

Le DS est constitué de trois sujets indépendants : un extrait adapté de l'agrégation de physique 2013 sur les ondes électromagnétiques, E3A PC 2016 sur la chimie et un extrait de Mines/Ponts Psi 2020 sur les ondes acoustiques.

### Ondes électromagnétiques

Données :  $\epsilon_0 = 8,85.10^{-12} \text{ F.m}^{-1}$ ;  $\mu_0 = 4\pi.10^{-7} \text{ H.m}^{-1}$

Coordonnées	$\text{rot } \vec{A}$ (ou $\vec{\nabla} \wedge \vec{A}$ )
Cartésiennes	$\left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z}\right) \vec{e}_x + \left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x}\right) \vec{e}_y + \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}\right) \vec{e}_z$

## 1 généralités sur les ondes électromagnétiques

On considère la théorie des ondes électromagnétiques de Maxwell, dans le cas particulier du vide.

1. Exprimer les équations de Maxwell dans un domaine vide de charges et de courants.
2. Quelles sont les équations responsables du couplage (radiatif) du champ  $(\vec{E}, \vec{B})$  ?
3. Établir les équations d'onde dans le vide suivies par les champs électrique et magnétique, puis les nommer.

Soit une onde électromagnétique monochromatique (pulsation  $\omega$ ) décrite par le champ électrique

$$\vec{E}(z, t) = E_0 \cos(\omega t - kz) \vec{e}_x + E_0 \sin(\omega t - kz) \vec{e}_y$$

où  $E_0$  et  $k$  sont des constantes réelles strictement positives

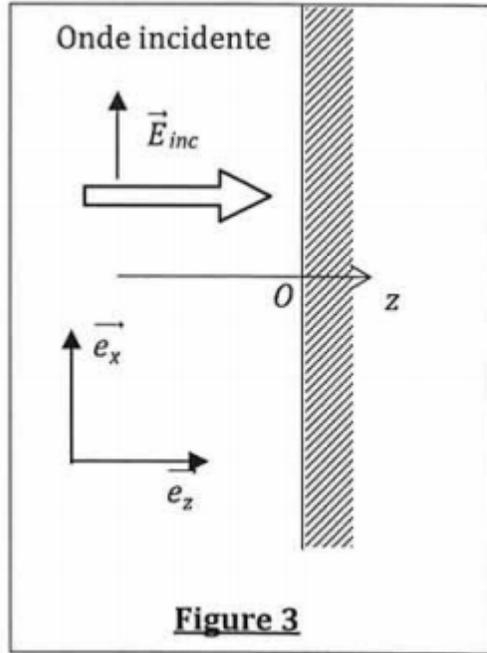
4. Identifier la direction et le sens de propagation de l'onde de champ électrique  $\vec{E}$ . Préciser, avec justifications, si cette onde est progressive et/ou plane et/ou transverse électrique.
5. Obtenir la condition, portant sur  $k$  et  $\omega$ , pour laquelle le champ  $\vec{E}$  est physiquement acceptable dans le vide. Rappeler le nom usuel d'une telle condition.
6. Définir la notion de vitesse de phase  $v_\varphi$ , puis l'expliquer pour cette onde dans le vide. Commenter le résultat.

Dans ce qui suit on considère uniquement une onde plane progressive harmonique polarisée rectilignement selon Ox et se propageant selon les z croissants.

7. Donner la forme du champ  $\vec{E}$  associée. (on notera  $E_0$  son amplitude)
8. Déterminer le champ magnétique associé.
9. Déterminer la densité volumique d'énergie électromagnétique  $u_{em}(z, t)$  ainsi que le vecteur de Poynting  $\vec{R}(z, t)$ .
10. Déterminer les grandeurs moyennes temporelles  $\langle u_{em} \rangle$  et  $\langle \vec{R} \rangle$
11. Quelle relation existe entre  $\langle u_{em} \rangle$ ,  $\langle \vec{R} \rangle$  et  $c$ ? Interprétez.
12. Dans le cas d'un laser de lycée, de puissance environ 1mW, donner des ordres de grandeurs de  $\|\langle \vec{R} \rangle\|$ ,  $\langle u_{em} \rangle$ ,  $E_0$  et  $B_0$

## 2 réflexion d'une onde plane sur un métal plan parfait

Une onde électromagnétique plane de champ électrique complexe  $\vec{E}_{inc} = E_0 \exp(j(\omega t - kz))\vec{e}_x$  se propage dans le vide ( $z < 0$ ) et atteint, sous incidence normale, un conducteur parfait immobile occupant le demi espace  $z > 0$ .



13. On rappelle les relations dites de passage pour le champ magnétique et électrique
 
$$\vec{B}_2 - \vec{B}_1 = \mu_0 \vec{j}_s \wedge \vec{e}_z$$

$$\vec{E}_2 - \vec{E}_1 = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \vec{e}_z$$
 avec  $\vec{j}_s$  la densité surfacique de courant et  $\sigma$  la densité surfacique de charge qui apparaissent sur la surface du conducteur. Que peut-on dire des champs  $\vec{E}$  et  $\vec{B}$  au voisinage extérieur immédiat ( $z = 0^-$ ) du conducteur ?
14. Déterminer les champs électriques et magnétiques réels résultants dans la zone  $z < 0$ .
15. Déterminer  $\vec{j}_s$

## 3 pression de radiation

Nous souhaitons déterminer la force qui s'exerce sur le conducteur. Pour cela nous faisons momentanément l'hypothèse que le conducteur n'est plus parfait mais possède une conductivité  $\gamma$  très élevée.

16. A quelle condition sur  $\gamma$ ,  $\omega$  et  $\epsilon_0$  le courant de déplacement  $\epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$  est-il négligeable devant  $\vec{j}$ , la densité du courant de conduction ? Est-ce le cas pour un laser rouge de lycée ? On supposera cette condition réalisée dans la suite.
17. Justifier que dans le conducteur  $\vec{B} = B(z, t)\vec{e}_y$
18. Rappeler la composante magnétique de la force de Lorentz puis son équivalent volumique. En déduire la force volumique qui s'exerce dans le conducteur en fonction de  $B(z, t)$  et de  $\frac{\partial B}{\partial z}(z, t)$
19. En déduire que, le champ magnétique étant supposé nul à une profondeur infinie, la force subie par le conducteur correspond à une pression, dite pression de radiation :

$$P_{rad} = \frac{B(0^-, t)^2}{2\mu_0}$$

Cette expression de la pression de radiation, indépendante de la conductivité, reste valable pour le conducteur parfait.

20. Exprimer alors (conducteur parfait) la pression moyenne s'exerçant sur celui-ci en fonction de  $E_0$  et  $\epsilon_0$  puis en fonction de la puissance surfacique moyenne incidente  $I_{inc}$  (transportée par le faisceau incident) et  $c$
21. Calculer numériquement la force s'exerçant sur un miroir frappé en incidence normale par un laser disponible au lycée, de puissance moyenne 1mW.

## SYNTHESE INDUSTRIELLE DE L'AMMONIAC (E3a PC 2016 – Extrait)

### Présentation

La synthèse de l'ammoniac  $\text{NH}_3$ , au même titre que la synthèse de l'acide sulfurique, est un des procédés catalytiques les plus importants dans l'industrie chimique. À la base de l'industrie des engrais azotés, elle assure l'autosuffisance en céréales de nombreux pays. En 1909, Haber découvre l'effet catalytique du fer sur la réaction entre le diazote  $\text{N}_2$  et le dihydrogène  $\text{H}_2$  :



Très vite, sous l'impulsion de Bosch, le procédé est industrialisé. En 1920, un réacteur produisant 15 mille tonnes d'ammoniac par an est mis en service.

Aujourd'hui, 100 millions de tonnes d'ammoniac sont produites par an par ce procédé : les réactifs sont introduits en proportions stœchiométriques, la température est fixée entre 640 K et 800 K ; la pression est choisie entre  $8 \cdot 10^6 \text{ Pa}$  et  $3 \cdot 10^7 \text{ Pa}$ .

**1.a.** Définir la variance d'un équilibre.

**1.b.** En justifiant soigneusement la réponse, déterminer la variance d'un système en phase gaz soumis à l'équilibre (1) dans le cas général. Commenter le résultat.

**1.c.** Déterminer la variance en tenant compte du fait que le diazote et le dihydrogène sont introduits initialement dans des proportions stœchiométriques.

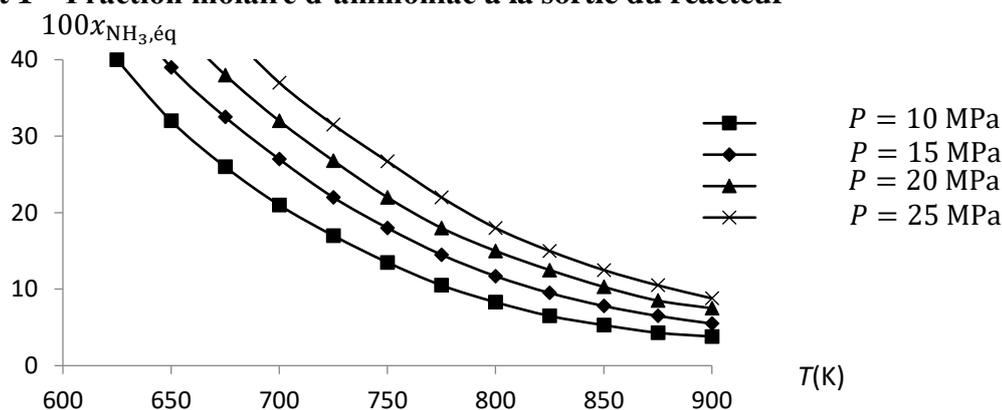
**1.d.** La présence du catalyseur affecte-t-elle la variance ?

### Influence de la température $T$ et de la pression $P$ sur la composition à l'équilibre

L'objectif de la synthèse est d'optimiser la fraction molaire en ammoniac  $x_{\text{NH}_3}$  à la sortie du réacteur.

On envisage dans un premier temps la situation où l'état d'équilibre thermodynamique est atteint à la sortie du réacteur. Le milieu réactionnel ne contient initialement que du diazote et du dihydrogène en proportions stœchiométriques.

### Document 1 – Fraction molaire d'ammoniac à la sortie du réacteur



**2.** Indiquer à partir des courbes comment évolue la constante thermodynamique  $K^\circ(T)$  lorsque la température augmente.

On donne l'enthalpie standard de formation de l'ammoniac dans la gamme de température étudiée :  $\Delta_f H^\circ(\text{NH}_3(\text{g}), T_0) = -23 \text{ kJ} \cdot \text{mol}^{-1}$ . Cette valeur est-elle en accord avec votre réponse précédente ?

**3.** Indiquer à partir des courbes si une augmentation isotherme de la pression constitue un atout ou un obstacle pour la synthèse de l'ammoniac.

On se propose de justifier ce résultat. Pour cela, on envisage un système initialement à l'équilibre thermodynamique, à la température  $T$ , sous la pression  $P$ , contenant du diazote  $N_2(g)$ , du dihydrogène  $H_2(g)$  et de l'ammoniac  $NH_3(g)$ . Sans modifier la composition du système, on élève la pression de façon isotherme.

4. Exprimer le quotient de réaction  $Q_r$  associé à l'équilibre (1) en fonction des quantités de matière de chaque constituant présent dans le système, de la quantité de matière totale  $n_{tot}$ , de la pression  $P$  et de la pression standard  $P^\circ = 1 \text{ bar}$ .

5. Indiquer à quoi est égal le quotient de réaction  $Q_{r, \text{éq}}$  associé à l'équilibre (1) avant perturbation de la pression.

6. Indiquer en justifiant la réponse comment évolue le quotient de réaction  $Q_r$  après élévation de la pression. En exprimant  $\Delta_r G$  du système, vérifier alors la réponse donnée à la question 3.

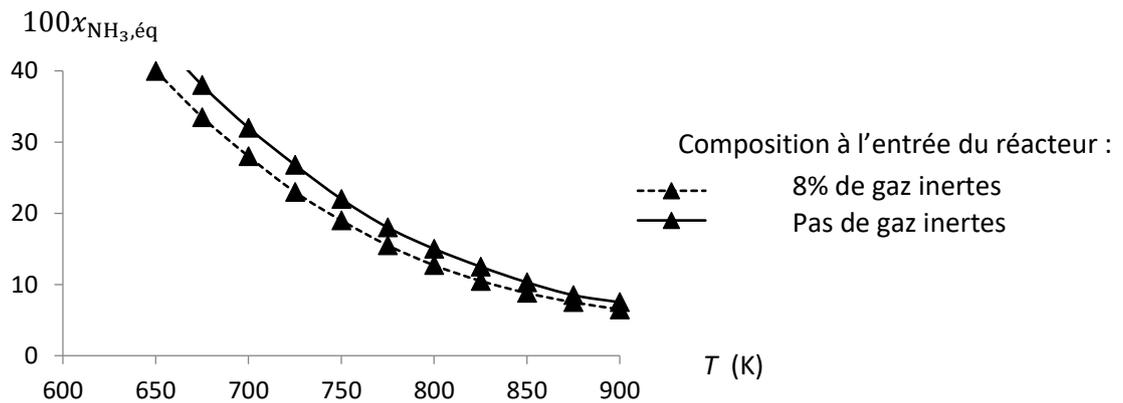
### Influence de la présence de gaz inertes

En réalité, d'autres constituants peuvent intervenir dans la composition du mélange réactionnel initialement introduit dans le réacteur. Les traces de méthane viennent du gaz utilisé lors de la production de dihydrogène par reformage. Les traces d'argon sont issues de l'air dont provient le diazote.

#### Document 2 – Composition typique du gaz de synthèse à l'entrée du réacteur

Dihydrogène	$H_2(g)$	$x_{H_2} = 0,69$
Diazote	$N_2(g)$	$x_{N_2} = 0,23$
Argon	$Ar(g)$	$x_{Ar} = 0,02$
Méthane	$CH_4(g)$	$x_{CH_4} = 0,06$

#### Document 3 – Fraction molaire d'ammoniac à la sortie du réacteur à $P = 20 \text{ MPa}$



7. Indiquer à partir des courbes si la présence de gaz inertes constitue un atout ou un obstacle pour la synthèse de l'ammoniac.

8. Par un raisonnement analogue à celui mené sur la pression, étudier l'influence – à température et pression constantes – de l'introduction d'un gaz inerte sur la réaction

### Choix de la température $T$

La synthèse de l'ammoniac est réalisée dans un réacteur ouvert fonctionnant en régime permanent à pression constante  $P = 20 \text{ MPa}$ . Pour deux valeurs du temps de passage du mélange réactionnel à travers le réacteur, on détermine expérimentalement le taux d'avancement,  $\tau$ , de la réaction (1) à différentes valeurs de la température  $T$ .

- Temps de passage très grand :

$T$ (K)	600	650	700	750	800	850
$\tau$	0,72	0,60	0,48	0,36	0,25	0,19

- Temps de passage court :

$T$ (K)	600	650	700	750	800	850
$\tau$	0,21	0,32	0,38	0,30	0,25	0,19

**9.** Justifier la monotonie de l'évolution de  $\tau$  en fonction de  $T$  pour un temps de passage très grand.

**10.** Comment peut-on interpréter l'existence d'un maximum pour l'évolution de  $\tau$  en fonction de  $T$  pour un temps de passage court ? On pourra s'aider notamment des valeurs comparées de  $\tau$  pour les températures de 800 et 850 K.

# La lévitation acoustique

La lévitation acoustique consiste à maintenir de la matière en suspension au sein d'un milieu fluide ambiant, l'air par exemple, en opposant au poids de l'objet lévitant la force résultant de la pression de radiation d'ondes sonores intenses. La possibilité de mettre en lévitation des échantillons solides ou liquides, de faible masse, est maintenant bien établie, et des avancées récentes laissent entrevoir des applications concrètes de ce procédé.

En 2013, une équipe de chercheurs suisses<sup>1</sup> a mis au point un dispositif de lévitation acoustique permettant un transport *contrôlé* de petits objets. Ils sont ainsi parvenus à mélanger une gouttelette d'eau et un granulé de café soluble. Cette expérience *a priori* ludique recèle en réalité des applications technologiques et industrielles extrêmement précieuses, telle que le contrôle de certains procédés chimiques ou biologiques.

En 2015, c'est une équipe de recherche sud-américaine<sup>2</sup> qui a mis au point un dispositif de lévitation acoustique permettant de transporter des objets avec une grande *stabilité* donc sans aucun risque d'en perdre le contrôle mécanique, ce qui intéresse particulièrement les secteurs sensibles du nucléaire et de la chimie, où la dangerosité de la matière transportée impose de prendre en compte les risques inhérents aux chocs ou à la dissémination.

Ce problème aborde le principe de la lévitation acoustique de manière simplifiée. Il comporte 2 parties largement indépendantes : la première modélise le phénomène de lévitation acoustique, alors que la seconde présente un dispositif de conversion d'énergie pouvant alimenter le transducteur générant les ondes sonores.

Les vecteurs seront surmontés d'un chapeau s'ils sont unitaires ( $\hat{e}$ ) et d'une flèche dans le cas général ( $\vec{a}$ ). Ainsi dans l'espace cartésien on notera  $\vec{a} = a_x\hat{e}_x + a_y\hat{e}_y + a_z\hat{e}_z$ . À l'exception de  $j$ , tel que  $j^2 = -1$ , les nombres complexes seront soulignés.

Dans tout le problème, **exprimer** signifie donner l'expression littérale et **calculer** signifie donner la valeur numérique avec deux chiffres significatifs.

## I. — La lévitation grâce à une onde sonore

Le dispositif de lévitation acoustique est présenté et modélisé sur la figure 1.

Un transducteur, de surface  $S = 10 \text{ cm}^2$ , est en vibration au voisinage de la hauteur  $h$  à la vitesse  $\vec{u}_m(t) = U_m \sin(\omega t)\hat{e}_z$  avec  $U_m = 10 \text{ cm} \cdot \text{s}^{-1}$ . Il génère une onde sonore de fréquence  $f = 20 \text{ kHz}$  supposée plane, harmonique, et progressive selon la verticale descendante. Cette onde est *totale*ment réfléchiée par une paroi fixe placée en  $z = 0$ .

Le milieu de propagation est de l'air, supposé homogène et compressible. Il est caractérisé au repos (en l'absence d'onde sonore) par une masse volumique  $\mu_0 = 1,2 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$  uniforme. Les champs de température et pression sont eux aussi stationnaires ; la température  $T_0$  étant en outre uniforme alors que la pression est une fonction de  $z$  soit  $P_0 = P_0(z)$ .

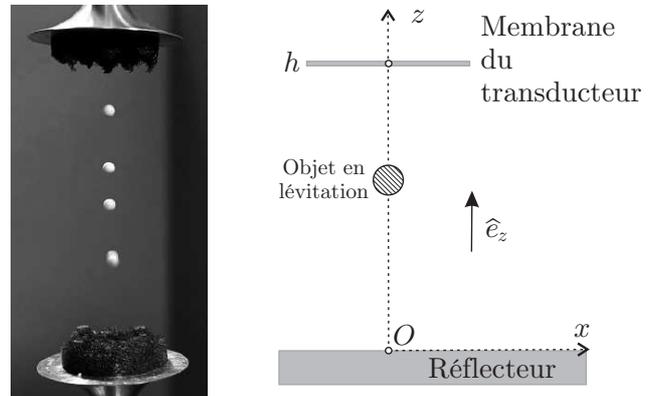


FIGURE 1 – À gauche : lévitation acoustique de particules de polystyrène expansé. À droite : schéma de principe du dispositif de lévitation acoustique.

1. D. Foresti, M. Nabavi, M. Klingauf, A. Ferrari and D. Poulikakos, « Acoustophoretic contactless transport and handling of matter in air », *Proc. Natl. Acad. Sci. U.S.A.*, vol. 110 no. 31, Janvier 2013, 12549 - 12554

2. M. A. B. Andrade, N. Pérez, J. C. Adamowski, « Particle manipulation by a non-resonant acoustic levitator », *Appl. Phys. Lett.*, 106, 014101, Janvier 2015

On suppose que la propagation est unidimensionnelle, de célérité  $c = 3,4 \times 10^2 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$  dans le milieu. Dans l'approximation acoustique, les champs de pression, masse volumique, et vitesse sont alors décrits respectivement par :

$$\begin{cases} P(z,t) &= P_0(z) + p_1(z,t) \\ \mu(z,t) &= \mu_0(z) + \mu_1(z,t) \\ \vec{v}(z,t) &= v_1(z,t) \hat{e}_z \end{cases}$$

Les termes  $p_1$  et  $\mu_1$  sont perturbatifs : pour toutes les valeurs de  $t$  et de  $z$  concernées on a donc  $|p_1| \ll |P_0|$  et  $|\mu_1| \ll |\mu_0|$ . L'évolution du fluide mis en mouvement par l'onde sonore est supposée adiabatique et réversible. Le coefficient de compressibilité isentropique sera noté  $\chi_S$  et assimilé à une constante.

❑ **1** — Rappeler les hypothèses de l'approximation acoustique. Sauf mention contraire, on suppose ces hypothèses vérifiées par la suite.

❑ **2** — On considère une particule fluide, de volume  $d\tau$ , mise en mouvement par le passage de l'onde sonore. Montrer que, dans l'approximation acoustique, son accélération peut s'écrire  $\vec{a} = \frac{\partial \vec{v}}{\partial t}$ .

❑ **3** — Écrire, en projection sur  $\hat{e}_z$ , l'équation aux dérivées partielles obtenue en appliquant la relation fondamentale de la dynamique à une particule de fluide de volume  $d\tau$  et de masse  $\mu_0 d\tau$ . Que donne cette relation si la particule est au repos ? Compte-tenu de cette seconde relation, déterminer finalement une équation aux dérivées partielles reliant les seules grandeurs  $\mu_0$ ,  $v_1$  et  $p_1$ .

❑ **4** — Donner les expressions linéarisées des relations locales traduisant, d'une part la conservation de la masse, et d'autre part le caractère isentropique de l'évolution du fluide sous l'effet de l'onde acoustique. On établira ces équations...

❑ **5** — Montrer que le champ des vitesses  $v_1(z,t)$  vérifie une équation de propagation de la forme

$$\frac{\partial^2 v_1}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 v_1}{\partial t^2} = 0$$

Quel est le nom de cette équation ? Exprimer  $c$  en fonction des paramètres pertinents.

❑ **6** — On note  $\lambda$  la longueur d'onde associée au phénomène propagatif décrit à la question précédente. On suppose que les transferts thermiques dans le milieu sont de type diffusif. On note  $\kappa = 3,0 \times 10^{-2} \text{ W} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$  la conductivité thermique de l'air et  $c_p = 1,0 \times 10^3 \text{ J} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{kg}^{-1}$  sa capacité thermique massique à pression constante. Par un raisonnement en ordre de grandeur, montrer que l'hypothèse d'adiabaticité n'est valide que si la fréquence  $f$  de l'onde est inférieure à une valeur  $f_{\max}$  que l'on exprimera, en fonction de  $\kappa$ ,  $\mu_0$ ,  $c_p$  et  $c$ . Qu'en est-il dans le cadre de cette expérience ? L'équation de diffusion s'écrit  $\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\kappa}{\mu_0 c_p} \frac{\partial^2 T}{\partial z^2}$ .

❑ **7** — On note  $z_m(t)$  la position de la membrane du transducteur au voisinage de  $h$ . Exprimer puis calculer l'amplitude  $Z_m$  de vibration de  $z_m(t)$ . On pourra prendre  $(4\pi)^{-1} = 8,0 \times 10^{-2}$ .

❑ **8** — On s'intéresse à l'onde sonore résultante entre le transducteur et le réflecteur. Justifier la condition aux limites

$$u_m(t) \approx v_1(h,t)$$

❑ **9** — Déterminer complètement la vitesse  $v_1(z,t)$  dans l'espace  $0 \leq z \leq h$  et exprimer son amplitude maximale  $V_1$  en fonction de  $U_m$ ,  $h$ ,  $\omega$  et  $c$ .

□ **10** — Déterminer les positions spatiales des maxima de vitesse en fonction de  $\lambda$  et d'un entier  $n$ . Commenter ce résultat. Montrer que l'amplitude  $V_1$  des maxima diverge pour certaines pulsations  $\omega_n$ . En pratique, quels phénomènes limitent la valeur de  $V_1$  ?

□ **11** — Exprimer la surpression  $p_1(z,t)$  associée à  $\vec{v}_1(z,t)$ . On considère une bille, de rayon  $a \ll \lambda$  et donc assimilable à un volume élémentaire sans influence sur la propagation de l'onde acoustique. Déterminer la résultante  $\vec{F}$  des forces de pression s'exerçant sur la bille, ainsi que sa moyenne temporelle  $\langle \vec{F} \rangle$ . Le modèle étudié jusqu'à présent permet-il d'interpréter la lévitation de cette bille ?

□ **12** — On règle dorénavant la valeur de  $h$  de manière à obtenir  $V_1 = 50 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ . Pourquoi n'est-il plus possible de se placer dans l'approximation acoustique ?

On pose maintenant :

$$\begin{cases} P(z,t) = P_0(z) + p_1(z,t) + p_2(z,t) \\ v(z,t) = v_1(z,t) + v_2(z,t) \end{cases}$$

où les termes d'indice 0 sont les grandeurs constantes au repos (en l'absence d'onde sonore), les termes d'indice 1 sont les solutions étudiées précédemment et les termes d'indice 2 sont des corrections d'ordre 2, résultant des termes non linéaires des équations aux dérivées partielles décrivant le phénomène.

□ **13** — On admet que la surpression  $p_2(z,t)$  est de la forme

$$p_2(z,t) = \frac{1}{4} \mu_0^\ell V_1^q \cos\left(\frac{2\omega z}{c}\right) + f(z) \cos(2\omega t)$$

où  $f(z)$  est une fonction dont il n'est pas nécessaire de connaître l'expression.

Déterminer les valeurs des entiers  $\ell$  et  $q$ . Déterminer la moyenne temporelle  $\langle F_z \rangle(z)$  de la résultante des forces de pression qui s'exercent sur la bille.

□ **14** — Montrer, sans les déterminer explicitement, qu'il existe des positions d'équilibre tant que la masse volumique  $\mu_b$  de la bille reste inférieure à une valeur  $\mu_{b,\text{max}}$  dont on précisera l'expression. En vous appuyant sur une représentation graphique de la force moyenne  $\langle F_z \rangle(z)$ , discuter la stabilité des positions d'équilibre.

□ **15** — Calculer  $\mu_{b,\text{max}}$  et proposer une estimation de la masse maximale  $m_{b,\text{max}}$  d'une bille susceptible de léviter avec le dispositif présenté ici. Commenter les valeurs numériques.

□ **16** — Comme on le voit sur la figure 1 le dispositif permet de faire léviter plusieurs objets. Quelle est la distance qui les sépare ? Exprimer le nombre maximal de ces objets en fonction de  $\lambda$  et  $h$ .

□ **17** — On observe que les objets en lévitation dans ce dispositif ont un petit mouvement d'oscillation de pulsation  $\tilde{\omega}$  au voisinage de leurs positions d'équilibre. Déterminer l'expression de  $\tilde{\omega}$  en fonction des paramètres du problème.

**FIN DE LA PARTIE I**