Soit une OPPM de la forme $\vec{\underline{E}} = \vec{\underline{E}}_0 \, e^{j(\omega t - \vec{\underline{k}} \cdot \vec{r})}$

avec $\vec{\underline{k}} = \underline{k}\,\vec{e}$ où $\underline{k}$ est le nombre d'onde complexe et $\vec{e}$ le vecteur unitaire de la direction de propagation.

① À retenir :

$$\boxed{\begin{aligned} \operatorname{div} \vec{\underline{E}} &= -j\,\vec{\underline{k}} \cdot \vec{\underline{E}} \\ \vec{\operatorname{rot}}\, \vec{\underline{E}} &= -j\,\vec{\underline{k}} \wedge \vec{\underline{E}} \\ \Delta \vec{\underline{E}} &= -\underline{k}^2\, \vec{\underline{E}}. \end{aligned}}$$

② Exemples :

dans le vide $\Delta \vec{\underline{E}} = \dfrac{1}{c^2} \dfrac{\partial^2 \vec{\underline{E}}}{\partial t^2}$ devient avec la forme proposée :

$$-\underline{k}^2 \vec{\underline{E}} = \frac{1}{c^2}(j\omega)^2 \vec{\underline{E}} = -\frac{\omega^2}{c^2}\vec{\underline{E}}$$ et donc nécessairement

$$\underline{k}^2 = \frac{\omega^2}{c^2}$$ d'où $\underline{k}$ est réel et $k = \pm \dfrac{\omega}{c}$.

dans un métal (γ réel)

$\Delta \vec{\underline{E}} = \mu_0 \gamma \dfrac{\partial \vec{\underline{E}}}{\partial t}$ devient $-\underline{k}^2 \vec{\underline{E}} = j\omega\mu_0\gamma \vec{\underline{E}}$ et

$\underline{k}^2 = -j\omega\mu_0\gamma$, soit $\underline{k} = \pm \sqrt{\dfrac{\mu_0\gamma\omega}{2}}\,(1-j)$.

Si la propagation se fait suivant z :

$$\begin{cases} \bullet\ z \nearrow : \quad \vec{\underline{E}} = \vec{\underline{E}}_0 \exp\left(-\frac{z}{\delta}\right) \exp\left[j\left(\omega t - \frac{z}{\delta}\right)\right] \\ \bullet\ z \searrow : \quad \vec{\underline{E}} = \vec{\underline{E}}_0 \exp\left(\frac{z}{\delta}\right) \exp\left[j(\omega t + z/\delta)\right] \end{cases}$$, avec $\delta = \sqrt{\dfrac{2}{\mu_0\gamma\omega}}$.

③ Démonstration pour $\operatorname{div} \vec{\underline{E}}$.

Si $\vec{\underline{E}}_0 = \underline{E}_{0x}\vec{e_x} + \underline{E}_{0y}\vec{e_y} + \underline{E}_{0z}\vec{e_z}$

$\vec{\underline{k}} = \underline{k}_x \vec{e_x} + \underline{k}_y \vec{e_y} + \underline{k}_z \vec{e_z}$ et $\vec{r} = x\vec{e_x} + y\vec{e_y} + z\vec{e_z}$

$\operatorname{div} \vec{\underline{E}} = -j\,\underline{k}_x \underline{E}_{0x} \exp[j(\omega t - \vec{\underline{k}}\cdot\vec{r})] - j\underline{k}_y \underline{E}_{0y} \exp[\text{idem}] - j\underline{k}_z \underline{E}_{0z} \exp[\text{idem}]$

$\operatorname{div} \vec{\underline{E}} = -j\left(\underline{k}_x \underline{E}_{0x} + \underline{k}_y \underline{E}_{0y} + \underline{k}_z \underline{E}_{0z}\right) \exp[j(\omega t - \vec{\underline{k}}\cdot\vec{r})]$

$\operatorname{div} \vec{\underline{E}} = -j\,\vec{\underline{k}} \cdot \vec{\underline{E}}_0 \exp j(\omega t - \vec{\underline{k}}\cdot\vec{r})$

et $\operatorname{div} \vec{\underline{E}} = -j\,\vec{\underline{k}} \cdot \vec{\underline{E}}$. R : des deux autres démos sont du même type.