CORRECTION REDUCTEUR

PRELIMINAIRE

Les axes de toutes les roues dentées sont fixes donc il n'y a donc pas de mouvement épicycloïdal.

On peut donc décomposer mathématiquement le rapport $\frac{\omega_3}{\omega_1}$ en $\frac{\omega_3}{\omega_1} = \frac{\omega_3}{\omega_{2'}} \cdot \frac{\omega_{2'}}{\omega_2} \cdot \frac{\omega_2}{\omega_1}$

Les roues dentées ***2*** et ***2'*** appartiennent à la même pièce donc $\frac{\omega_{2'}}{\omega_2} = 1$

La condition de roulement sans glissement au niveau du point d'engrènement ***I*** entre deux roues dentées ***i*** et ***j*** s'écrit : $\overrightarrow{V_{I\in i/j}} = \vec{0}$ soit $\overrightarrow{V_{I\in i/0}} = \overrightarrow{V_{I\in j/0}}$ avec « $\boldsymbol{V = R.\ \omega}$ »

$$\text{d'où} \quad \frac{Dp_i}{2}.\omega_i = \frac{Dp_j}{2}.\omega_j \quad \text{soit} \quad Z_i.\omega_i = Z_j.\omega_j$$ (avec ***Dp*** le diamètre primitif)

Si le contact est extérieur (comme ici entre ***1*** et ***2***) il y a inversion du sens de rotation d'où un signe **-**

Si le contact est intérieur (comme ici entre ***2'*** et ***3***) il y a conservation du sens de rotation d'où un signe **+**.

$$\text{finalement :} \quad \frac{\omega_3}{\omega_1} = +\frac{Z_{2'}}{Z_3} \cdot 1 \cdot -\frac{Z_1}{Z_2} \quad \text{soit} \quad \boxed{\frac{\omega_3}{\omega_1} = -\frac{Z_1.Z_{2'}}{Z_2.Z_3}}$$

La roue de sortie ***3*** tourne dans le sens inverse de celle d'entrée ***1*** (à cause du signe négatif).

Application numérique : $\frac{\omega_3}{\omega_1} = -\frac{15.x20}{40x75} = -\frac{300}{3000} = -\frac{1}{10}$ $\boxed{r = \frac{\omega_3}{\omega_1} = -\frac{1}{10}}$

PREMIERE METHODE (PFD)

a) *1) Isoler :* la charge entraînée seule (sans l'arbre de sortie ***3***)..

2) Bilan des actions mécaniques extérieures : action de la pesanteur, couple reçu venant de l'arbre intermédiaire ***3*** et couple résistant dû aux frottements visqueux.

3) PFD : écrivons l'équation ***des moments en projection sur l'axe de rotation et en un point quelconque de cet axe :***

- le centre de gravité de la charge étant sur l'axe de rotation, la composante du moment du poids est donc nulle (pas de « bras de levier »)
- le couple reçu par l'arbre ***3*** (moteur pour la charge) est $\boldsymbol{C_r}$(t). Il correspond en fait à l'opposé de celui qu'exerce la charge sur l'arbre ***3*** (qui est résistant pour l'arbre ***3***).
- le couple résistant dû aux frottements visqueux est noté **- $\boldsymbol{C_f}$**

On a donc : $0 + C_r - C_f = J.\dot{\omega}_3$

d'où : $\boxed{C_r - f.\omega_3 = J.\dot{\omega}_3}$

b) L'expression du rendement du mécanisme est la suivante : $\eta = \left|\dfrac{P_{sortie}}{P_{entrée}}\right|$

Avec à l'entrée un moteur délivrant un couple $\boldsymbol{C_m}$ sur l'arbre ***1*** qui est en simple rotation autour d'un axe fixe, d'où : $\boldsymbol{P_{entrée} = +C_m \cdot \omega_1}$

Et avec à la sortie une charge délivrant un couple résistant $\boldsymbol{C_r}$ sur l'arbre ***3*** qui est en simple rotation autour d'un axe fixe, d'où : $\boldsymbol{P_{sortie} = -C_r \cdot \omega_3}$

d'où $\eta = \left|\dfrac{P_{sortie}}{P_{entrée}}\right| = \dfrac{C_r \cdot \omega_3}{C_m \cdot \omega_1}$ or $r = \dfrac{\omega_3}{\omega_1}$ soit $\eta = \dfrac{C_r}{C_m} \cdot r$

et finalement : $\boxed{C_r = \dfrac{\eta}{r} \cdot C_m}$

Remarque :

En fait l'expression $\eta = \left|\dfrac{P_{sortie}}{P_{entrée}}\right|$ n'est valable que dans le cas d'un régime établi (pas d'accélération) ou d'inerties négligées.

En effet si on applique le théorème de l'énergie cinétique au réducteur sans la charge de sortie :

*(arbre moteur **1** + arbre intermédiaire **2** + arbre de sortie **3**)*

$$\frac{d(Ec)}{dt} = \sum Pext + \sum P\text{int}$$

Avec
- $E_c = \dfrac{1}{2} \cdot Jéq \cdot \omega_1^{\,2}$
- $\sum P_{ext}$ = *puissance d'entrée – puissance de sortie* = $\boldsymbol{C_m \cdot \omega_1 - C_r \cdot \omega_3}$
- $\sum P_{int}$ = *puissance perdue* = **- (1 - η)** . *puissance d'entrée* = $\boldsymbol{-(1-\eta) \cdot C_m \cdot \omega_1}$

D'où : $$\frac{d\left(\frac{1}{2} \cdot Jéq \cdot \omega_1^{\,2}\right)}{dt} = (C_m . \omega_1 - C_r . \omega_3) - (1-\eta) . C_m . \omega_1 = \eta . C_m . \omega_1 - C_r . \omega_3$$

Si les inerties sont négligées (ou les masses) ou si $\boldsymbol{\omega_1(t)}$ ***= constante*** (régime établi, pas d'accélération) on a :

$$\frac{1}{2} \cdot Jéq \cdot \omega_1^{\,2} = 0 \quad \text{soit} \quad \eta . C_m . \omega_1 - C_r . \omega_3 = 0 \quad C_r = \eta . \frac{\omega_1}{\omega_3} . C_m$$

et finalement : $\boxed{C_r = \dfrac{\eta}{r} \cdot C_m}$

c) On déduit des deux résultats précédents : $\dfrac{\eta}{r} \cdot C_m - f . \omega_3 = J . \dot{\omega}_3$

Soit finalement l'équation différentielle régissant la vitesse de rotation $\boldsymbol{\omega_3}$ de la charge en fonction du couple moteur d'entrée $\boldsymbol{C_m}$:

$$\boxed{f . \omega_3(t) + J . \frac{d\omega_3(t)}{dt} = \frac{\eta}{r} . C_m(t)}$$

DEUXIEME METHODE (TEC)

Le théorème de l'énergie cinétique est bien adapté ici pour une approche globale de ce mécanisme à un degré de mobilité.
On va l'appliquer à l'ensemble ***E*** des pièces en mouvement, c'est-à-dire :

E= (arbre moteur 1 + arbre intermédiaire 2 + arbre de sortie 3 + charge)

Energies cinétiques :

Calculons d'abord l'énergie cinétique de chaque pièce en mouvement :

*- arbre d'entrée **1** :* on a une simple rotation autour d'un axe fixe avec une inertie négligée donc l'énergie cinétique est nulle.

*- arbre intermédiaire **2** :* idem

*- arbre de sortie **3*** associé à la charge entraînée *:* on a une simple rotation autour d'un axe fixe avec une inertie globale notée ***J*** donc l'énergie cinétique vaut :

$$\boxed{Ec = \frac{1}{2}.\,J.\omega_3^{\,2}}$$

Puissances extérieures :

- action de la pesanteur : les masses et inertie des trois pièces du réducteur sont négligées. Le poids de ces pièces ne travaille donc pas et la puissance développée par la pesanteur est ainsi nulle :

$$\boxed{P_{extérieure}\,(pes \rightarrow E/0) = 0}$$

*- action du moteur sur l'arbre **1** :* on a une simple rotation autour d'un axe fixe donc :

$$P(moteur \rightarrow 1/0) = C_m.\,\omega_1 \quad \text{avec} \quad r = \frac{\omega_3}{\omega_1} \quad \text{d'où} \quad \boxed{P(moteur \rightarrow 1/0) = C_m.\frac{\omega_3}{r}}$$

Puissances intérieures :

- rendement du réducteur : les liaisons pivots ne sont pas parfaites et on n'a pas l'hypothèse de roulement sans glissement au niveau des engrènements, en effet le rendement global η du réducteur n'est pas de ***1***.

On a donc des ***pertes*** de puissance au sein du réducteur. Ces pertes de puissances sont en fait de ***20%*** puisque le rendement est annoncé à ***0,8*** donc :

Puissance perdue = - (1-η) . Puissance d'entrée

Or à l'entrée on a un moteur qui délivre un couple C_m sur l'arbre ***1*** en simple rotation autour d'un axe fixe, d'où : $P_{entrée} = C_m.\omega_1$ avec par ailleurs $r = \frac{\omega_3}{\omega_1}$ d'où finalement :

$$\boxed{P_{intérieure} = -(1-\eta)\,C_m.\frac{\omega_3}{r}}$$

- frottements visqueux au niveau de la charge : on a un couple de frottements visqueux C_f agissant sur la charge entraînée qui est en simple rotation autour d'un axe fixe, donc :

$$\boxed{P(frottement\ visqueux \rightarrow 3/0) = -C_f.\,\omega_3 = -(f.\omega_3).\,\omega_3 = -f.\omega_3^{\,2}}$$

<u>Ecriture du théorème de l'énergie cinétique :</u> $\frac{d(Ec)}{dt} = \sum Pext + \sum P\text{int}$

$$\frac{1}{2}.J.2.\omega_3.\frac{d\omega_3}{dt} = \left(0 + C_m.\frac{\omega_3}{r}\right) + \left(-(1-\eta)\,C_m.\frac{\omega_3}{r} - C_f.\omega_3\right)$$

Soit : $J.\frac{d\omega_3}{dt} = \left(\frac{C_m}{r}\right) + \left(-\frac{C_m}{r} + \frac{\eta.C_m}{r} - C_f\right)$ d'où $J.\frac{d\omega_3}{dt} = \frac{\eta.C_m}{r} - C_f$

Et finalement : $\boxed{f.\omega_3(t) + J.\frac{d\omega_3(t)}{dt} = \frac{\eta}{r}.C_m(t)}$