

I - ÉLÉMENTS PROPRES D'UN ENDOMORPHISME

E est un espace vectoriel sur \mathbb{K} non réduit à $\{0_E\}$ et $u \in \mathcal{L}(E)$.

1) Définitions des éléments propres de u

- On appelle *valeur propre* de u , tout scalaire $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que : $\exists x \in E - \{0_E\} / u(x) = \lambda x$.
 x s'appelle alors un vecteur propre de u associé à λ .

Donc λ est valeur propre de $u \iff \text{Ker}(u - \lambda \text{id}_E) \neq \{0_E\} \iff u - \lambda \text{id}_E$ non injective

- On appelle *vecteur propre* de u , tout vecteur x de E , non nul, tel que $u(x)$ est colinéaire à x .
Donc : $\exists \lambda \in \mathbb{K} / u(x) = \lambda x$. λ est alors une valeur propre de u .
- Si λ est valeur propre de u , on appelle *sous-espace propre de u associé à λ* , le sous-espace vectoriel $E_\lambda = \text{Ker}(u - \lambda \text{id}_E)$.
Il est constitué des vecteurs propres associés à λ et du vecteur nul. Donc $E_\lambda = \{x \in E / u(x) = \lambda x\}$.
- Le *spectre* de u , noté $Sp(u)$, est l'ensemble des valeurs propres de u .
- Chercher *les éléments propres* de u , c'est chercher les valeurs propres et les sous-espaces propres de u .

Exemples : Cas de l'application nulle, de l'identité, d'un projecteur, d'une symétrie.

2) Propriétés des sous-espaces propres

th.1 | Si un endomorphisme v commute avec u alors tout sous-espace propre de u est stable par v .
En particulier, tout sous-espace propre de u est stable par u .

th.2 | Si $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p$ sont des valeurs propres deux à deux distinctes de u
alors les sous-espaces propres associés $E_{\lambda_1}, E_{\lambda_2}, \dots, E_{\lambda_p}$ sont en somme directe

3) Polynômes d'endomorphismes et valeurs propres

th. | Soient x un vecteur propre de u associé à la valeur propre λ et P un élément de $\mathbb{K}[X]$.
Alors x un vecteur propre de $P(u)$ associé à la valeur propre $P(\lambda)$.
Donc $\lambda \in Sp(u) \implies P(\lambda) \in Sp(P(u))$

II - ÉLÉMENTS PROPRES D'UNE MATRICE

E est un espace vectoriel sur \mathbb{K} de dimension finie $n \geq 1$, muni d'une base $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \dots, e_n)$.

1) Propriétés

th. | Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ et $\lambda \in \mathbb{K}$. Alors :
 $\lambda \in Sp(u) \iff (u - \lambda \text{id}_E)$ non injective $\iff (u - \lambda \text{id}_E)$ non bijective
 $\iff \det(u - \lambda \text{id}_E) = 0 \iff \det(\lambda \text{id}_E - u) = 0$

On appelle *éléments propres d'une matrice A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$* , les éléments propres de l'endomorphisme v de \mathbb{K}^n canoniquement associé à A : $v : \mathbb{K}^n \rightarrow \mathbb{K}^n, X \mapsto AX$.

déf. $\lambda \in Sp(A) \iff \det(A - \lambda I_n) = 0 \iff \text{rg}(A - \lambda I_n) \leq n - 1 \iff A - \lambda I_n$ non inversible

En particulier $0 \in Sp(A) \iff \det(A) = 0 \iff \text{rg}(A) \leq n - 1 \iff A$ non inversible

Conséquences :

- Si $u \in \mathcal{L}(E)$ et si $A = M_{\mathcal{B}}(u)$ alors $Sp(u) = Sp(A)$ et $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ est vecteur propre de A associé à $\lambda \iff x = \sum_{i=1}^n x_i \cdot e_i$ est vecteur propre de u associé à λ
On note $E_{\lambda}(A) = \text{Ker}(u - \lambda id_E) = \text{Ker}(A - \lambda I_n)$
- Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ alors $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. On distingue $Sp_{\mathbb{R}}(A)$ et $Sp_{\mathbb{C}}(A)$. On a $Sp_{\mathbb{R}}(A) \subset Sp_{\mathbb{C}}(A)$.
Si le complexe λ_0 est valeur propre de A associée au vecteur propre X_0 alors $\bar{\lambda}_0$ est valeur propre de A associée au vecteur propre \bar{X}_0 .
- Version matricielle de **I - 3) th** :
Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et si $\lambda \in Sp(A)$ alors $\forall P \in \mathbb{K}[X], P(\lambda) \in Sp(P(A))$.

2) Polynôme caractéristique

déf. Soit une matrice A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
Les valeurs propres de A sont les racines du polynôme χ_A défini par : $\forall x \in \mathbb{K}, \chi_A(x) = \det(xI_n - A)$.
 χ_A s'appelle le polynôme caractéristique de A .
De même, on définit le polynôme caractéristique d'un endomorphisme : $\forall x \in \mathbb{K}, \chi_u(x) = \det(xId_E - u)$.

th. Soit une matrice A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Alors $\chi_A = X^n - \text{Tr}(A)X^{n-1} + \dots + (-1)^n \det A$.
Si χ_A est scindé sur \mathbb{K} , ie s'il est de la forme $\chi_A = (X - \lambda_1)(X - \lambda_2) \dots (X - \lambda_n)$
alors $\text{Tr}(A) = \lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_n$ et $\det(A) = \lambda_1 \times \lambda_2 \times \dots \times \lambda_n$
Ce résultat est donc toujours vrai lorsque $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.

3) Ordre de multiplicité

déf. • Soit une matrice A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
L'ordre de multiplicité d'une valeur propre λ de A est son ordre de multiplicité en tant que racine du polynôme caractéristique χ_A .
Notons $\alpha(\lambda)$ cet ordre. Alors : $\alpha(\lambda) \geq 1$ puisque λ est racine de χ_A .
 $\alpha(\lambda) \leq n$ puisque χ_A est de degré n .
• Définition analogue pour un endomorphisme u .

prop. 1 Deux matrices semblables représentent le même endomorphisme dans des bases différentes donc ont même polynôme caractéristique, donc mêmes valeurs propres aux mêmes ordres de multiplicité.

prop. 2 Soit u un endomorphisme de E , F un sous-espace vectoriel de E , de dimension ≥ 1 , stable par u et u_F l'endomorphisme induit par u sur F .
Alors le polynôme χ_{u_F} divise le polynôme χ_u ie $\exists Q \in \mathbb{K}[X] / \chi_u = \chi_{u_F} \times Q$.

cor. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ (resp. $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$)
Soient λ une valeur propre de u (resp. A), E_{λ} le sous-espace propre associé et $\alpha(\lambda)$ son ordre de multiplicité.
a) Alors $1 \leq \dim(E_{\lambda}) \leq \alpha(\lambda)$.
b) En particulier, si $\alpha(\lambda) = 1$ alors $\dim(E_{\lambda}) = 1$.

III - DIAGONALISATION EN DIMENSION FINIE

E est un espace vectoriel sur \mathbb{K} de dimension finie $n \geq 1$.

1) Diagonalisation d'un endomorphisme, d'une matrice

déf. 1 | Soit $u \in \mathcal{L}(E)$.
On dit que u est diagonalisable lorsqu'il existe une base de E formée de vecteurs propres.
Cela équivaut à dire qu'il existe une base \mathcal{V} de E telle que $M_{\mathcal{V}}(\mathbf{u})$ soit diagonale.

déf. 2 | Soit une matrice A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
 A est diagonalisable lorsque l'endomorphisme de \mathbb{K}^n canoniquement associé à A est diagonalisable.
Cela équivaut à dire que A est semblable à une matrice diagonale :
 $\exists D$ diagonale, $\exists P \in GL_n(\mathbb{K}) / A = PDP^{-1}$.

cor. | Soit \mathcal{B} une base quelconque de E , $u \in \mathcal{L}(E)$ et $A = M_{\mathcal{B}}(\mathbf{u})$
Alors u est diagonalisable si et seulement si A est diagonalisable.

th. 1 | Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ (resp. $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$)
On note $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p$ les valeurs propres distinctes deux à deux de u (resp. A). Donc $p \leq n$.
On note $E_{\lambda_1}, E_{\lambda_2}, \dots, E_{\lambda_p}$ les sous-espaces propres respectifs.
Les propriétés suivantes sont alors équivalentes :

$$\mathbf{a)} \ u \text{ (resp. } A) \text{ est diagonalisable.} \quad \mathbf{b)} \ \sum_{i=1}^p \dim(E_{\lambda_i}) = n \quad \mathbf{c)} \ E = \bigoplus_{i=1}^p E_{\lambda_i}$$

th. 2 | Un endomorphisme u est diagonalisable si et seulement si $\left\{ \begin{array}{l} \text{son polynôme caractéristique est scindé dans } \mathbb{K} \\ \forall \lambda \in Sp(u), \dim(E_{\lambda}) = \text{ordre de multiplicité de } \lambda \end{array} \right.$

cor. | E est de dimension n et $u \in \mathcal{L}(E)$
• **Si** u admet n valeurs propres distinctes **alors** u est diagonalisable. Mais la réciproque est fausse.
• **Si** u est diagonalisable et n'a qu'une seule valeur propre λ_0 **alors** $u = \lambda_0 \cdot Id_E$.

2) Caractérisation par les polynômes annulateurs

On considère $u \in \mathcal{L}(E)$.

th. 1 | **Théorème de Cayley-Hamilton :**
Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ (resp. $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$)
Alors χ_u (resp. χ_A) est un polynôme annulateur de u (resp. de A).

th. 2 | Soit P un polynôme annulateur de u .
Si λ est une valeur propre de u **alors** λ est racine de P .
Si $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p$ sont les valeurs propres deux à deux distinctes de u **alors** $\exists Q \in \mathbb{K}[X] / P = Q \prod_{i=1}^p (X - \lambda_i)$.
Mais la réciproque est fautive en général.

th. 3 | u est diagonalisable $\iff u$ admet un polynôme annulateur scindé à racines simples dans \mathbb{K}
 u est diagonalisable $\iff u$ admet pour polynôme annulateur $\prod_{i=1}^p (X - \lambda_i)$ où $Sp(u) = \underbrace{\{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p\}}_{\text{deux à deux distinctes}}$

cor. | Soit F un sous-espace vectoriel de E stable par u et u_F l'endomorphisme induit par u sur F .
Si u est diagonalisable **alors** u_F est diagonalisable.

Démonstration :

F est un sous-espace vectoriel de E stable par u donc on peut définir $u_F : F \rightarrow F, x \mapsto u(x)$.
Supposons u diagonalisable. D'après le **th. 3.**, il existe un polynôme annulateur de u , dans \mathbb{K} .

Notons le : $P = \sum_{k=0}^d a_k X^k$. On a donc $0_{\mathcal{L}(E)} = P(u) = \sum_{k=0}^d a_k u^k$. Donc

$$\forall x \in E, \quad 0_E = P(u)(x) = \sum_{k=0}^d a_k u^k(x)$$

Or $\forall x \in F, \quad u(x) = u_F(x)$ et $\forall k \in \mathbb{N}, \quad u^k(x) = u_F^k(x)$. Donc

$$\forall x \in F, \quad 0_E = \sum_{k=0}^d a_k u_F^k(x) = P(u_F)(x)$$

Donc

$$\sum_{k=0}^d a_k u_F^k = P(u_F) = 0_{\mathcal{L}(E)}$$

P est donc un polynôme annulateur de u_F , et comme il est scindé et à racines simples, d'après le **th. 3.**, u_F est diagonalisable.

IV - TRIGONALISATION EN DIMENSION FINIE

E est un espace vectoriel sur \mathbb{K} de dimension finie $n \geq 1$.

1) Définitions - Propriétés

déf. 1 | Soit $u \in \mathcal{L}(E)$.
On dit que u est trigonalisable lorsqu'il existe une base \mathcal{V} de E telle que $M_{\mathcal{V}}(\mathbf{u})$ soit triangulaire.
Dans ce cas, les valeurs propres de u sont les éléments diagonaux de $M_{\mathcal{V}}(\mathbf{u})$

Remarque : Si $T = M_{(e_1, \dots, e_n)}(\mathbf{u})$ est triangulaire supérieure alors $T' = M_{(e_n, \dots, e_1)}(\mathbf{u})$ est triangulaire inférieure.
Donc on choisit en général une matrice triangulaire supérieure.

déf. 2 | Soit une matrice A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
 A est trigonalisable lorsque l'endomorphisme de \mathbb{K}^n canoniquement associé à A est trigonalisable.
Cela équivaut à dire que A est semblable à une matrice triangulaire supérieure :
 $\exists T \in \mathcal{T}_n^s(\mathbb{K}), \exists P \in GL_n(\mathbb{K}) / A = PTP^{-1}$.

cor. | Soit \mathcal{B} une base quelconque de $E, u \in \mathcal{L}(E)$ et $A = M_{\mathcal{B}}(\mathbf{u})$
Alors u est trigonalisable si et seulement si A est trigonalisable.

2) Théorème admis

th. | Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
Si le polynôme caractéristique de u (resp. A) est scindé sur \mathbb{K} alors u (resp. A) est trigonalisable.

cor. | Toute matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est trigonalisable.

V - UTILISATION

1) Puissances n -ième d'une matrice

2) Suites récurrentes linéaires à coefficients constants

3) Commutant d'une matrice

4) Equations différentielles