PSI/PSI* 24-25

DS N°5 Corrigé

PREMIERE PARTIE : Membranes vibrantes.

Le corrigé des questions sur la corde, I.0.1 et 2., est à la fin de cette partie

poids de dS : $\sigma g\,dx\,dy$

Tension $T\,dy$ ou $T\,dx$

$\sigma g\,dx\,dy \ll T\,dy$ ou $T\,dx$

soit $\sigma g L_x L_y \ll T L_x$ ou $T L_y$.

$$\boxed{\sigma g L \ll T}$$

(1)

I) A Membrane rectangulaire

(1) Si la membrane est suffisamment tendue, on pourra négliger sa déformation due au poids. Cela correspond à dire qu'à l'équilibre la membrane est plane.

(2) • La force $\vec{T}dy$ qui s'exerce au point M sur la membrane (par exemple d'avant en arrière) possède une composante sur x et une sur z. Soit $\alpha(x,t)$ l'angle entre $\vec{T}$ et Ox, la force a comme composante $\begin{bmatrix} T\,dy\,\vec{e}_x \\ T\,dy\,\alpha(x,t)\,\vec{e}_z \end{bmatrix}$ (avec l'hypothèse des petits mouvements)

De même la force $\vec{T}dx$ a comme composantes : $dx \begin{bmatrix} T\,\vec{e}_y\,dx \\ T\,dx\,\beta(y,t)\,\vec{e}_z \end{bmatrix}$

avec $\alpha = \left(\dfrac{\partial z}{\partial x}\right)_{y,t}$ et $\beta = \left(\dfrac{\partial z}{\partial y}\right)_{x,t}$.

Donc la force totale est, sur z, pour l'élément $dx\,dy$

$$dF_z = T\left[\beta(y+dy,t) - \beta(y,t)\right]dx + T\left[\alpha(x+dx,t) - \alpha(x,t)\right]dy$$

D'où $$dF_z = T\,dx\,dy\left[\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right]$$

(2)

(3) L'accélération suivant z s'écrit $\sigma \dfrac{\partial^2 z}{\partial t^2}\,.\,dx\,dy$ pour l'élément de surface $dx\,dy$ et donc de masse $\sigma\,dx\,dy$.

Finalement

$$(1)\quad \frac{\partial^2 z}{\partial t^2} = c^2\left[\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right]$$

avec $c = \sqrt{T/\sigma}$. $\dfrac{N\,m^{-1}}{kg\,m^{-2}} = \dfrac{kg\,m\,s^{-2}\,m^{-1}}{kg\,m^{-2}} = m\,s^{-1}$

(4). Les conditions aux limites, bien que non explicitées, conduisent à chercher les solutions sous forme d'ondes stationnaires.

• En injectant la solution proposée :

$$\frac{d^2\psi}{dt^2}XY = c^2\psi\left[XY'' + Y''X\right]$$

soit $$(2)\quad \underbrace{\frac{1}{\psi}\frac{d^2\psi}{dt^2}}_{f_1(t)} = \underbrace{c^2\,\frac{XY'' + YX''}{XY}}_{f_2(x,y)} \quad \forall\, t \text{ et } (x,y)$$

Donc $\dfrac{1}{\psi}\dfrac{d^2\psi}{dt^2}$ doit être constant

Si $K > 0$, la solution sera soit divergente, soit à limite nulle ce qui n'est pas acceptable (pas d'amplification, pas d'amortissement).

⑤ Ainsi $\frac{d^2\psi}{dt^2} + \omega^2 \psi = 0$ et

$$\underline{\psi = \psi_0 \cos(\omega t + \varphi_0)}.$$

⑥ Grâce à (2) :

un calcul un peu différent est à la fin du corrigé

$$-\frac{\omega^2}{c^2} = \frac{Y''}{Y} + \frac{X''}{X} \quad \forall (x,y)$$

Il faut donc que chaque terme du membre de droite soit constant ce qui entraîne

$$\frac{Y''}{Y} = -k_y^2 \quad \text{et} \quad \frac{X''}{X} = -k_x^2 \quad \text{d'où}$$

$$\begin{cases} X(x) = X_0 \cos(k_x x + \varphi_x) \\ Y(x) = Y_0 \cos(k_y y + \varphi_y) \end{cases}$$

⑦ Il faut maintenant écrire les conditions aux limites $z(x,y,t) = 0$ pour $x = 0$ ou L_x et $y = 0$ ou L_y.

Tous calculs faits : • en 0 $\Rightarrow \varphi_x = \varphi_y = \pi/2$

• en L_x ou L_y $\Rightarrow \begin{cases} k_x = \frac{n\pi}{L_x} \\ k_y = \frac{m\pi}{L_y} \end{cases}$.

$$\underline{z(x,y,t) = M\cos(\omega t + N)\sin\left(\frac{m\pi}{L_x}x\right)\sin\left(\frac{n\pi}{L_y}y\right)}$$

⑧. D'après l'équation de propagation :

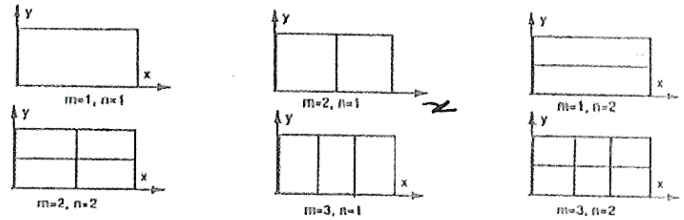
$$+\omega^2 = c^2\left[+\left(\frac{n\pi}{L_y}\right)^2 + \left(\frac{m\pi}{L_x}\right)^2\right]$$

soit avec $f = \frac{\omega}{2\pi}$:

$$f_{m,n} = \frac{c}{2}\sqrt{\left(\frac{m}{L_x}\right)^2 + \left(\frac{n}{L_y}\right)^2}$$

Les fréquences sont quantifiées, comme pour la corde, mais l'harmonicité est perdue (fréquences non proportionnelles au fondamental.

⑨



I) B: Membrane circulaire.

① En remplaçant le laplacien cartésien par le laplacien polaire :

$$\underline{\frac{\partial^2 z}{\partial t^2} = c^2\left[\frac{\partial^2 z}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial z}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 z}{\partial \theta^2}\right]}.$$

(0,0) impossible !

(1, 1) :

$\sin\left(\frac{\pi x}{L}\right)$ s'annule seulement en 0 et L

(2,1)

$\sin \frac{2\pi x}{L}$ s'annule en 0, L et $L/2$ sur x et $\sin \frac{\pi y}{L}$ une fois en 0 et une fois en L.

(2). Toute rotation de la membrane autour de Oz ne modifie pas les conditions aux limites (en bord de disque à $r =$ Rayon de la membrane). Ainsi r et θ sont indépendants : on peut écrire $R(r)\,F(\theta)$.
(Pour l'indépendance temps-espace, cf. A4).)

- $\dfrac{1}{c^2}\dfrac{1}{\psi}\dfrac{\partial^2\psi}{\partial t^2} = -\dfrac{\omega^2}{c^2}$ (cf. A) d'où
- $\dfrac{1}{R}\dfrac{\partial^2 R}{\partial r^2}+\dfrac{1}{rR}\dfrac{\partial R}{\partial r}+\dfrac{1}{r^2F}\dfrac{\partial^2F}{\partial\theta^2} = -\dfrac{\omega^2}{c^2}$, soit encore
- $\underbrace{\dfrac{1}{F}\dfrac{\partial^2F}{\partial\theta^2}}_{f_1(\theta)} = \underbrace{-\dfrac{\omega^2}{c^2}r^2 - \dfrac{r^2}{R}\dfrac{\partial^2R}{\partial r^2}-\dfrac{r}{R}\dfrac{\partial R}{\partial r}}_{f_2(r)}$

donc
$$\frac{1}{F}\frac{\partial^2F}{\partial\theta^2} = -m^2. \quad (1)$$
$$\frac{r^2}{R}\frac{\partial^2R}{\partial r^2}+\frac{r}{R}\frac{\partial R}{\partial r}+\frac{\omega^2}{c^2}r^2 = m^2.$$

(3) $F(\theta) = F_0\cos(m\theta+\varphi_0)$; de plus F doit être 2π-périodique en θ donc m est entier.

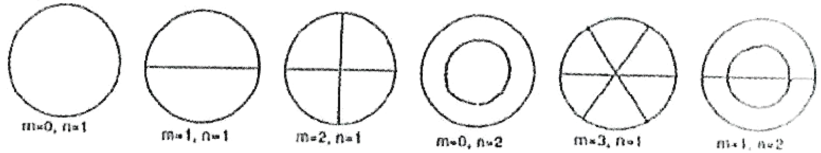
(4) avec $r' = \dfrac{r\omega}{c}$: $\dfrac{\partial^2R}{\partial r'^2}+\dfrac{1}{r'}\dfrac{\partial R}{\partial r'}+\left(1-\dfrac{m^2}{r'^2}\right)R = 0.$

Soit $R(r') = C_1 J_m(r') + C_2 Y_m(r')$.
D'après les formes données pour $Y_m(r')$ lorsque $r' \ll 1$, $Y_m(0)$ n'est pas défini ce qui n'est pas acceptable, donc $C_2 = 0$.

Donc $R(r') = C_1 J_m(r')$.

(5) Finalement $z(r,\theta,t) = \psi(t).\cos(m\theta+\varphi_0).J_m(r')$
- pour $m = 0$, seuls apparaissent les zéros de J_m
- pour $m = 1$, le cos s'annule 2 fois à π d'intervalle et on voit aussi les zéros de J_m.
- pour $m = 2$, le cos s'annule 4 fois à $\frac{\pi}{2}$.
- pour $m = 3$, le cos s'annule 6 fois à $\frac{\pi}{3}$.

et on a à chaque fois les zéros de J_m : 1 si $n = 1$, 2 si $n = 2$...
D'où les figures des lignes modales :



I.D. Corde vibrante

① Cf. cours :

→ seules interviennent $T_g(x,t)$ et $T_d(x+dx,t)$

→ on écrit les 2 projections de la RFD vectorielle et le principe des actions réciproques en x (à t) et on en déduit $\mu dx \dfrac{\partial^2 z}{\partial t^2} = T_0 \left(\dfrac{\partial \alpha}{\partial x} \right) dx$

avec $\alpha = \left(\dfrac{\partial z}{\partial x} \right)$ (petits angles)

et en tenant compte de T_0 constante

→ $c^2 = \dfrac{T_0}{\mu} = \dfrac{[kg\, m^{+1} s^{-2}]}{kg \cdot m^{-1}} = [m^2 s^{-2}]$

et c est bien en $m s^{-1}$.

② ⓐ La corde est fixée à ses deux extrémités : les solutions seront stationnaires. On peut les chercher sous la forme $z(x,t) = f(x) g(t)$; en injectant dans $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} - \dfrac{1}{c^2} \dfrac{\partial^2 z}{\partial t^2} = 0$, il vient après séparation des variables

et intégration (cf cours) :

$f(x) = \alpha_1 \cos kx + \alpha_2 \sin kx$ avec $\omega = kc$.

et $g(t) = a \cos \omega t + b \sin \omega t$

Or $f(x) = 0$ pour $x = 0$ donc $\alpha_1 = 0$

et $f(L) = 0$ donc $\sin kL = 0$ soit $k_n L = n\pi$

Donc un mode propre qcq est :

$f_n(x) g_n(t) = \left[a_n \cos\left(\dfrac{n\pi c t}{L}\right) + b_n \sin\left(\dfrac{n\pi c t}{L}\right) \right] \sin\left(\dfrac{n\pi x}{L}\right)$

$n = 1 ; L = \dfrac{d}{2}$;

$n = 3$ $L = \dfrac{3d}{2}$, par exemple.

ⓑ Pour μ, T_0 et L donnés, on peut faire varier les conditions initiales lorsque la corde est fixée :

→ si la corde est pincée, frappée ou frottée, les a_n et b_n vont varier.

→ pour un type d'excitation, corde de guitare pincée par exemple, l'endroit où elle est excitée fait varier les a_n et b_n.

Dans tous les cas le taux d'harmoniques et leur rapport change et le son change.

Membranes vibrantes Q 6,7,8 J'aurai plutôt écrit

$-\dfrac{\omega^2}{c^2} = \dfrac{Y''}{Y} + \dfrac{X''}{X} \Rightarrow -\dfrac{Y''}{Y} - \dfrac{\omega^2}{c^2} = \dfrac{X''}{X} = -k_x^2 \Rightarrow \begin{cases} X'' + k_x^2 X = 0 \\ Y'' + \underbrace{\left(\dfrac{\omega^2}{c^2} - k_x^2\right)}_{k_y^2} Y = 0 \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} X = X_0 \cos(k_x x + \varphi_x) \\ Y = Y_0 \cos(k_y y + \varphi_y) \end{cases}$

CAL idem corrigé

$\begin{cases} k_x = n\pi / L_x \\ k_y = n\pi / L_y \end{cases}$

La relation de dispersion est plus évidente : $\dfrac{\omega^2}{c^2} - k_x^2 = k_y^2 \Rightarrow \dfrac{\omega^2}{c^2} = k_x^2 + k_y^2$