vec{\Omega}(2/1)$ dans la base $(\vec{i_1},\vec{j_1},\vec{k_1})$
- la vitesse de son centre : $\vec{V}(O_2,2/1)$

-2- Déterminer les composantes des vecteurs rotation de roulement et rotation de pivotement en A, B, C et K.
(La normale au contact sera toujours choisie dirigée vers l'intérieur de la bille).

-3- Déterminer la vitesse de glissement en C.

-4- On désire annuler cette vitesse de glissement en modifiant la forme du chariot (S_3).Le point K conservant la même position, on recherche alors une nouvelle position de contact pour C de sorte que $\vec{V}(C,2/3) = \vec{0}$. Pour cela, on posera $\vec{O_2C} = X\vec{i_1} + Y\vec{j_1}$ Chercher l'équation du lieu des points C qui satisfont à la relation de roulement sans glissement précédents. Existe-t-il des points pouvant appartenir à la fois à la fois à ce lieu et à ce lieu et à la surface de la bille? Comment modifier la forme du chariot (S_3) pour que le glissement en C soit nul ? Faire un dessin.

CORRIGE

-1--

$$\vec{V}(C,S_2/S_0) = V\vec{k_1} = \vec{V}(A,S_2/S_0) + \vec{CA}\wedge\vec{\Omega}(S_2/S_0) = \vec{0} + R\,\vec{i_1}\begin{vmatrix} R(1+\sqrt{2}/2) \\ -R\sqrt{2}/2 \\ 0 \end{vmatrix} \wedge \begin{vmatrix} p \\ q \\ r \end{vmatrix}$$

$$\Rightarrow -rR\sqrt{2}/2\,\vec{i_1} - rR(1+\sqrt{2}/2)\,\vec{j_1} + \left[pR\sqrt{2}/2 + qR(1+\sqrt{2}/2)\right]\vec{k_1} = V\vec{k_1} \Rightarrow r = 0 \text{ et } pR\sqrt{2}/2 + qR(1+\sqrt{2}/2) = V$$

$$\vec{V}(A,S_2/S_0) = \vec{0} = \vec{V}(B,S_2/S_0) + \vec{AB}\wedge\vec{\Omega}(S_2/S_0) = \vec{0} - \left(R\sqrt{2}/2\,\vec{i_1} + R\sqrt{2}/2\,\vec{j_1}\right)\wedge\begin{vmatrix} p \\ q \\ 0 \end{vmatrix}$$

$$= -\left(qR\sqrt{2}/2 - pR\sqrt{2}/2\right)\vec{k_1} = \vec{0} \Rightarrow p = q \quad \text{D'où : } pR(1+\sqrt{2}) = V \Rightarrow p = \frac{V}{(1+\sqrt{2})R}$$

$$\boxed{\Rightarrow \vec{\Omega}(S_2/S_0) = \begin{vmatrix} V/(1+\sqrt{2})R \\ V/(1+\sqrt{2})R \\ 0 \end{vmatrix}}$$

$$\vec{V}(O_2,S_1/S_2)=\vec{V}(O_2,S_1/S_0)-\vec{V}(O_2,S_2/S_0)=V\vec{k_1}-\vec{O_2A}\wedge\vec{\Omega}(S_2/S_0)=V\vec{k_1}-R\,\vec{i_1}\wedge\begin{vmatrix}V/(1+\sqrt{2})R\\ V/(1+\sqrt{2})R\\ 0\end{vmatrix}$$

$$=V\vec{k_1}-V/(1+\sqrt{2})\,\vec{k_1}=\frac{V\sqrt{2}}{(1+\sqrt{2})}\vec{k_1}=\vec{V}(O_2,S_2/S_1)$$

-2-

$$\vec{V}(K,S_2/S_1)=\vec{V}(O_2,S_2/S_1)+\vec{KO_2}\wedge\vec{\Omega}(S_2/S_1)=\frac{V\sqrt{2}}{(1+\sqrt{2})}\vec{k_1}+R\,\vec{i_1}\wedge\begin{vmatrix}V/(1+\sqrt{2})R\\ V/(1+\sqrt{2})R\\ 0\end{vmatrix}=\frac{V\sqrt{2}}{(1+\sqrt{2})}\vec{k_1}+V/(1+\sqrt{2})\,\vec{k_1}=V\vec{k_1}$$

$\Rightarrow\vec{V}(K,S_2/S_1)=V\vec{k_1}$ Remarque : $\vec{\Omega}(S_2/S_1)=\vec{\Omega}(S_2/S_0)+\vec{\Omega}(S_0/S_1)=\vec{\Omega}(S_2/S_0)+\vec{0}$

-3- En A $\vec{\Omega}_r(S_2/S_1)=V/(1+\sqrt{2})R\;\vec{j_1}$; $\vec{\Omega}_p(S_2/S_1)=V/(1+\sqrt{2})R\;\vec{i_1}$

En B $\vec{\Omega}_r(S_2/S_1)=V/(1+\sqrt{2})R\;\vec{i_1}$; $\vec{\Omega}_p(S_2/S_1)=V/(1+\sqrt{2})R\;\vec{j_1}$

-4- $\vec{V}(K,S_2/S_0)=\vec{V}(A,S_2/S_0)+\vec{KA}\wedge\vec{\Omega}(S_2/S_0)=\vec{0}+2R\,\vec{i_1}\wedge\begin{vmatrix}p\\ q\\ r\end{vmatrix}=2R\left(-r\,\vec{i_1}+q\,\vec{k_1}\right)=V\,\vec{k_1}\Rightarrow r=0$ et $q=V/2R$

$$\vec{V}(A,S_2/S_0)=\vec{0}=\vec{V}(B,S_2/S_0)+\vec{AB}\wedge\vec{\Omega}(S_2/S_0)=\vec{0}-\left(R\sqrt{2}/2\,\vec{i_1}+R\sqrt{2}/2\,\vec{j_1}\right)\wedge\begin{vmatrix}p\\ q\\ 0\end{vmatrix}$$

$=-\left(qR\sqrt{2}/2-pR\sqrt{2}/2\right)\vec{k_1}=\vec{0}\Rightarrow p=q$ D'où : $\boxed{\Rightarrow\vec{\Omega}(S_2/S_0)=\begin{vmatrix}V/2R\\ V/2R\\ 0\end{vmatrix}}$

$$\vec{V}(C,S_1/S_2)=\vec{V}(C,S_1/S_0)-\vec{V}(C,S_2/S_0)=V\vec{k_1}-\vec{V}(A,S_2/S_0)-\vec{CA}\wedge\vec{\Omega}(S_2/S_0)=V\vec{k_1}-\begin{vmatrix}R(1+\sqrt{2}/2)\\ -R\sqrt{2}/2\\ 0\end{vmatrix}\wedge\begin{vmatrix}V/2R\\ V/2R\\ 0\end{vmatrix}=$$

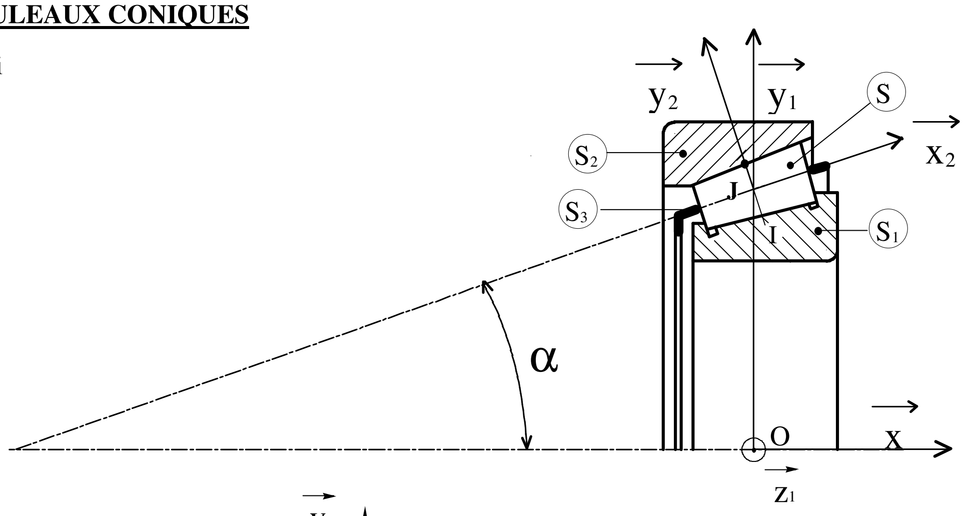
$$=V\vec{k_1}-\left[V/2R\;R\sqrt{2}/2+V/2R\;R(1+\sqrt{2}/2)\right]\vec{k_1}=\left[V-\frac{V\sqrt{2}}{4}-\frac{V}{2}-\frac{V\sqrt{2}}{4}\right]\vec{k_1}=\frac{V(1-\sqrt{2})}{2}\vec{k_1}$$

-6- $\vec{V}(C,S_1/S_2)=\vec{V}(C,S_1/S_0)-\vec{V}(C,S_2/S_0)=V\vec{k_1}-\vec{CA}\wedge\vec{\Omega}(S_2/S_0)=V\vec{k_1}-\begin{vmatrix}R-x\\ -y\\ 0\end{vmatrix}\wedge\begin{vmatrix}V/2R\\ V/2R\\ 0\end{vmatrix}=\left[V-\frac{V(R-x)}{2R}-\frac{Vy}{2R}\right]\vec{k_1}=\vec{0}$

$$\Rightarrow V-\frac{V(R-x)}{2R}-\frac{Vy}{2R}=0\Rightarrow 2R-R+x-y=0\Rightarrow y=x-R$$

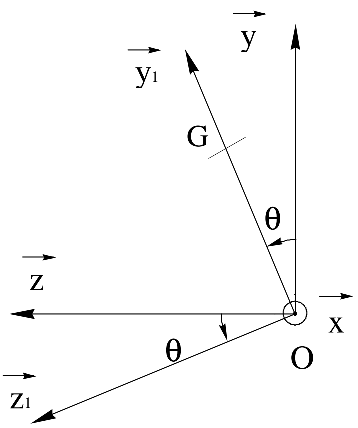
Le lieu des points C tel que $\vec{V}(C,S_1/S_2)=\vec{0}$ est la droite $y=x-R$ dans le repère $O_2,\vec{i_1},\vec{j_1}$

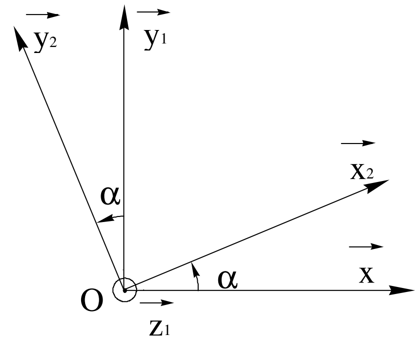
EXERCICE N°3: ROULEMENT A ROULEAUX CONIQUES



Soit $R = (O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ un repère lié au bâti S_0. La bague intérieure (S_1) et la bague extérieure (S_2) ont une liaison pivot d'axe $(O, \vec{x})$ avec (S_0). On pose :
$\vec{\Omega}(S_1 / R) = \omega_1 \vec{x}$; $\vec{\Omega}(S_2 / R) = \omega_2 \vec{x}$.
Le rouleau conique (S), de centre d'inertie G, roule sans glisser sur (S_1) et (S_2). Soit $R_1 = (O, \vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$ le repère lié à S_3 tel que $\vec{OG} = r\,\vec{y}_1$ (r > 0), soit $\theta = (\vec{y}, \vec{y}_1)$.
Soit $R_2 = (G, \vec{x}_2, \vec{y}_2, \vec{z}_1)$ le repère lié à S_3 , avec : $\alpha = (\vec{x}, \vec{x}_2)$, α est constant et $\vec{\Omega}(S / R_2) = \omega\,\vec{x}_2$.

Considérons le cercle de section droite du rouleau conique (S) situé dans le plan $(G, \vec{y}_2, \vec{z}_1)$, soit I et J les points de contact de ce cercle avec (S_1) et (S_2) et a le rayon du cercle ($\vec{IJ} = 2a\,\vec{y}_2$).
On posera :
$r_1 = r - a\cos\alpha$ et $r_2 = r + a\cos\alpha$





Corrigé de l'exercice 2 roulement à rouleau conique

Torseur cinématique en G de (S) / R $\{V_{(S/R)}\}_G$

$$\{V_{(S/R)}\}_G \begin{cases} \vec{\Omega}(S/R) = \vec{\Omega}(S/R_2) + \vec{\Omega}(R_2/R) = \omega\,\vec{x}_2 + \dot{\theta}\,\vec{x} \\ \vec{V}(G,S/R) = r\,\dot{\theta}\,\vec{z} \end{cases}$$

$$\vec{V}(J \in S/R) = \vec{V}(J \in S_2/R) = r_2\omega_2\,\vec{z}$$

$$\vec{V}(I \in S/R) = \vec{V}(I \in S_1/R) = r_1\omega_1\,\vec{z}$$

$$\vec{V}(G,S/R) = \vec{V}(J \in S/R) + \vec{GJ} \wedge \vec{\Omega}(S/R) = r_2\omega_2\,\vec{z} + a\,\vec{y}_2 \wedge (\omega\,\vec{x}_2 + \dot{\theta}\,\vec{x})$$

$$\Rightarrow r\,\dot{\theta}\,\vec{z} = r_2\omega_2\,\vec{z} - a\omega\,\vec{z} - a\,\dot{\theta}\cos\alpha\,\vec{z} \Rightarrow r\,\dot{\theta} = r_2\omega_2 - a\omega - a\,\dot{\theta}\cos\alpha \qquad \textbf{(1)}$$

$$\vec{V}(G,S/R) = \vec{V}(I \in S/R) + \vec{GI} \wedge \vec{\Omega}(S/R) = r_2\omega_2\,\vec{z} - a\,\vec{y}_2 \wedge (\omega\,\vec{x}_2 + \dot{\theta}\,\vec{x})$$

$$\Rightarrow r\,\dot{\theta}\,\vec{z} = r_1\omega_1\,\vec{z} + a\omega\,\vec{z} + a\,\dot{\theta}\cos\alpha\,\vec{z} \Rightarrow r\,\dot{\theta} = r_1\omega_1 + a\omega + a\,\dot{\theta}\cos\alpha \qquad \textbf{(2)}$$

$$\textbf{(2)} \Rightarrow r\,\dot{\theta} - a\,\dot{\theta}\cos\alpha = r_1\omega_1 + a\omega \Rightarrow \omega = \frac{\dot{\theta}(r - a\cos\alpha) - r_1\omega_1}{a} = \frac{\dot{\theta}\,r_1 - r_1\omega_1}{a}$$

$$\textbf{(1)} + \textbf{(2)} \Rightarrow 2r\,\dot{\theta} = r_1\omega_1 + r_2\omega_2 \Rightarrow \dot{\theta} = \frac{r_1\omega_1 + r_2\omega_2}{2r} = \frac{r_1\omega_1 + r_2\omega_2}{r_1 + r_2}$$

En reportant cette expression de $\dot{\theta}$ dans celle de $\omega \Rightarrow \omega = \dfrac{(r_1\omega_1 + r_2\omega_2)r_1 - r_1\omega_1(r_1 + r_2)}{a(r_1 + r_2)}$

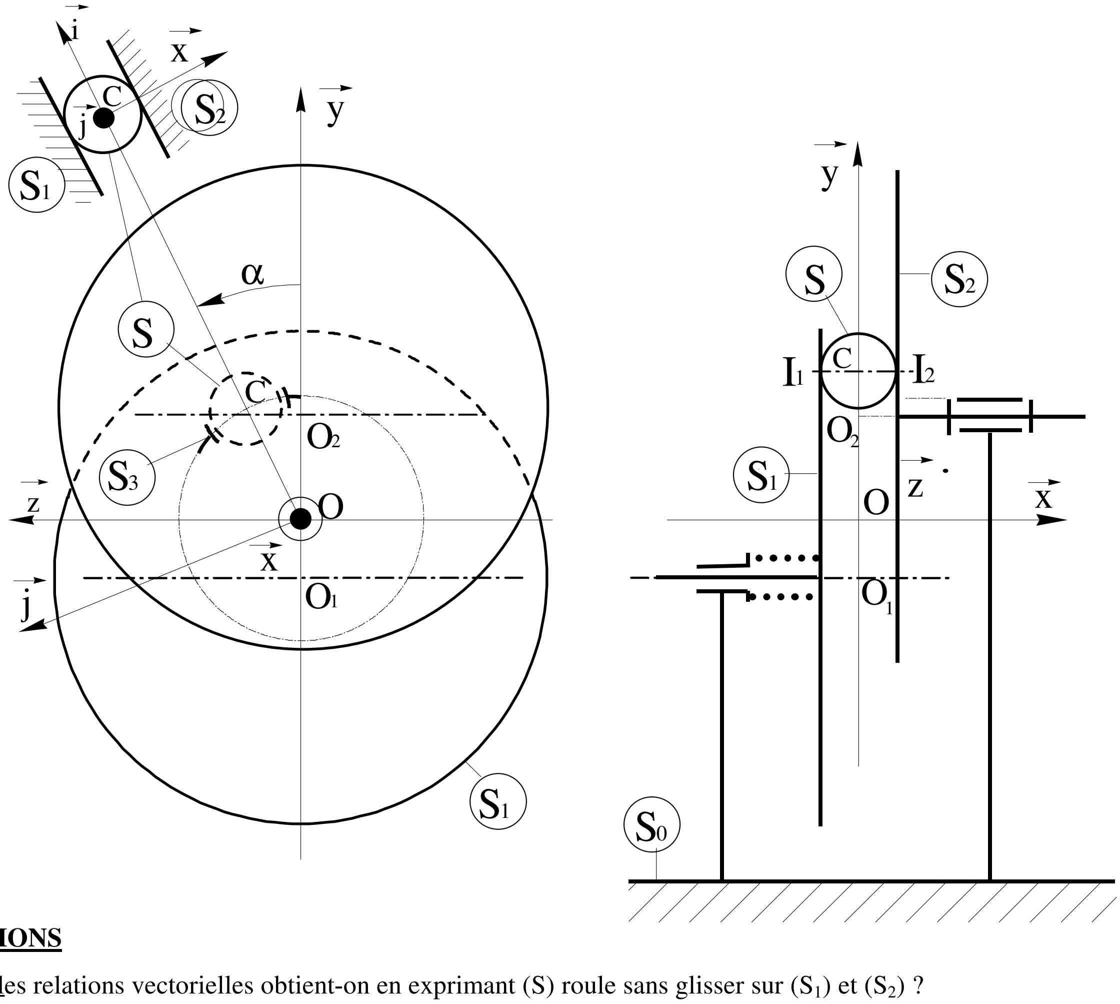
d'où après simplification $\Rightarrow \omega = \dfrac{r_1 r_2(\omega_2 - \omega_1)}{a(r_1 + r_2)}$

d'autre part: $\vec{V}(G,S/R) = r\dot{\theta}\,\vec{z} = r.\dfrac{r_1\omega_1 + r_2\omega_2}{r_1+r_2}\vec{z} = \dfrac{r_1\omega_1 + r_2\omega_2}{2}\vec{z}$

$$\boxed{\Rightarrow \left\{V_{(S/R)}\right\}_G = \begin{cases} \vec{\Omega}(S/R) = \dfrac{r_1\omega_1 + r_2\omega_2}{r_1+r_2}\vec{x} + \dfrac{r_1 r_2(\omega_2-\omega_1)}{a(r_1+r_2)}\vec{x}_2 \\ \vec{V}(G,S/R) = \dfrac{r_1\omega_1 + r_2\omega_2}{2}\vec{z} \end{cases}}$$

EXERCICE N°3: VARIATEUR PIV

Le variateur de vitesse à billes PIV est constitué de deux plateaux décalés entre lesquels est enfermée une série de billes maintenue par une cage intermédiaire pouvant se déplacer afin de modifier le rapport de variation du mécanisme. On adopte le schéma cinématique ci-dessous . Soit $R = (O,\vec{x},\vec{y},\vec{z})$ lié au bâti (S_0) du variateur. L'origine O est le centre de la cage à billes (S_3), supposé fixe par rapport à (S_0) pendant le fonctionnement. Le plateau moteur (S_1) et le plateau récepteur (S_2) ont une liaison pivot d'axe $(O_1,\vec{x})$ et $(O_2,\vec{x})$ avec S_0 , avec : $\overrightarrow{O_1O} = \lambda\,\vec{y}$ ($0 \le \lambda < a$) , $\overrightarrow{O_1O_2} = a\,\vec{y}$ ($a > 0$) , λ est constant pendant le fonctionnement. On pose : $\vec{\Omega}(S_1/R) = \omega_1\,\vec{x}$; $\vec{\Omega}(S_2/R) = \omega_2\,\vec{x}$; $\vec{\Omega}(S_3/R) = \omega_3\,\vec{x}$. Une bille (S) de la cage. de rayon b, de centre C, roule sans glisser en I_1 sur (S_1) et en I_2 sur (S_2). Soit $R' = (O,\vec{i},\vec{j},\vec{x})$ un repère lié à la cage (S_3) tel $\overrightarrow{OC} = r\,\vec{i}$ ($r > 0$) et $\alpha = (\vec{y},\vec{i})$.



QUESTIONS

-1- Quelles relations vectorielles obtient-on en exprimant (S) roule sans glisser sur (S_1) et (S_2) ?

-2- Montrer que le rapport de variation est (en valeur absolue) : $\dfrac{\omega_2}{\omega_1} = \dfrac{\lambda}{a-\lambda}$ et déterminer $\vec{\Omega}(S_3/R)$.

-3- Montrer, par un raisonnement simple, que toutes billes de la cage roulent sans glisser sur (S_1) et(S_2) malgré que la vitesse de leur centre soit imposée par cage.

-4- Tracer la courbe du rapport variation pour : $0 \le \lambda < a$. En pratique : $0 \le \dfrac{\omega_2}{\omega_1} < 1{,}2$. Quelle est alors la valeur maximale de λ ?

<u>Corrigé de l'exercice 2 :</u> variateur PIV

-1- On exprime le roulement sans glissement en I_1 :

$$\vec{V}(I_1,S/S_1)=\vec{0}\Rightarrow \vec{V}(I_1,S/0)=\vec{V}(I_1,S_1/0)$$
$$\vec{V}(I_2,S/S_2)=\vec{0}\Rightarrow \vec{V}(I_2,S/0)=\vec{V}(I_2,S_2/0)$$

-2- $\vec{V}(I_1,S_1/0)=\vec{V}(O_1,S_1/0)+\vec{I_1O_1}\wedge\vec{\Omega}(S_1/0)=\vec{0}+(b\,\vec{x}-r\,\vec{i}-\lambda\,\vec{y})\wedge\omega_1\,\vec{x}=r\omega_1\,\vec{j}+\lambda\omega_1\,\vec{z}$

$\vec{V}(I_1,S/0)=\vec{V}(C,S/0)+\vec{I_1C}\wedge\vec{\Omega}(S/0)=\vec{V}(C,S_3/0)+b\,\vec{x}\wedge\vec{\Omega}(S/0)$; on pose : $\vec{\Omega}(S/0)=\omega_i\,\vec{i}+\omega_j\,\vec{j}+\omega_x\,\vec{x}$ d'où :

$\vec{V}(I_1,S/0)=-r\,\vec{i}\wedge\omega_3\,\vec{x}+b\,\vec{x}\wedge(\omega_i\,\vec{i}+\omega_j\,\vec{j}+\omega_x\,\vec{x})=r\omega_3\,\vec{j}+b\omega_i\,\vec{j}-b\omega_j\,\vec{i}$

d'où : $(r\omega_3+b\omega_i)\,\vec{j}-b\omega_j\,\vec{i}=r\omega_1\,\vec{j}+\lambda\omega_1\,\vec{z}$

$$\vec{z}=\sin\alpha\,\vec{i}+\cos\alpha\,\vec{j}\Rightarrow\begin{cases}b\omega_j+\lambda\omega_1\sin\alpha=0 & (1)\\ r(\omega_1-\omega_3)-b\omega_i+\lambda\omega_1\cos\alpha=0 & (2)\end{cases}$$

On exprime le roulement sans glissement en I_2 : $\vec{V}(I_2,S/S_2)=\vec{0}\Rightarrow\vec{V}(I_2,S/0)=\vec{V}(I_2,S_2/0)$

$\vec{V}(I_2,S_2/0)=\vec{V}(O_2,S_2/0)+\vec{I_2O_2}\wedge\vec{\Omega}(S_2/0)=\vec{0}+(-b\,\vec{x}-r\,\vec{i}-(\lambda-a)\,\vec{y})\wedge\omega_2\,\vec{x}=r\omega_2\,\vec{j}+(\lambda-a)\omega_2\,\vec{z}$

on pose : $\vec{\Omega}(S/0)=\omega_i\,\vec{i}+\omega_j\,\vec{j}+\omega_x\,\vec{x}$

$\vec{V}(I_2,S/0)=\vec{V}(I_1,S/0)+\vec{I_2I_1}\wedge\vec{\Omega}(S/0)=r\omega_1\,\vec{j}+\lambda\omega_1\,\vec{z}-2b\,\vec{x}\wedge(\omega_i\,\vec{i}+\omega_j\,\vec{j}+\omega_x\,\vec{x})=r\omega_1\,\vec{j}+\lambda\omega_1\,\vec{z}-2b\omega_i\,\vec{j}+2b\omega_j\,\vec{i}$

d'où : $r\omega_2\,\vec{j}+(\lambda-a)\omega_2\,\vec{z}=r\omega_1\,\vec{j}+\lambda\omega_1\,\vec{z}-2b\omega_i\,\vec{j}+2b\omega_j\,\vec{i}$

$$\vec{z}=\sin\alpha\,\vec{i}+\cos\alpha\,\vec{j}\Rightarrow\begin{cases}-2b\omega_j+[(\lambda-a)\omega_2-\lambda\omega_1]\sin\alpha=0 & (3)\\ r(\omega_1-\omega_2)-2b\omega_i+[(a-\lambda)\omega_2+\lambda\omega_1]\cos\alpha=0 & (4)\end{cases}$$

(1) dans (3) $\Rightarrow\lambda\omega_1\sin\alpha+(\lambda-a)\omega_2\sin\alpha=0\Rightarrow\dfrac{\omega_2}{\omega_1}=\dfrac{\lambda}{a-\lambda}$

ce résultat dans (4) $\Rightarrow r(\omega_1-\omega_2)-2b\omega_i+2\lambda\omega_1\cos\alpha=0$ ce résultat dans (2)

$\Rightarrow r(\omega_1-\omega_3)+\dfrac{r(\omega_1-\omega_2)}{2}=0\Rightarrow\omega_3=-\dfrac{(\omega_2+\omega_1)}{2}$

-3- L'étude précédente concerne une bille quelconque , les résultats précédents sont donc valables pour chacune des billes ce qui implique que chacune d'elles roule sans glisser sur S_1 et S_2.

-4- $\dfrac{\omega_2}{\omega_1}=\dfrac{\lambda}{a-\lambda}=1{,}2\Rightarrow\lambda=1{,}2(a-\lambda)\Rightarrow2{,}2\lambda=1{,}2a\Rightarrow\lambda=\dfrac{1{,}2}{2{,}2}a\cong0{,}545a$