**PSI** 

# INTÉGRATION SUR UN INTERVALLE QUELCONQUE

$\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, $a$ et $b$ sont dans $\overline{\mathbb{R}}$ et vérifient $a<b$. Il s'agit de généraliser la notion $\displaystyle\int_a^b f(t)\,dt$.

$I$ sera dans ce chapitre $[a,b[$, $]a,b]$, $]a,b[$, $[a,+\infty[$ et $f: I \longrightarrow \mathbb{K}$ **est continue par morceaux sur *I*.**

*Interprétation géométrique du problème :*
Il s'agit de répondre à la question " une surface infinie peut-elle avoir une aire finie ? "

## I - INTÉGRALE IMPROPRE OU GÉNÉRALISÉE

### 1) *Intégrale sur un intervalle semi-ouvert* $[a,b[$

Dans ce paragraphe, $I=[a,b[$ avec $a<b$, $a\in\mathbb{R}$ et ($b\in\mathbb{R}$ ou $b=+\infty$).
On considère $f:[a,b[\longrightarrow \mathbb{K}$, continue par morceaux sur $[a,b[$. On notera :

$$\begin{cases} F : [a,b[ & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ \quad x & \longmapsto & \displaystyle\int_a^x f(t)\,dt \end{cases}$$

**déf.**
*Lorsque $F$ admet une limite finie $\ell$ en $b$ on dit que l'intégrale* ***impropre ou généralisée*** *de $f$ sur $[a,b[$* ***converge.***
*On écrit alors :* $\displaystyle \ell=\int_I f=\int_a^b f=\int_a^b f(t)\,dt.$ *On dit aussi que* $\displaystyle\int_a^b f$ *est* ***convergente*** *ou* ***existe.***
*Si $F$ n'admet pas de limite finie en $b$, on dit que l'intégrale impropre* ***diverge*** *ou est* ***divergente.***
*Etudier la* ***nature*** *d'une intégrale impropre, c'est déterminer si elle est* ***convergente*** *ou* ***divergente.***

**prop. 1**
Si $c\in\,]a,b[$, $\displaystyle\left(\int_a^b f \text{ est convergente}\right) \Longleftrightarrow \left(\int_c^b f \text{ est convergente}\right)$.
Dans le cas de convergence, on a : $\displaystyle\int_a^b f=\int_a^c f+\int_c^b f.$
*En conséquence, la nature de* $\displaystyle\int_a^b f$ *ne dépend que du comportement de $f$ au voisinage de $b$.*

**prop. 2**
*Linéarité :* Soient $f$ et $g$ deux fonctions continues par morceaux sur $[a,b[$ et $\lambda\in\mathbb{K}$.
**Si** $\displaystyle\int_a^b f$ et $\displaystyle\int_a^b g$ convergent
**alors** il en est de même de $\displaystyle\int_a^b(\lambda f+g)$ et $\displaystyle\int_a^b(\lambda f+g)=\lambda\int_a^b f+\int_a^b g$

**prop. 3**
Soit $f$ à valeurs complexes, continue par morceaux sur $[a,b[$, de parties réelle et imaginaire $u$ et $v$.
Alors : $\displaystyle\int_a^b f$ converge si et seulement si $\displaystyle\int_a^b u$ et $\displaystyle\int_a^b v$ convergent.
En cas de convergence : $\displaystyle\int_a^b f=\int_a^b u+\mathrm{i}\int_a^b v$

**prop. 4**
Lorsque $\underline{b\in\mathbb{R}}$ et $\displaystyle\lim_{x\to b^-} f(x)$ existe dans $\mathbb{K}$,
on peut définir $\widetilde{f}$ le prolongement par continuité de $f$ sur $[a,b]$.
Alors $\displaystyle\int_a^b f$ est convergente et $\displaystyle\int_a^b f=\int_a^b\widetilde{f}$
*On peut dire alors que la convergence de* $\displaystyle\int_a^b f$ *présente un « faux problème » en $b$.*

### *2) Intégrale sur un intervalle semi-ouvert* $]a,b]$

Dans ce paragraphe, $I = ]a,b]$ avec $a<b$, $(a\in\mathbb{R}$ ou $a=-\infty)$ et $b\in\mathbb{R}$.
On considère $f : ]a,b] \longrightarrow \mathbb{K}$, continue par morceaux sur $]a,b]$. On notera :

$$\left\{\begin{array}{rcl} F : ]a,b] & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ x & \longmapsto & \displaystyle\int_x^b f(t)\,dt \end{array}\right.$$

**déf.** *Lorsque $F$ admet une limite finie $\ell$ en $a$ on dit que l'intégrale* ***impropre ou généralisée*** *de $f$ sur $]a,b]$* ***converge****.*
*On écrit alors : $\ell = \displaystyle\int_I f = \int_a^b f = \int_a^b f(t)\,dt$. On dit aussi que $\displaystyle\int_a^b f$ est* ***convergente*** *ou* ***existe****.*
*Si $F$ n'admet pas de limite finie en $a$, on dit que l'intégrale impropre* ***diverge*** *ou est* ***divergente****.*

Les propriétés précédentes sont encore valables.

### *3) Exemples de référence à connaitre parfaitement !*

**a)** Intégrales de Riemann en $+\infty$ : Soit $a>0$ et $\alpha\in\mathbb{R}$.

$$\boxed{\int_a^{+\infty} \frac{1}{t^\alpha}\,dt \quad \text{converge si et seulement si} \quad \alpha>1}$$

**b)** Intégrales de Riemann en $b\in\mathbb{R}$ ou $a\in\mathbb{R}$ : Soient $a$, $b$ et $\alpha$ trois réels tels que $a<b$.

$$\boxed{\int_a^b \frac{1}{(b-t)^\alpha}\,dt \quad \text{converge si et seulement si} \quad \alpha<1}$$

$$\boxed{\int_a^b \frac{1}{(t-a)^\alpha}\,dt \quad \text{converge si et seulement si} \quad \alpha<1}$$

**c)** Soit $\alpha\in\mathbb{R}$.

$$\boxed{\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{\,-\alpha t}\,dt \quad \text{converge si et seulement si} \quad \alpha>0}$$

**da)**

$$\boxed{\int_0^1 \ln(t)\,dt \quad \text{converge et vaut} \quad -1}$$

### *4) Intégrale sur un intervalle ouvert*

**déf. 1** *Etant donnés $a$ et $b$ dans $\overline{\mathbb{R}}$ tels que $a<b$ et une fonction $f$ à valeurs réelles ou complexes, continue par morceaux su*
*on dit que l'intégrale $\displaystyle\int_a^b f$ est* ***convergente*** *s'il existe $c\in\,]a,b[$ tel que $\displaystyle\int_a^c f$ et $\displaystyle\int_c^b f$ convergent.*
*On définit alors $\displaystyle\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f$. On admet que cette définition ne dépend pas du choix de $c$.*

**déf. 2** ***Généralisation***
*Soit $a$ et $b$ dans $\overline{\mathbb{R}}$ et $c_1,\dots,c_n$ dans $]a,b[$ avec $\forall\, i\in[\![1,n-1]\!]$, $c_i<c_{i+1}$.*
*Soit $f$ une fonction à valeurs réelles ou complexes, continue par morceaux sur $]a,c_1[,\ ]c_1,c_2[,\dots,]c_n,b[$.*
*L'intégrale $\displaystyle\int_a^b f$ est dite convergente lorsque $\displaystyle\int_a^{c_1} f,\ \int_{c_1}^{c_2} f,\dots,\int_{c_n}^b f$ sont toutes convergentes.*
*On définit alors : $\displaystyle\int_a^b f = \int_a^{c_1} f + \int_{c_1}^{c_2} f + \cdots + \int_{c_n}^b f$.*

**prop.** La relation de Chasles et la linéarité sont encore valables.

### 4) Calcul d'une intégrale impropre

Dans les exemples, $f$ est la plupart du temps une fonction continue et on dispose donc de primitives de $f$.
Soit $f$ continue sur $[a,b[$ et $F$ une primitive de $f$ sur $[a,b[$.
Alors $\displaystyle\int_a^b f$ converge si et seulement si $F$ admet une limite finie en $b$.

Dans ce cas, $\displaystyle\int_a^b f = \lim_{X\to b^-}\int_a^X f(t)\,dt = \lim_{X\to b^-}(F(X)-F(a))$.

On peut étendre ce résultat sur $]a,b[$ et $\displaystyle\int_a^b f = \lim_{X\to b^-} F(X) - \lim_{Y\to a^+} F(Y)$.

On dispose toujours des techniques de changement de variable et d'intégration par parties :

**th. 1**

*Changement de variable :* Soit $f : ]a,b[\longrightarrow \mathbb{K}$ continue par morceaux et

$\boxed{\varphi : ]\alpha,\beta[\longrightarrow ]a,b[ \text{ une bijection strictement croissante de classe } C^1 \text{ sur } ]\alpha,\beta[.}$

Alors les intégrales $\displaystyle\int_a^b f(t)\,dt$ et $\displaystyle\int_\alpha^\beta (f\circ\varphi)(u)\varphi'(u)\,du$ ont même nature.
Et en cas de convergence, elle sont égales.

On a un résultat analogue avec $\varphi$ bijection strictement décroissante de classe $C^1$

$\boxed{\text{Un changement de variable conserve donc la nature de l'intégrale.}}$

**th. 2**

*Intégration par parties :* Soient $u$ et $u$ des fonctions de classe $C^1$ sur $[a,b[$ où $b\in\overline{\mathbb{R}}$.

Alors $\forall X \in ]a,b[$, $\displaystyle\int_a^X u(t)v'(t)\,dt = u(X)v(X) - u(a)v(a) - \int_a^X u'(t)v(t)\,dt$.

Donc **si** $uv$ a une limite finie en $b$ **alors** les intégrales $\displaystyle\int_a^b uv'$ et $\displaystyle\int_a^b u'v$ ont même nature.

## II - INTÉGRALE IMPROPRE DE FONCTIONS POSITIVES

### 1) Une condition nécessaire et suffisante de convergence

- Soit $[a,b[$ un intervalle de $\mathbb{R}$, avec $a<b$ et $b\in\overline{\mathbb{R}}$.
  Soit $f$ une fonction continue par morceaux sur $[a,b[$ et à valeurs positives.
  Alors $F : x\longmapsto \displaystyle\int_a^x f$ est croissante. Donc :

  $\displaystyle\int_a^b f$ est convergente si et seulement si $F$ est majorée.

  si et seulement si $\exists M\in\mathbb{R} \;/\; \forall x\in [a,b[$, $\displaystyle\int_a^x f(t)\,dt \leqslant M$.

  Si $F$ n'est pas majorée alors $\displaystyle\lim_{x\to b} F(x) = +\infty$.

- Soit $]a,b]$ un intervalle de $\mathbb{R}$, avec $a<b$ et $a\in\overline{\mathbb{R}}$.
  Soit $f$ une fonction continue par morceaux sur $]a,b]$ et à valeurs positives.
  Alors $F : x\longmapsto \displaystyle\int_x^b f$ est décroissante. Donc :

  $\displaystyle\int_a^b f$ est convergente si et seulement si $F$ est majorée.

  si et seulement si $\exists M\in\mathbb{R} \;/\; \forall x\in ]a,b]$, $\displaystyle\int_x^b f(t)\,dt \leqslant M$.

  Si $F$ n'est pas majorée alors $\displaystyle\lim_{x\to a} F(x) = +\infty$.

## 2) Règles usuelles de comparaison

**th. 1** *Critère de "domination"*

Soient $f$ et $g$ des fonctions à valeurs réelles, continues par morceaux sur $[a, b[$ et **positives** au voisinage de $b$.

- **Si** $\left(f = \underset{b}{O}(g) \quad \text{ou} \quad f = \underset{b}{o}(g)\right)$ et **si** $\displaystyle\int_a^b g$ converge **alors** $\displaystyle\int_a^b f$ converge.
- **Si** $\left(f = \underset{b}{O}(g) \quad \text{ou} \quad f = \underset{b}{o}(g)\right)$ et **si** $\displaystyle\int_a^b f$ diverge **alors** $\displaystyle\int_a^b g$ diverge.

**cor.** Soient $f$ et $g$ des fonctions continues par morceaux sur $[a, b[$ et telles que : $0 \leqslant f \leqslant g$.

- **Si** $\displaystyle\int_a^b g$ converge **alors** $\displaystyle\int_a^b f$ converge.
- **Si** $\displaystyle\int_a^b f$ diverge **alors** $\displaystyle\int_a^b g$ diverge.

**th. 2** *Règle des équivalents*

$f$ et $g$ sont deux fonctions à valeurs réelles, continues par morceaux sur $[a, b[$ et **positives** au voisinage de $b$.

**Si** $f \underset{b}{\sim} g$ **alors** les intégrales $\displaystyle\int_a^b f$ et $\displaystyle\int_a^b g$ sont de même nature.

Cela revient à dire que :

**Si** $f \underset{b}{\sim} g$ **alors** $\displaystyle\int_a^b f$ converge si et seulement si $\displaystyle\int_a^b g$ converge.

**Conséquence** : *Règles du* $t^\alpha f(t)$ *en* $+\infty$

Soit $x_0 > 0$ et $f : [x_0, +\infty[ \longrightarrow \mathbb{R}$, à valeurs positives, continue par morceaux sur $[x_0, +\infty[$.

S'il existe $\alpha > 1$ tel que $\displaystyle\lim_{t \to +\infty} t^\alpha f(t) = 0$ alors l'intégrale de $f$ sur $[x_0, +\infty[$ converge.

S'il existe $\alpha \leqslant 1$ tel que $\displaystyle\lim_{t \to +\infty} t^\alpha f(t) = +\infty$ alors l'intégrale de $f$ sur $[x_0, +\infty[$ diverge.

## 3) Cas d'une intégrale nulle

Soit $f : [a, b[ \to \mathbb{R}$. **Si** $\left\{\begin{array}{l} f \text{ est continue sur } [\mathrm{a}, \mathrm{b}[ \\ f \text{ est positive sur } [\mathrm{a}, \mathrm{b}[ \\ \displaystyle\int_{[\mathrm{a},\mathrm{b}[} f \text{ converge et vaut } 0 \end{array}\right.$ **alors** $f$ est nulle sur $[a, b[$.

## 4) Comparaison série-intégrale

**th.** Soit $f : [0, +\infty[ \longrightarrow \mathbb{R}_+$, continue ou continue par morceaux sur $\mathbb{R}_+$, positive et décroissante.

La série $\left(\sum f(n)\right)_{n \geqslant 0}$ converge $\iff$ $\displaystyle\int_{\mathbb{R}_+} f(t)\, dt$ converge.

Cela revient à dire que la série $\left(\sum f(n)\right)_{n \geqslant 0}$ et l'intégrale $\displaystyle\int_{\mathbb{R}_+} f(t)\, dt$ ont même nature.

## III - ABSOLUE CONVERGENCE - INTÉGRABILITÉ

### 1) *Définition*

**déf.** *Soit* $f : I \longrightarrow \mathbb{K}$ *continue par morceaux sur un intervalle* $I$ *de la forme :*

$I = [a,b]$ *ou* $]a,b]$ *ou* $[a,b[$ *ou* $]a,b[$ *avec* $-\infty \leqslant a < b \leqslant +\infty$.

*On dit que* $f$ *est* ***intégrable sur I*** *ou que l'intégrale* $\displaystyle\int_I f$ *est* ***absolument convergente*** *lorsque* $\displaystyle\int_I |f|$ *est convergente.*

### 2) *Théorèmes*

**th.** 1 **Si** $f$ est intégrable sur $I$ **alors** $\displaystyle\int_I f$ est convergente. Et dans ce cas, $\displaystyle\left|\int_I f\right| \leqslant \int_I |f|$.

Démonstration : Considérons $f : [a,b[\longrightarrow \mathbb{K}$ continue par morceaux sur $[a,b[$.

- Supposons $f$ à valeurs réelles :

  On a $-|f| \leqslant f \leqslant |f|$ donc $0 \leqslant f + |f| \leqslant 2|f|$.

  Or par hypothèse $\displaystyle\int_I |f|$ converge, donc grâce au th de comparaison sur les fonctions positives, $\displaystyle\int_I (f+|f|)$ converge.

  Or $f = (f+|f|) - |f|$ donc, en tant que somme d'intégrales convergentes, $\displaystyle\int_I f$ converge.

- Supposons $f$ à valeurs complexes :

  Alors $Re(f)$ et $Im(f)$ sont continues par morceaux sur $[a,b[$ et $|Re(f)| \leqslant |f|$ et $|Im(f)| \leqslant |f|$.

  Donc grâce au théorème de comparaison sur les fonctions positives, on en déduit que $\displaystyle\int_a^b |Re(f)|$ et $\displaystyle\int_a^b |Im(f)|$ convergent. Comme on a des fonctions à valeurs réelles, d'après le premier cas, $\displaystyle\int_a^b Re(f)$ et $\displaystyle\int_a^b Im(f)$ convergent.

  Comme $f = Re(f) + \mathrm{i}\, Im(f)$, $\displaystyle\int_a^b f$ converge.

- Dans les deux cas :

  D'après les propriétés de l'intégrale sur un segment : $\forall\, x \in [a,b[$, $\displaystyle\left|\int_a^x f\right| \leqslant \int_a^x |f|$

  En passant à la limite quand $x$ tend vers $b$, on obtient : $\displaystyle\left|\int_a^b f\right| \leqslant \int_a^b |f|$

**th.** 2 On note $L^1(I,\mathbb{K})$ l'ensemble des fonctions continues par morceaux sur $I$, à valeurs dans $\mathbb{K}$ et intégrables sur $I$.

$L^1(I,\mathbb{K})$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{C}^0_m(I,\mathbb{K})$.

Démonstration :

- La fonction nulle appartient bien à $L^1(I,\mathbb{K})$.
- Soit deux fonctions $f$ et $g$ de $L^1(I,\mathbb{K})$ et $\lambda \in \mathbb{K}$. On a : $|\lambda f + g| \leqslant |\lambda f| + |g| \leqslant |\lambda|\ |f| + |g|$.

  Or, par hypothèse, $\displaystyle\int_I |f|$ et $\displaystyle\int_I |g|$ convergent et $|\lambda|$ est un scalaire donc $\displaystyle\int_I (|\lambda|\ |f| + |g|)$ converge.

  Donc grâce au th. de comparaison sur les fonctions positives, $\displaystyle\int_I |\lambda f + g|$ converge, ie $\lambda f + g \in I$.

  Ainsi $L^1(I,\mathbb{K})$ est stable par combinaison linéaire.

- Conclusion : $L^1(I,\mathbb{K})$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{C}^0_m(I,\mathbb{K})$.

### 3) *Critères d'intégrabilité*

- **Condition nécessaire et suffisante**

Soient $f$ une fonction à valeurs réelles ou complexes, continue par morceaux sur $[a,b[$

Alors $\displaystyle F : x \longmapsto \int_a^x |f(t)|\, dt$ est croissante. Donc :

$f$ est intégrable sur $[a,b[$ si et seulement si $F$ est majorée.

si et seulement si $\displaystyle\exists\, M \in \mathbb{R}\ /\ \forall\, x \in\, ]a,b[,\ \int_a^x |f(t)|\, dt \leqslant M$.

- **Critères de comparaison**

Tous les théorèmes de comparaison vus dans **II** s'appliquent à $|f|$ et $|g|$.