PSI

POLYNÔMES

$\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

I - STRUCTURE DE $\mathbb{K}[X]$

1) Structure

déf.

L'ensemble des polynômes à une indéterminée sur $\mathbb{K}$ est
$\mathbb{K}[X] = \{a_0 + a_1X + a_2X^2 + \cdots + a_nX^n \ / \ n \in \mathbb{N} \quad et \quad (a_0, \ldots, a_n) \in \mathbb{K}^{n+1}\}$.
$(\mathbb{K}[X], +, .)$ *est un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$. On définit aussi une multiplication dans $\mathbb{K}[X]$.*
Elle vérifie : $\forall (P,Q) \in \mathbb{K}[X]^2, \quad \big(P \times Q = 0 \implies P = 0 \ \text{ ou } \ Q = 0\big)$.

prop.

- Tout polynôme non nul s'écrit $\quad P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k \quad$ où $\quad n \in \mathbb{N}, \quad (a_0, \ldots, a_n) \in \mathbb{K}^{n+1} \quad$ avec $\quad a_n \neq 0$
  a_n s'appelle le coefficient dominant de P et n est le degré de P.
  Lorsque $\quad a_n = 1$, on dit que le plynôme est unitaire.
- Par convention, le degré du polynôme nul est $-\infty$.
- $\forall (A,B) \in \mathbb{K}[X]^2, \quad \deg(A+B) \leqslant \max(\deg(A), \deg(B)) \quad$ avec égalité si $\quad \deg(A) \neq \deg(B)$.
  $\forall (A,B) \in \mathbb{K}[X]^2, \quad \deg(A \times B) = \deg(A) + \deg(B)$
- Pour $\quad d \in \mathbb{N}, \quad \mathbb{K}_d[X] = \{A \in \mathbb{K}[X] \ / \ \deg(A) \leqslant d\} \quad$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}[X]$ de dimension $d+1$ dont la base canonique est $\quad (1, X, X^2, \ldots, X^d)$.
- Toute famille de polynômes de degrés échelonnés est une famille libre de $\mathbb{K}[X]$.

2) Division euclidienne

th.

$\forall (A,B) \in \mathbb{K}[X] \times (\mathbb{K}[X] - \{0\}), \quad \exists!(Q,R) \in \mathbb{K}[X]^2 \ / \ A = BQ + R \quad$ et $\quad \deg R < \deg B$.
A s'appelle le dividende, B le diviseur, Q le quotient et R le reste.
Trouver Q et R, c'est effectuer la division euclidienne de A par B.

déf.

Soient A et B deux polynômes de $\mathbb{K}[X]$.
A est un diviseur de B (ou B est un multiple de A) lorsque $\quad \exists Q \in \mathbb{K}[X] \ / \ B = AQ$. *On note* $\quad A \mid B$
A divise B lorsque le reste de la division euclidienne de B par A est nul.
Etant donné 2 polynômes A et B , $\quad A \mid B \quad$ *et* $\quad B \mid A \quad$ *si et seulement si A et B sont associés c'est-à-dire si et seulement si* $\quad \exists \lambda \in \mathbb{K}^* \ / \ A = \lambda B$.

3) Formule de Taylor

th.

$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \forall P \in \mathbb{K}_n[X], \quad \forall a \in \mathbb{K}, \quad P(X) = \sum_{k=0}^{n} \frac{P^{(k)}(a)}{k!}(X-a)^k$.

Les $\quad \frac{P^{(k)}(a)}{k!}, \quad$ pour $\quad k \in [\![0,n]\!], \quad$ sont les coordonnées de P dans la base $\quad \big((X-a)^k\big)_{k \in [\![0,n]\!]}$

II - POLYNÔMES ET RACINES

1) racines

déf. 1

Soit P un polynôme de $\mathbb{K}[X]$: $\quad \exists n \in \mathbb{N}, \quad \exists (a_0, a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{K}^{n+1} \ / \ P = \sum_{j=0}^{n} a_j X^j$.

On appelle fonction polynôme associée à P l'application

$$\begin{array}{rcl} \tilde{P} : \mathbb{K} & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ x & \longmapsto & \tilde{P}(x) = \sum_{j=0}^{n} a_j x^j \end{array}$$

Dans la pratique, on se contente d'écrire P au lieu de $\tilde{P}$

déf. 2

Soient $P \in \mathbb{K}[X]$ *et* $x_0 \in \mathbb{K}$.

$$x_0 \text{ est une racine ou un zéro de } P \text{ dans } \mathbb{K} \iff P(x_0) = 0 \iff (X - x_0) \mid P \iff \exists\, A \in \mathbb{K}[X] \ / \ P = A(X - x_0)$$

th. 1

Tout polynôme non nul de degré $n \in \mathbb{N}$ admet au plus n racines distinctes.
Donc si un polynôme de degré au plus n a $n+1$ racines ou davantage, c'est le polynôme nul, c'est-à-dire que tous ses coefficients sont nuls.

th. 2

Soient $P \in \mathbb{K}[X] - \{0\}$, $a \in \mathbb{K}$ et $m \in \mathbb{N}^*$

$$\begin{aligned} a \text{ est racine d'ordre } m \text{ de } P &\iff (X-a)^m \text{ divise } P \quad \text{et} \quad (X-a)^{m+1} \text{ ne divise pas } P \\ &\iff \exists\, Q \in \mathbb{K}[X] \ / \ P = (X-a)^m Q \quad \text{et} \quad Q(a) \neq 0 \\ &\iff P(a) = P'(a) = \cdots = P^{(m-1)}(a) = 0 \quad \text{et} \quad P^{(m)}(a) \neq 0 \end{aligned}$$

th. 3

Somme et produit des racines :

Soit $P \in \mathbb{K}[X]$ tel que $n = \deg P \geqslant 2$: $\exists\, (a_0, a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{K}^n \times \mathbb{K}^* \ / \ P = \sum_{i=0}^{n} a_i X^i$.

<u>On suppose de plus</u> que P admet n racines $x_1, x_2, \dots, x_n$ dans $\mathbb{K}$: $P = a_n(X - x_1)(X - x_2)\cdots(X - x_n)$

Alors $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i = -\frac{a_{n-1}}{a_n}$ et $\displaystyle\prod_{i=1}^{n} x_i = (-1)^n \frac{a_0}{a_n}$

3) *Polynômes irréductibles*

déf.

Soit $A \in \mathbb{K}[X]$ *de degré supérieur à* 1.
$\forall\, \lambda \in \mathbb{K}^*$, $\lambda A \mid A$ *et* $\lambda 1 \mid A$. λA *et* $\lambda 1$ *sont des diviseurs non stricts de* A.

A est dit irréductible lorsque A n'a pas de diviseur strict ie
ses seuls diviseurs sont les polynômes constants non nuls et les polynômes de la forme λA où $\lambda \in \mathbb{K}^*$.

th.

- **Théorème de d'Alembert :**
  Dans $\mathbb{C}[X]$, tout polynôme non constant se décompose en un produit de polynômes de degré 1.
  Donc les seuls polynômes irréductibles de $\mathbb{C}[X]$ sont ceux de degré 1.
- Dans $\mathbb{C}[X]$, tout polynôme de degré $n \in \mathbb{N}^*$ a exactement n racines dans $\mathbb{C}$ (comptées avec leur ordre de multiplicité).
- Dans $\mathbb{R}[X]$, les polynômes irréductibles sont :
  1) Les polynômes de degré 1
  2) Les polynômes de degré 2 de discriminant strictement négatif.

III - FRACTIONS RATIONNELLES

1) *Décomposition en éléments simples*

Soit A un polynôme et B un polynôme non nul de $\mathbb{K}[X]$. On note $F = \dfrac{A}{B}$.

On suppose la fraction rationnelle F sous forme irréductible, c'est-à-dire simplifiée.

On suppose également que B s'écrit : $B = (X - a_1)(X - a_2)\cdots(X - a_n)$
où $n \in \mathbb{N}^*$ et $a_1, a_2, \dots, a_n$ sont des scalaires deux à deux distincts.

En posant la division euclidienne de A par B, on obtient :
$A = BQ + R$ où $(Q, R) \in \mathbb{K}[X]^2$ et $\deg R < \deg B$.

Alors il existe $(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n$ tel que : $F = \dfrac{BQ+R}{B} = Q + \dfrac{R}{B} = Q + \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{\lambda_k}{X - a_k}$.

Q s'appelle la partie entière de F et cette décomposition est la **décomposition en éléments simples** de F.

2) *Calcul des λ_k*