

PROBLEME 6 - CORRIGE

PARTIE e3a - Rosetta

Première partie : atterrissage du module Philae

A) Champ gravitationnel de la comète

A1) $m_{\text{com}} = \rho_{\text{com}} \frac{4}{3} \pi r_{\text{com}}^3$

$$r_{\text{com}} = \left(\frac{3}{4\pi} \frac{m_{\text{com}}}{\rho_{\text{com}}} \right)^{\frac{1}{3}}$$

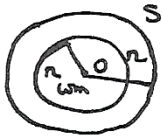
A.N.: $r_{\text{com}} = 1,8 \text{ km}$

A2) Soit O le centre de la balle sphérique équivalente à la comète.

Tout plan contenant O et M est un plan de symétrie de la répartition des masses $\Rightarrow \vec{g}_{\text{com}} = g(r, \theta, \varphi) \vec{e}_r$ en coordonnées sphériques.

Il y a invariance de la répartition de masse par toute rotation d'angle θ ou $\varphi \Rightarrow \vec{g}_{\text{com}} = g(r) \vec{e}_r$.

Th. de Gauss pour la gravitation: $\oint_S \vec{g}_{\text{com}} d\vec{S} = -4\pi G m_{\text{int}}$



S: sphère de centre O et de rayon $r > r_{\text{com}}$.

$m_{\text{int}} = m_{\text{com}}$

$$\oint_S \vec{g}_{\text{com}} d\vec{S} = g(r) \times 4\pi r^2 = -4\pi G m_{\text{com}}$$

$$g(r) = -G \frac{m_{\text{com}}}{r^2}$$

Donc pour $r > r_{\text{com}}$ $\vec{g}_{\text{com}} = -G \frac{m_{\text{com}}}{r^2} \vec{e}_r$

A3) $[g_{\text{com}}] = \frac{L^3 M^{-1} T^{-2} \times M}{L^2} = L T^{-2}$ ce qui est la bonne dimension pour un champ de pesanteur

A4) $g_{\text{com}}(r_{\text{larg}}) = 1,3 \cdot 10^{-6} \text{ ms}^{-2}$ $g_{\text{com}}(r_{\text{com}}) = 2,1 \cdot 10^{-4} \text{ ms}^{-2}$

g_{com} varie beaucoup entre r_{com} et r_{larg} , il est impossible de considérer qu'il est uniforme.

B) Trajectoire de Philae

B1) D'après le principe fondamental de la dynamique dans R_0 galiléen:

$$m_{\text{ph}} \vec{a} = m_{\text{ph}} \vec{g}_{\text{com}}$$

$$m_{\text{ph}} \ddot{r} \vec{e}_r = m_{\text{ph}} - G \frac{m_{\text{com}}}{r^2} \vec{e}_r$$

Soit

$$\ddot{r} + \frac{G m_{\text{com}}}{r^2} = 0$$

B2) Si $v_0 = 0 \text{ ms}^{-1}$, on lit pour $r = r_{\text{com}} = 1800 \text{ m}$ $T_0 \approx 145000 \text{ s} \approx 1 \text{ j } 16 \text{ h}$.

B3) $T = 7 \text{ h} = 7 \times 3600 = 25200 \text{ s} \Rightarrow$ courbe f $v_0 = -0,75 \text{ ms}^{-1}$

B4) On lit sur la quatrième courbe en partant du bas ($v_0 = -0,75 \text{ ms}^{-1}$ pour $r_{\text{larg}} = 22,5 \text{ km}$), $\dot{r}(r_{\text{com}}) = -1,1 \text{ ms}^{-1}$.

$$B)5) \delta W = -dE_{\text{com}} = -G \frac{m_{\text{com}} m}{r^2} dr = -d\left(-\frac{G m_{\text{com}} m}{r}\right).$$

d'où, avec $\lim_{r \rightarrow \infty} E_{\text{com}} = 0$

$$E_{\text{com}} = -\frac{G m_{\text{com}} m}{r}$$

B)6) Philae n'est soumis qu'à des forces conservatives, son énergie mécanique est donc constante pendant la chute.

$$B)7) E_m = \frac{1}{2} m_{\text{ph}} v^2 - G \frac{m_{\text{com}} m_{\text{ph}}}{r} = \text{cte.}$$

$$\frac{1}{2} v_i^2 - G \frac{m_{\text{com}}}{r_{\text{larg}}} = \frac{1}{2} v_f^2 - G \frac{m_{\text{com}}}{r_{\text{com}}}$$

$$v_f = \left(v_i^2 + 2Gm_{\text{com}} \left(\frac{1}{r_{\text{com}}} - \frac{1}{r_{\text{larg}}} \right) \right)^{1/2}$$

$$v_f = 1,1 \text{ ms}^{-1}$$

On retrouve le résultat de B)4).

C) Philae à la surface de la comète

A la surface de la comète : $\vec{P} = m_{\text{ph}} \vec{g}_{\text{com}}$

$$P = \frac{G m_{\text{ph}} m_{\text{com}}}{r_{\text{com}}^2} = 2,0 \cdot 10^{-2} \text{ N}$$

Sur Terre, un objet de poids identique a une masse de 2g environ.

D) Rosetta autour de la comète

$$D)1) \vec{OM} = r \vec{e}_r$$

$$\vec{v} = \frac{d\vec{OM}}{dt} = \dot{r} \vec{e}_r + r \dot{\theta} \vec{e}_\theta$$

$$\vec{a} = (\ddot{r} - r \dot{\theta}^2) \vec{e}_r + (2\dot{r} \dot{\theta} + r \ddot{\theta}) \vec{e}_\theta$$

Mouvement circulaire : $r = \text{cte} = r_1$

$$\vec{v} = r_1 \dot{\theta} \vec{e}_\theta$$

$$\vec{a} = -r_1 \dot{\theta}^2 \vec{e}_r + r_1 \ddot{\theta} \vec{e}_\theta$$

D)2) Dans le référentiel cométo-centrique supposé galiléen :

$$m_{\text{ros}} \vec{a} = m_{\text{ros}} \vec{g}_{\text{com}}$$

En projection sur $\vec{e}_r$: $-m_{\text{ros}} r_1 \dot{\theta}^2 = -m_{\text{ros}} G \frac{m_{\text{com}}}{r_1^2} = -m_{\text{ros}} \frac{v_1^2}{r_1}$

$$v_1 = \sqrt{\frac{G m_{\text{com}}}{r_1}}$$

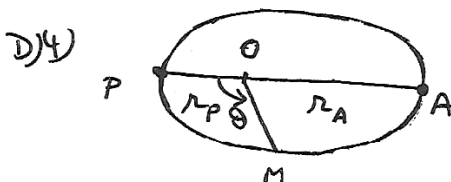
$$v_1 = 15 \text{ ms}^{-1}$$

Remarque : sur $\vec{e}_\theta$, on obtient $r_1 \ddot{\theta} = 0 \Rightarrow \ddot{\theta} = 0$

$$D)3) v_1 = r_1 \dot{\theta} = r_1 \frac{2\pi}{T_1}$$

$$T_1 = 2\pi \sqrt{\frac{r_1^3}{G m_{\text{com}}}}$$

$$T_1 = 1,26 \cdot 10^6 \text{ s} \approx 14,6 \text{ j.}$$



$$D)5) E_m = \frac{1}{2} m_{\text{ros}} v^2 - \frac{G m_{\text{ros}} m_{\text{com}}}{r}$$

Sur l'orbite elliptique: $E_m = - \frac{G m_{\text{ros}} m_{\text{com}}}{2a}$

avec a : $\frac{1}{2}$ grand axe
de l'ellipse
 $2a = r_p + r_A = r_p + r_a$.

$$E_m = - \frac{G m_{\text{ros}} m_{\text{com}}}{r_a + r_p}$$

$$D)6) \frac{1}{2} m_{\text{ros}} v_p^2 - \frac{G m_{\text{ros}} m_{\text{com}}}{r_p} = - \frac{G m_{\text{ros}} m_{\text{com}}}{r_a + r_p}$$

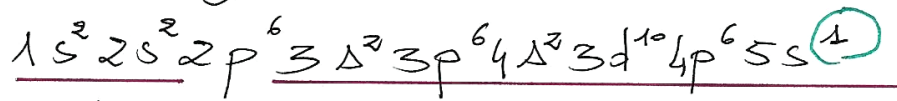
$$v_p = \left[2 G m_{\text{com}} \left(\frac{1}{r_p} - \frac{1}{r_a + r_p} \right) \right]^{1/2}$$

$$v_p = 30 \text{ cm.s}^{-1}$$

D)7) Sur l'orbite circulaire de rayon r_p : $v_p' = \sqrt{\frac{G m_{\text{com}}}{r_p}} = 26 \text{ cm.s}^{-1}$.
Les propulseurs doivent donc ralentir la sonde de $\Delta v = 4 \text{ cm.s}^{-1}$.

Q₁: Avec les règles habituelles, on obtient

①



c'est un alcalin.

Q₂: La force qui relie l'e⁻ au noyau est attractive

donc $U(r) < 0$

R: Si on veut être plus précis, on écrit

$$\vec{F} = -\text{grad} U(r) = \left(\frac{Z'(r)}{r} - \frac{Z(r)}{r^2} \right) q \vec{u}_r$$

Or $Z(r)$ est décroissante (cf. après) et $Z'(r) < 0$,
on a donc bien une force attractive.

Q₃: Quand $r \rightarrow 0$, la sphère de rayon r englobe
le noyau de charge Ze et de moins ou moins
d'e⁻ du cortège électronique. À la limite, l'e⁻
ne voit plus que le noyau et $Z(r) \rightarrow Z$ quand
 $r \rightarrow 0$.

Quand $r \rightarrow \infty$, la sphère de rayon r englobe
 Ze charges du noyau et $(Z-1)(-e)$ charges
du cortège électronique : $Z(r) \rightarrow 1$
 $r \rightarrow +\infty$.

Q₄: $a_0 = \frac{1}{\hbar} \frac{q^2}{m_e} \frac{1}{\omega}$

* $q = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0}$ donc $[q] = [E_{\text{magique}}] L$

car $\frac{q^2}{4\pi\epsilon_0 r}$ est une E_p .

(2)

$$[h] = [Energie][Fréquence]^{-1}$$

$$[a_0] = L \text{ et } [m_e = M]$$

$$\text{ou } Energie = ML^2T^{-2}$$

$$\text{D'où } [h] = ML^2T^{-1}, [q] = ML^3T^{-2}$$

On obtient alors :

$$\text{Avec } L : 2\alpha + 3\gamma = 1; \text{ avec } M : \alpha + \beta + \gamma = 0$$

$$\text{et avec } T : 0 = -\alpha - 2\beta.$$

$$\text{La résolution donne } \underline{\alpha = 2; \beta = -1; \gamma = -1.}$$

$$\text{A.V. : } \underline{a_0 = 52,6 \text{ pm.}}$$

$$\text{Q.5. : } m \gg 1 \text{ donc } r \text{ est très grand et } z \rightarrow 1$$

$$\text{d'où } U(r) = -\frac{q}{r}.$$

$$\text{Q.6. : La force est centrale } \vec{F} = F(r)\vec{u}_r \text{ (cf R de Q2) avec ici, compte-tenu de Q5, } F(r) = \frac{q}{r^2}$$

$$\text{Donc } \vec{M}_O(\vec{F}) = \vec{OM} \wedge \vec{F} = \vec{0}$$

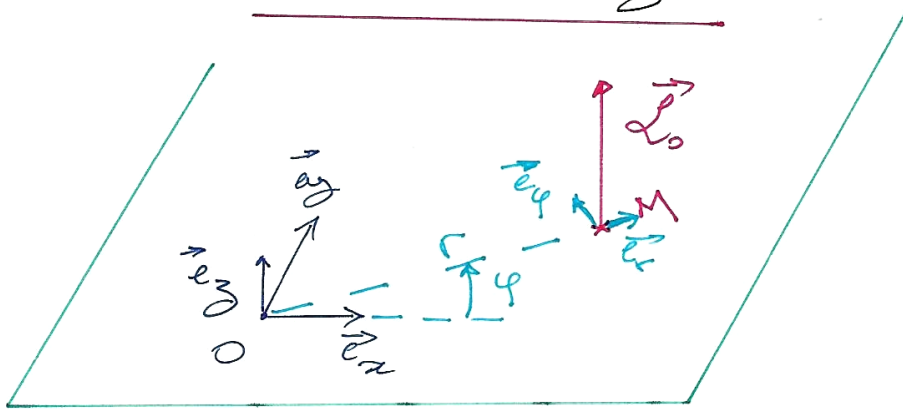
$$\text{Donc } \frac{d\vec{L}_O}{dt} = \vec{0} \text{ (TMC) et } \vec{L}_O \text{ est constant}$$

$$\text{Or } \vec{L}_O = \vec{OM} \wedge \vec{v}(M), \text{ donc } \vec{OM} \perp \vec{L}_O \forall t$$

et comme O est fixe, le point M appartient au plan contenant O et $\perp$ à $\vec{L}_O$ et ce $\forall t$

(3)

Enfin, $\vec{OM} = r\vec{e}_r$ et $\vec{v} = \dot{r}\vec{e}_r + r\dot{\varphi}\vec{e}_\varphi$
 soit $\vec{L}_0 = m_e r^2 \dot{\varphi} \vec{e}_z$.



Q7. La force $\vec{F}(r)$ est conservative

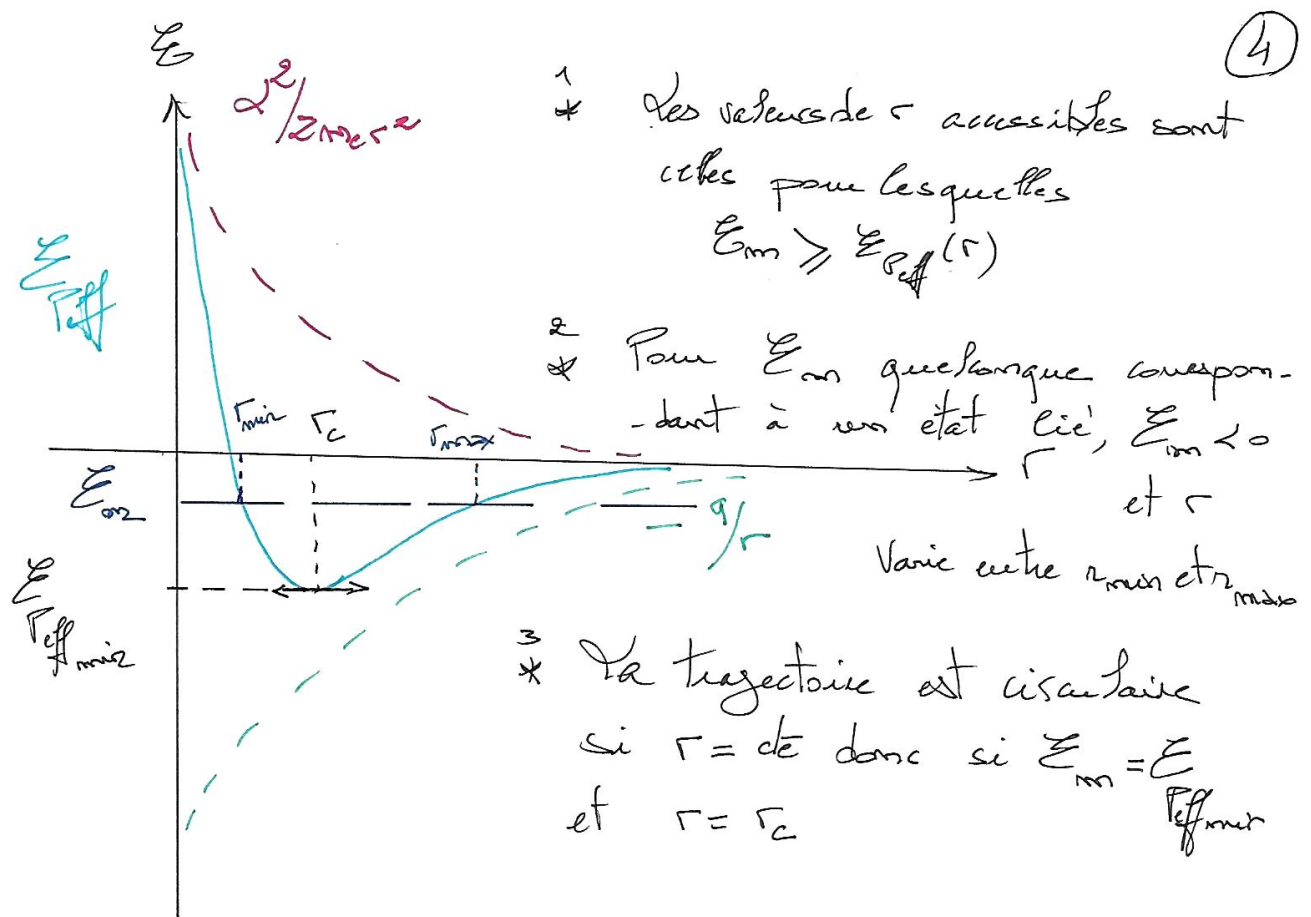
et $E_m = \frac{1}{2} m_e v^2 - \frac{q}{r}$ est constante

$$E_m = \frac{1}{2} m_e (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\varphi}^2) - \frac{q}{r}$$

$$\text{or } \dot{\varphi} = \frac{\alpha}{m_e r^2}$$

D'où
$$E_m = \frac{1}{2} m_e \dot{r}^2 + \underbrace{\frac{1}{2} \frac{\alpha^2}{m_e} \cdot \frac{1}{r^2}}_{\vec{L}_{\text{eff}}(r)} - \frac{q}{r}$$

Q8. On trace l'allure de $E_{\text{eff}}(r)$



Le calcul de $\frac{dE_{\text{eff}}}{dr}$ en $r = r_c$ donne

$$-\frac{L^2}{m_e r_c^3} + \frac{q}{r_c^2} = 0 \quad \text{soit} \quad r_c = \frac{L^2}{m_e q}$$

soit avec $a_0 = \frac{\hbar^2}{q m_e}$,

$$\underline{r_c = \frac{a_0 L^2}{\hbar^2}}$$