PSI

INTÉGRALE À PARAMÈTRE

Dans tout le chapitre, I est un intervalle quelconque, non vide et non réduit à un point de $\mathbb{R}$. $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

I - CAS D'UN PARAMÈTRE ENTIER

1) Intégration sur un intervalle quelconque I et suites de fonctions

th. 1

Théorème de convergence dominée :

Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions de I dans $\mathbb{K}$.

Si **1)** pour tout n de $\mathbb{N}$, f_n est continue par morceaux sur I

2) la suite de fonctions (f_n) converge simplement vers une fonction f continue par morceaux sur I

3) il existe une fonction φ, continue par morceaux sur I et intégrable sur I telle que :

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad \forall\, t \in I, \quad |f_n(t)| \leqslant \varphi(t)$$

alors pour tout n de $\mathbb{N}$, f_n est intégrable sur I, et f est intégrable sur I

et $\displaystyle \lim_{n\to+\infty} \int_I f_n = \int_I f = \int_I \lim_{n\to+\infty} f_n$

Remarques :

- La troisième hypothèse, la plus importante, est l' hypothèse de domination.
  Par théorème de comparaison sur les fonctions positives, elle prouve que les f_n sont intégrables sur I.
  De plus, en passant à la limite quand $n \to +\infty$, on obtient $\forall\, t \in I$, $|f(t)| \leqslant \varphi(t)$ et donc f est également intégrable sur I.

- Ce th. s'applique aussi quand $I = [a, b]$ avec $(a, b) \in \mathbb{R}^2$.
  L'hypothèse de domination est alors souvent évidente.
  Lorsque $I = [a, b]$, nous avons vu un théorème qui s'applique en cas de convergence uniforme.

2) Intégration sur un intervalle quelconque I et séries de fonctions

th. 2

Intégration termes à termes :

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions de I dans $\mathbb{K}$.

Si **1)** pour tout n de $\mathbb{N}$, u_n est continue par morceaux sur I et intégrable sur I

2) la série de fonctions $\left(\sum u_n\right)$ converge simplement sur I vers S, continue par morceaux sur I

3) la série numérique $\left(\sum \displaystyle\int_I |u_n(t)|\, dt\right)$ converge

alors S est intégrable sur I et $\displaystyle \int_I S(t)\, dt = \int_I \sum_{n=0}^{+\infty} u_n(t)\, dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_I u_n(t)\, dt$

et on a de plus $\displaystyle \int_I \left| \sum_{n=0}^{+\infty} u_n(t)\, dt \right| \leqslant \sum_{n=0}^{+\infty} \int_I |u_n(t)|\, dt$

Remarque :

- Dans **1)**, l'intégrabilité de u_n sur I justifie l'existence de $\displaystyle\int_I |u_n(t)|\, dt$ qui apparait dans **3)**.

- Lorsque $I = [a, b]$, nous avons vu un théorème qui s'applique en cas de convergence uniforme.

II - CAS D'UN PARAMÈTRE RÉEL

1) *Rappels*

2) *Cadre d'étude*

Soient I et A deux intervalles de $\mathbb{R}$.

On envisage des fonctions de la forme $\begin{array}{rccc} f: & A \times I & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ & (x,t) & \longmapsto & f(x,t) \end{array}$

On aimerait alors définir et étudier $\begin{array}{rccc} F: & A & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ & x & \longmapsto & \displaystyle\int_I f(x,t)\,dt. \end{array}$

Si I n'est pas un segment, il s'agit d'une intégrale impropre.

3) *Continuité d'une intégrale à paramètre*

th. 3

Si **1)** $\forall x \in A, \quad (t \longmapsto f(x,t))$ est continue par morceaux sur I

2) $\forall t \in I, \quad (x \longmapsto f(x,t))$ est continue sur A

3) pour $[\alpha, \beta]$ un segment quelconque de A,

il existe $\varphi : t \longmapsto \varphi(t)$, continue par morceaux et intégrable sur I telle que

$$\forall x \in [\alpha,\beta], \quad \forall t \in I, \quad |f(x,t)| \leqslant \varphi(t)$$

alors $\forall x \in A, \quad (t \longmapsto f(x,t))$ est intégrable sur I et $F : x \longmapsto \displaystyle\int_I f(x,t)\,dt$ est continue sur A

Remarques :

- La troisième hypothèse, la plus importante, est l' hypothèse de domination.
  Par théorème de comparaison sur les fonctions positives, elle prouve que pour tout élément x de A, $(t \longmapsto f(x,t))$ est intégrable sur I.

- La notion de continuité est une notion locale et on s'intéresse à la continuité en un point x.
  C'est pourquoi dans **3)**, on se limite à $x \in [\alpha, \beta]$, $[\alpha, \beta]$ étant un segment quelconque de A.

4) *Dérivabilité d'une intégrale à paramètre*

th. 4

Si **1)** $\forall x \in A, \quad (t \longmapsto f(x,t))$ est continue par morceaux sur I et intégrable sur I

2) $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ existe sur $A \times I$ et $\forall t \in I, \quad \left(x \longmapsto \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,t)\right)$ est continue sur A

et $\forall x \in A, \quad \left(t \longmapsto \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,t)\right)$ est continue par morceaux sur I

3) pour $[\alpha, \beta]$ un segment quelconque de A,

il existe $\psi : t \longmapsto \psi(t)$, continue par morceaux et intégrable sur I telle que

$$\forall x \in [\alpha,\beta], \quad \forall t \in I, \quad \left|\frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\right| \leqslant \psi(t)$$

alors $\forall x \in A, \quad \left(t \longmapsto \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,t)\right)$ est intégrable sur I et

$F : x \longmapsto \displaystyle\int_I f(x,t)\,dt$ est de classe C^1 sur A et $\forall x \in A, \quad F'(x) = \displaystyle\int_I \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\,dt$

Remarques :

- Ce théorème peut s'utiliser directement.
  Dans **1)**, l'hypothèse que pour tout élément x de A, $(t \longmapsto f(x,t))$ est continue par morceaux sur I et intégrable sur I, justifie que la fonction F est bien définie sur A.

- La troisième hypothèse, la plus importante, est l' hypothèse de domination.
  Par théorème de comparaison sur les fonctions positives, elle prouve que pour tout élément x de A, $\left(t \longmapsto \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,t)\right)$ est intégrable sur I

- La notion de dérivabilité est une notion locale et on s'intéresse à la dérivabilité en un point x.
  C'est pourquoi dans **3)**, on se limite à $x \in [\alpha, \beta]$, $[\alpha, \beta]$ étant un segment quelconque de A.

*5) **Extension aux fonctions de classe C^p***

th. 5

Soit $p \in \mathbb{N}^*$. On suppose que pour tout k dans $[\![1, p]\!]$, existe sur $A \times I$. On convient que $\dfrac{\partial^0 f}{\partial x^0} = f$

Si **1)** $\forall\, k \in [\![0, p-1]\!]$, $\forall\, x \in A$, $\left(t \longmapsto \dfrac{\partial^k f}{\partial x^k}\right)$ est continue par morceaux sur I et intégrable sur I

2) $\forall\, x \in A$, $\left(t \longmapsto \dfrac{\partial^p f}{\partial x^p}(x,t)\right)$ est continue par morceaux sur I

$\forall\, t \in I$, $\left(x \longmapsto \dfrac{\partial^p f}{\partial x^p}(x,t)\right)$ est continue sur A

3) pour $[\alpha, \beta]$ un segment quelconque de A,

il existe $\psi : t \longmapsto \psi(t)$, continue par morceaux et intégrable sur I telle que

$$\forall\, x \in [\alpha, \beta], \quad \forall\, t \in I, \quad \left|\frac{\partial^p f}{\partial x^p}(x,t)\right| \leqslant \psi(t)$$

alors $F : x \longmapsto \displaystyle\int_I f(x,t)\,dt$ est de classe C^p sur A et $\forall\, k \in [\![1, p]\!]$, $\forall\, x \in A$, $F^{(k)}(x) = \displaystyle\int_I \frac{\partial^k f}{\partial x^k}(x,t)\,dt$

*6) **Utilisation du théorème de convergence dominée***

Notons b une extrémité finie ou infinie de l'intervalle A.
On souhaite calculer si elle existe la limite de $F(x)$ lorsque x tend vers b. Méthode :

- On utilise la caractérisation séquentielle des limites :
  on prend une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de réels de A qui a pour limite b et on s'intéresse à $\lim\limits_{n\to+\infty} F(x_n)$.

- On a : $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $F(x_n) = \displaystyle\int_I f(x_n, t)\,dt$.
  Le théorème de convergence dominée permet donc d'étudier cette limite. Si elle vaut $\ell \in \mathbb{K}$, alors le théorème de la caractérisation séquentielle des limites permet de conclure que $\lim\limits_{x\to b} F(x) = \ell$.

*7) **La fonction Γ***

$$\Gamma : x \longmapsto \int_0^{+\infty} t^{x-1}\ \mathrm{e}^{\,-t}\ dt$$

a) Γ est définie et continue sur $\mathbb{R}_+^*$.
b) $\forall\, x \in \mathbb{R}_+^*$, $\Gamma(x+1) = x\,\Gamma(x)$
c) Γ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$.
d) Equivalent de Γ au voisinage de 0.
e) Calcul de $\Gamma(1/2)$.