

PROBLEME N°6

REVISIONS DE MECANIQUE DU POINT

I. E3a PSI 2015 - extrait

Rosetta est une mission spatiale de l'Agence spatiale européenne dont l'objectif principal est de recueillir des données sur la composition du noyau de la comète 67P/Tchourioumov-Guérassimenko et sur son comportement à l'approche du Soleil.

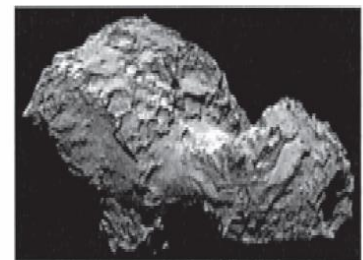
La sonde spatiale s'est placée en orbite autour de la comète puis, après une période d'observation de plusieurs mois, a envoyé le 12 novembre 2014 Philae, un petit atterrisseur, se poser sur sa surface pour analyser la composition de son sol et sa structure.

PREMIÈRE PARTIE

ATTERRISSAGE DU MODULE PHILAE

Données :

- masse de la comète : $m_{com} = 1,0 \cdot 10^{13} \text{ kg}$
- masse volumique de la comète : $\mu_{com} = 400 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$
- période de rotation propre de la comète : $T_{com} = 12,4 \text{ h}$
- constante gravitationnelle : $G = 6,67 \cdot 10^{-11} \text{ m}^3 \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{s}^{-2}$
- distance de largage par rapport au centre : $r_{larg} = 22,5 \text{ km}$
- masse de la sonde Rosetta : $m_{ros} = 1500 \text{ kg}$
- masse de l'atterrisseur Philae : $m_{ph} = 98 \text{ kg}$
- vitesse de la lumière dans le vide : $c = 3,00 \cdot 10^8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$



Dans cette partie, la comète est modélisée par une boule homogène de masse m_{com} et de masse volumique μ_{com} .

La distance entre un point M et le centre O de la comète est notée $r = OM$.

A / CHAMP GRAVITATIONNEL DE LA COMETE

- A1.** Déterminer le rayon r_{com} de la boule équivalente à la comète.
- A2.** Montrer, en appliquant soigneusement le théorème de Gauss, que le champ gravitationnel $\vec{g}_{com}$ dû à la comète, s'écrit $\vec{g}_{com} = -G \frac{m_{com}}{r^2} \vec{e}_r$ (pour $r > r_{com}$).
- A3.** Vérifier par analyse dimensionnelle l'homogénéité de la relation obtenue.
- A4.** Peut-on considérer le champ gravitationnel de la comète uniforme lors de la chute du module Philae, suite à son largage ?

B / TRAJECTOIRE DE PHILAE

Approche numérique de l'équation du mouvement

On étudie la chute libre de l'atterrisseur Philae, dans un référentiel dont l'origine est le centre O de la comète et qui tourne avec Rosetta, de sorte que le vecteur $\vec{e}_r$ pointe constamment vers l'atterrisseur (accélération $\vec{a} = \ddot{r} \vec{e}_r$). Ce référentiel peut être considéré comme galiléen.

- B1.** Etablir l'équation du mouvement de l'atterrisseur Philae, une fois séparé de Rosetta, en projection sur l'axe radial.

Cette équation peut être résolue numériquement. L'évolution temporelle de la distance r est représentée sur la figure 1, à partir de la distance initiale $r(t=0) = r_{larg}$, pour différentes vitesses verticales initiales $v_0 = \dot{r}(t=0)$.

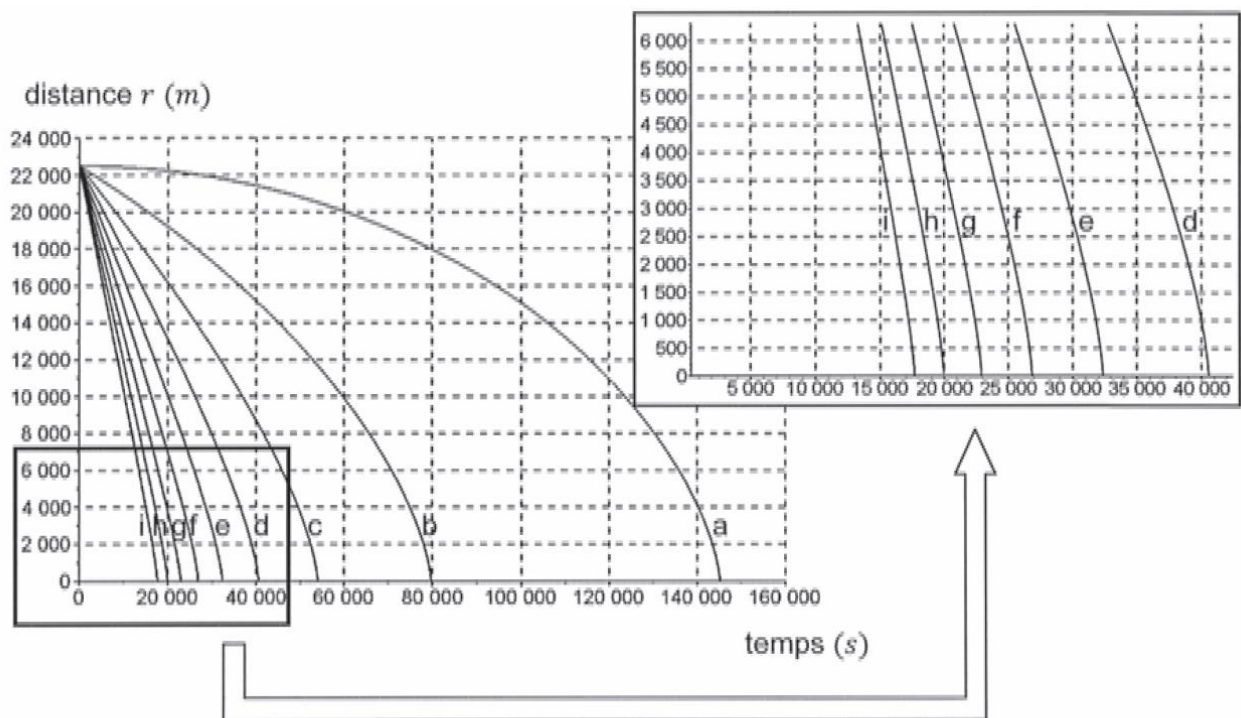


Figure 1 - Evolution temporelle de l'altitude pour différentes vitesses initiales :

a : $v_0 = 0 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ b : $v_0 = -0,15 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ c : $v_0 = -0,30 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$
 d : $v_0 = -0,45 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ e : $v_0 = -0,60 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ f : $v_0 = -0,75 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$
 g : $v_0 = -0,90 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ h : $v_0 = -1,05 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ i : $v_0 = -1,20 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$

B2. Déterminer la durée τ_0 de la chute de Philae s'il est abandonné par Rosetta avec une vitesse verticale nulle.

B3. La durée réelle de la chute est $\tau \approx 7 \text{ h}$. En déduire la vitesse verticale initiale communiquée à l'atterrisseur.

Différentes trajectoires de phase sont représentées sur la figure 2, en fonction de la vitesse verticale initiale.

B4. Déterminer, par lecture graphique, la vitesse verticale atteinte par Philae au moment du contact avec la comète.

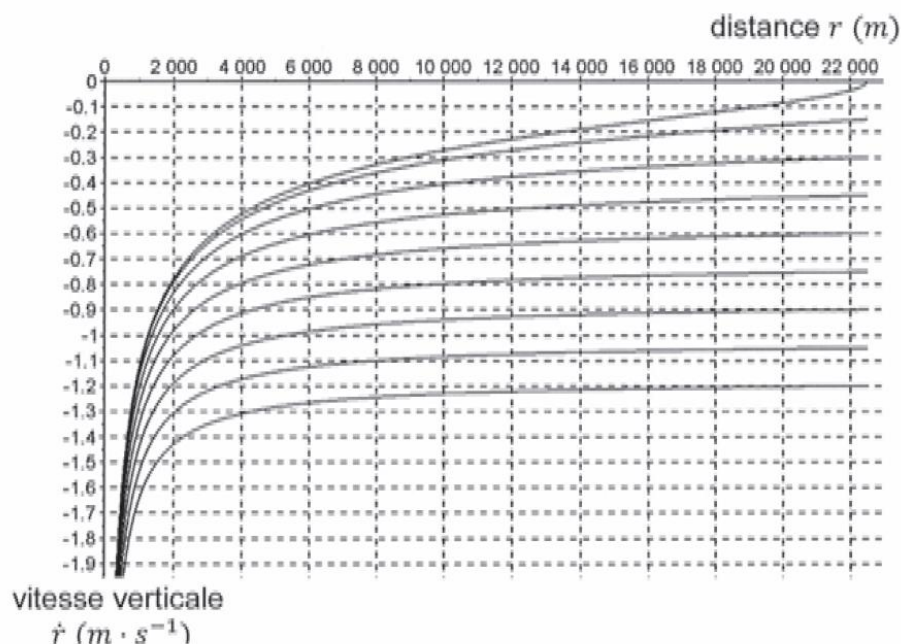


Figure 2 - Trajectoires de phase pour différentes vitesses initiales

Approche énergétique

L'objectif est de retrouver la vitesse atteinte par l'atterrisseur au moment du contact avec la comète.

- B5.** Etablir l'expression de l'énergie potentielle gravitationnelle $E_{p_{com}}$ d'un point matériel de masse m situé à la distance $r > r_{com}$ du centre de la comète, en fonction de G , m , m_{com} et r (on fixe $E_{p_{com}}(r \rightarrow \infty) = 0$).
- B6.** Lors de la chute de Philae, préciser comment évolue l'énergie mécanique de l'atterrisseur.
- B7.** En déduire, littéralement puis numériquement, la vitesse atteinte par l'atterrisseur lors du contact avec la comète.

C / PHILAE A LA SURFACE DE LA COMETE

On s'intéresse à présent au module Philae, une fois celui-ci posé sur la surface de la comète.

Lors du largage de Philae, le 12 novembre 2014, plusieurs journalistes commentent l'événement : « Philae pèse 1,7 g sur la comète ». Qu'en pensez-vous ?

D / ROSETTA AUTOUR DE LA COMETE

Avant de larguer l'atterrisseur Philae, la sonde Rosetta s'est rapprochée par paliers de la comète. Le 10 septembre 2014, elle se situe sur une orbite circulaire de rayon $r_1 = 30$ km.

- D1.** Donner les expressions en coordonnées polaires de la vitesse et de l'accélération d'un point matériel M en mouvement circulaire.
- D2.** Exprimer la vitesse v_1 de la sonde en orbite circulaire de rayon r_1 autour de la comète, en fonction de G , m_{com} et r_1 . Effectuer l'application numérique.
- D3.** En déduire sa période T_1 . Effectuer l'application numérique.

La sonde parcourt, à partir du 8 octobre 2014, une orbite elliptique avec un apocentre A situé à la distance $r_a = r_{max} = 20$ km du centre O de la comète et un péricentre P caractérisé par $r_p = r_{min} = 10$ km. Le 15 octobre, la propulsion est utilisée pour placer la sonde sur une orbite circulaire de rayon $r_p = 10$ km.

- D4.** Représenter sur un schéma l'orbite elliptique, en faisant apparaître le centre O de la comète, ainsi que les distances r_a et r_p .
- D5.** Exprimer l'énergie mécanique de la sonde sur l'orbite elliptique.
- D6.** Sur cette orbite, en déduire la vitesse v_p de Rosetta en P , en fonction de G , m_{com} , r_a et r_p . Effectuer l'application numérique.
- D7.** Pour placer la sonde en orbite circulaire de rayon r_p , la propulsion est utilisée lorsque Rosetta est au péricentre. Préciser numériquement la variation de vitesse nécessaire.

I Étude des atomes de Rydberg circulaires

Les atomes utilisés dans l'expérience sont des atomes de Rubidium dont l'électron situé sur la couche électronique la plus énergétique est excité dans un état de nombre quantique principal n très élevé. Des atomes ainsi excités sont appelés *atomes de Rydberg*. Si de plus le nombre quantique secondaire ℓ de l'électron excité est maximum, alors on parle d'*atomes de Rydberg circulaires*.

I.A – Préliminaires

Q 1. Donner la structure électronique du Rubidium ($Z = 37$) dans son état fondamental. Entourer le ou les électron(s) de valence. À quelle famille cet élément appartient-il ?

Considérons un atome polyélectronique contenant Z électrons. Le noyau sera considéré comme ponctuel et fixe en O . On s'intéresse à l'électron de la couche électronique la plus énergétique que l'on repère en coordonnées sphériques. L'énergie potentielle électrostatique de cet électron est de la forme

$$U(r) = -\frac{Z(r)q}{r}$$

où l'on a posé $q = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0}$ avec ϵ_0 la permittivité diélectrique du vide. La fonction $Z(r)$ est positive et vérifie $Z(r \rightarrow 0) = Z$ et $Z(r \rightarrow +\infty) = 1$.

Q 2. Justifier le signe de $U(r)$.

Q 3. Interpréter physiquement les valeurs limites de la fonction $Z(r)$ en $r \rightarrow 0$ et $r \rightarrow +\infty$.

Q 4. On cherche un ordre de grandeur de la taille typique a_0 de l'atome. On estime que a_0 est de la forme $a_0 = \hbar^\alpha q^\beta m_e^\gamma$ où m_e est la masse de l'électron. Établir soigneusement que $\alpha = 2$, $\beta = -1$ et $\gamma = -1$. La grandeur a_0 est appelée rayon de l'atome de Bohr, calculer sa valeur numérique.

I.B – Atomes de Rydberg

L'électron le plus énergétique de l'atome précédent est excité dans un niveau de nombre quantique $n \gg 1$ (typiquement $n \simeq 50$), le reste de l'atome étant inchangé. On étudie par la suite le comportement de cet électron dont la masse est toujours notée m_e . L'atome est isolé de son environnement extérieur.

I.B.1) Étude classique

Q 5. Justifier que l'énergie potentielle de l'électron est alors : $U(r) = -\frac{q}{r}$.

Q 6. Démontrer que le moment cinétique $\vec{\mathcal{L}}$ de cet électron est constant et en déduire que le mouvement de l'électron est plan. On introduit le repère sphérique (r, θ, φ) tel que $\vec{\mathcal{L}} = \mathcal{L}\vec{e}_z$ avec $\mathcal{L} > 0$. Le noyau est toujours à l'origine du repère. Montrer que le mouvement de l'électron est alors situé dans le plan Oxy et donner l'expression de la constante $\mathcal{L}$ en fonction de m_e , r et $\dot{\varphi}$.

Q 7. Que peut-on dire de l'énergie mécanique $\mathcal{E}_m$ de l'électron ? Montrer que l'on peut mettre cette énergie mécanique sous la forme

$$\mathcal{E}_m = \frac{1}{2}m_e\dot{r}^2 + \mathcal{E}_{p,\text{eff}}(r)$$

où l'on exprimera $\mathcal{E}_{p,\text{eff}}(r)$ en fonction de q , r , m_e et $\mathcal{L}$.

Q 8. Justifier que, pour une trajectoire circulaire, $\mathcal{E}_{p,\text{eff}}(r)$ est minimale. En déduire la valeur du rayon r_C de l'électron lorsqu'il est sur une trajectoire circulaire. On exprimera r_C en fonction de $\mathcal{L}$, m_e et q , puis on vérifiera que $r_C = \frac{\mathcal{L}^2}{\hbar^2}a_0$.

Masse de l'électron	$m_e = 9,11 \times 10^{-31} \text{ kg}$
Charge élémentaire	$e = 1,60 \times 10^{-19} \text{ C}$
Permittivité diélectrique du vide	$\epsilon_0 = 8,85 \times 10^{-12} \text{ F}\cdot\text{m}^{-1}$
Constante de Planck	$h = 6,63 \times 10^{-34} \text{ J}\cdot\text{s}$, $\hbar = 1,05 \times 10^{-34} \text{ J}\cdot\text{s}\cdot\text{rad}^{-1}$
Célérité de la lumière dans le vide	$c = 3,00 \times 10^8 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$

