PSI

SÉRIES NUMÉRIQUES

I - SÉRIES Á TERMES QUELCONQUES DANS $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ OU $\mathbb{C}$

1) *Définitions*

déf.

Soit $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite de* $\mathbb{K}$. *On définit* $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} u_k = u_0 + u_1 + \cdots + u_n$.

La suite de $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ $S = (S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *ainsi définie est appelée série de terme général* u_n.

On la note $\left(\sum u_n\right)$ *ou* $\left(\sum u_n\right)_{n\geqslant 0}$ *ou* $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} u_n$.

S_n *s' appelle la somme partielle d'ordre n de la série* $\left(\sum u_n\right)$.

a) *Lorsque la suite* $(S_n)_{n\geqslant 0}$ *converge vers* $S \in \mathbb{K}$, *on dit que la série* $\left(\sum u_n\right)$ *est convergente de somme* S.

On note alors $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} u_n = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n = S$.

Dans ce cas, on définit, pour $n \in \mathbb{N}$, $R_n = S - S_n = \displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k$.

R_n *s'appelle le reste d'ordre n de la série,* $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} R_n = 0$ *et* $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} u_k = S_n + R_n$.

b) *Lorsque la suite* $(S_n)_{n\geqslant 0}$ *ne converge pas, on dit que la série* $\left(\sum u_n\right)$ *est divergente.*

c) *Etudier la nature de la série , c'est étudier sa convergence ou sa divergence.*

Remarques :

- Une série est donc une suite numérique.
- Si la suite n'est définie qu'à partir d'un certain rang N_0 alors on définit la série $\left(\sum u_n\right)_{n\geqslant N_0}$
- On utilise la notation $\left(\sum u_n\right)$ quand on évoque la nature de la série et on réserve $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ pour la somme de la série.
- L'ensemble des séries est un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$:

  La série $\lambda\left(\sum u_n\right)_{n\geqslant 0} + \mu\left(\sum v_n\right)_{n\geqslant 0}$ est la série de terme général $\lambda u_n + \mu v_n$.

th.

Condition nécessaire de convergence :

Si la série de terme général u_n est convergente **alors** la suite (u_n) tend vers 0.

Attention : La réciproque de ce théorème est fausse.

Contre exemple : la série harmonique de terme général $\dfrac{1}{n}$

Si (u_n) ne tend pas vers 0, on dit que la série de terme général u_n diverge grossièrement.

<u>Démonstration</u> :

$$\forall\, n \in \mathbb{N}^*, \quad S_n - S_{n-1} = \sum_{k=0}^{n} u_k - \sum_{k=0}^{n-1} u_k = u_n$$

Si la série de terme général u_n converge, alors la suite $(S_n)_{n\geqslant 0}$ converge vers $S \in \mathbb{K}$ et donc

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = S - S = 0$$

2) Opérations sur les séries

prop. 1

a) Si $\left(\sum u_n\right)$ et $\left(\sum v_n\right)$ convergent et si $\lambda \in \mathbb{K}$, alors :

la série $\left(\sum (u_n + v_n)\right)$ converge et $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} (u_n + v_n) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n + \sum_{n=0}^{+\infty} v_n$

la série $\left(\sum (\lambda u_n)\right)$ converge et $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} (\lambda u_n) = \lambda \sum_{n=0}^{+\infty} u_n$

L'ensemble des séries convergentes à coefficients dans $\mathbb{K}$, est donc un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$.

L'application, qui à une série convergente associe sa somme, est donc linéaire.

b) Si $\left(\sum u_n\right)$ converge et $\left(\sum v_n\right)$ diverge alors $\left(\sum (u_n + v_n)\right)$ diverge.

c) Si $\lambda \in \mathbb{K}^*$ alors les séries $\left(\sum u_n\right)$ et $\left(\sum (\lambda u_n)\right)$ ont même nature.

d) Les séries $\left(\sum u_n\right)_{n \geqslant 0}$ et $\left(\sum u_n\right)_{n \geqslant n_0}$ ont même nature.

prop. 2

Soit (u_n) une suite complexe.

$\left(\sum u_n\right)$ converge $\Longleftrightarrow$ $\left(\sum \text{Re }(u_n)\right)$ et $\left(\sum \text{Im }(u_n)\right)$ convergent.

Dans ce cas, $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = \sum_{n=0}^{+\infty} \text{Re }(u_n) + \mathrm{i} \sum_{n=0}^{+\infty} \text{Im }(u_n)$.

3) Exemples fondamentaux

a) La série harmonique

La série harmonique est la série de terme général $\dfrac{1}{n}$: Elle diverge.

Résultat classique mais pas au programme : $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \sim \ln n$

b) Séries géométriques : z est un complexe.

prop.

La série $\left(\sum z^n\right)$ *converge si et seulement si* $|z| < 1$.

Dans ce cas, $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} z^n = \frac{1}{1-z}$ *et* $\displaystyle R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} z^k = z^{n+1} \sum_{k=0}^{+\infty} z^k = \frac{z^{n+1}}{1-z}$

c) Utilisation de la formule de Taylor avec reste intégral

prop.

$\forall z \in \mathbb{C}, \quad \mathrm{e}^{\,z} = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!}$.

$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \cos x = \displaystyle\sum_{p=0}^{+\infty} (-1)^p \frac{x^{2p}}{(2p)!}$ *et* $\sin x = \displaystyle\sum_{p=0}^{+\infty} (-1)^p \frac{x^{2p+1}}{(2p+1)!}$

$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \operatorname{ch} x = \displaystyle\sum_{p=0}^{+\infty} \frac{x^{2p}}{(2p)!}$ *et* $\operatorname{sh} x = \displaystyle\sum_{p=0}^{+\infty} \frac{x^{2p+1}}{(2p+1)!}$

d) Séries téléscopiques

prop. *La suite* $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ *converge si et seulement si la série* $\left(\sum (u_{n+1} - u_n)\right)$ *converge.*

4) Développement décimal d'un nombre réel

déf. 1

Soit x un réel positif.

On appelle développement décimal de x toute suite d'entiers naturels $(d_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *telle que :*

$$d_0 \in \mathbb{Z} \quad \textit{et} \quad \forall\, n \in \mathbb{N}^*, \quad d_n \in [\![0,9]\!] \quad \textit{et} \quad x = \sum_{n=0}^{+\infty} d_n 10^{-n}$$

On écrit alors : $x = d_0, d_1 d_2 \cdots d_n \cdots$

déf. 2 *Un réel x est un nombre décimal lorsque :* $\exists\, p \in \mathbb{Z}, \quad \exists\, n \in \mathbb{N} \;/\; x = \dfrac{p}{10^n}$.

prop.

Tout réel positif non décimal admet un développement décimal unique.

Tout nombre décimal positif x admet exactement deux développement décimaux de la forme :

$$x = d_0, d_1 d_2 \cdots d_n 0000 \cdots\cdots \quad \textit{et} \quad x = d_0, d_1 d_2 \cdots d_{n-1} e_n 9999 \cdots\cdots$$

avec $d_n \neq 0, \quad 0 \leqslant e_n \leqslant 8 \quad$ *et* $\quad e_n = d_n - 1$

Exemple : $2,45370000\cdots\cdots = 2,45369999\cdots\cdots$

II - SÉRIES Á TERMES RÉELS POSITIFS

1) Préliminaire

th.

Soit $\left(\sum u_n\right)$ une série à termes positifs. Alors la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.

Donc : $\left(\sum u_n\right)$ converge $\iff$ $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est majorée.

Lorsque $\left(\sum u_n\right)$ diverge, $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n = +\infty$

Démonstration :

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad S_{n+1} - S_n = u_{n+1} \geqslant 0$$

Donc la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.
Donc ou bien elle est majorée et converge, ou bien elle a pour limite $+\infty$.

2) Comparaison des séries à termes réels positifs

Dans ce paragraphe, toutes les séries sont à termes réels positifs.

prop.

a) Soient $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ deux suites positives telles que $\exists\, n_0 \in \mathbb{N} \;/\; \forall\, n \geqslant n_0, \quad 0 \leqslant u_n \leqslant v_n$.

- **Si** $\left(\sum v_n\right)$ converge **alors** $\left(\sum u_n\right)$ converge.
- **Si** $\left(\sum u_n\right)$ diverge **alors** $\left(\sum v_n\right)$ diverge.

b) Soient $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ deux suites positives telles que $u_n = O(v_n)$.

- **Si** $\left(\sum v_n\right)$ converge **alors** $\left(\sum u_n\right)$ converge.
- **Si** $\left(\sum u_n\right)$ diverge **alors** $\left(\sum v_n\right)$ diverge.

c) Soient $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ deux suites positives telles que $(u_n) = o(v_n)$.

- **Si** $\left(\sum v_n\right)$ converge **alors** $\left(\sum u_n\right)$ converge .
- **Si** $\left(\sum u_n\right)$ diverge **alors** $\left(\sum v_n\right)$ diverge.

d) Soients $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ deux suites positives telles que $u_n \sim v_n$.

Alors $\left(\sum v_n\right)$ et $\left(\sum u_n\right)$ ont même nature.

3) Critère de D'Alembert

th. Soient $(u_n)_n$ une suite strictement positive telle que $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \ell$ où $\ell \in [0,+\infty]$.

Si $\ell < 1$ **alors** la série $\left(\sum u_n\right)$ converge.

Si $\ell > 1$ **alors** la série $\left(\sum u_n\right)$ diverge grossièrement.

Si $\ell = 1$ **alors** on ne peut rien conclure.

Démonstration :

* Cas $0 \leqslant \ell < 1$: Il existe alors a tel que $\ell < a < 1$

  Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \ell < a$, il existe un rang $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que : $\forall n \geqslant n_0,\quad \dfrac{u_{n+1}}{u_n} \leqslant a$.

  Comme $\forall n \in \mathbb{N},\quad u_n > 0,\quad u_{n+1} \leqslant a u_n$.

  Par récurrence, on montre alors que : $\forall n \geqslant n_0,\quad u_n \leqslant a^{n-n_0} u_{n_0}$ ie $u_n \leqslant \underbrace{a^{-n_0} u_{n_0}}_{\text{constante}}\, a^n$.

  La série géométrique $\left(\sum a^n\right)$ converge puisque $|a| < 1$ donc par théorème de comparaison sur les séries à termes positifs, on en déduit que $\left(\sum u_n\right)$ converge.

* Cas $1 < \ell \leqslant +\infty$: Il existe alors a tel que $\ell > a > 1$

  De même, il existe un rang $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que : $\forall n \geqslant n_0,\quad \dfrac{u_{n+1}}{u_n} \geqslant a$. Comme $\forall n \in \mathbb{N},\quad u_n > 0,\quad u_{n+1} \geqslant a u_n$.

  Par récurrence, on montre alors que : $\forall n \geqslant n_0,\quad u_n \geqslant a^{n-n_0} u_{n_0}$.

  Comme $a > 1$, $\lim\limits_{n\to+\infty} a^{n-n_0} = +\infty$ et donc, comme $u_{n_0} > 0$, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$

  Ainsi la série $\left(\sum u_n\right)$ diverge grossièrement.

* Cas $\ell = 1$:

  Les séries $\left(\sum \dfrac{1}{n}\right)$ et $\left(\sum \dfrac{1}{n^2}\right)$ vérifient toutes deux : $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{u_{n+1}}{u_n} = 1$.

  La première diverge tandis que l'autre converge.

4) Comparaison Série-Intégrale

th. 1 Soit $f : [0,+\infty[\longrightarrow \mathbb{R}_+$, continue ou continue par morceaux sur $\mathbb{R}_+$, positive et décroissante.

On définit la suite $\forall n \geqslant 1,\quad w_n = \displaystyle\int_{n-1}^{n} f(t)\,dt - f(n)$. Alors :

- La série $\left(\sum w_n\right)$ est convergente.
- La série $\left(\sum f(n)\right)$ converge si et seulement si l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)\,dt$ converge.

th. 2 Séries de Riemann Pour $\alpha \in \mathbb{R}$, la série $\left(\sum \dfrac{1}{n^\alpha}\right)$ converge si et seulement si $\alpha > 1$.

cor. Règle du n^α pour une série à termes strictement positifs

III - SÉRIES ALTERNÉES

Dans ce paragraphe, on considère des séries à termes réels.

1) *Définition*

déf. *On dit que la série* $\left(\sum u_n\right)$ *est alternée lorsque*

$$\left(\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad u_n = (-1)^n |u_n|\right) \quad ou \quad \left(\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad u_n = (-1)^{n+1} |u_n|\right)$$

En d'autres termes, deux termes consécutifs sont de signes opposés.

2) *Théorèmes*

th. 1 Théorème (ou critère) spécial des séries alternées : TSSA

Si $\begin{cases} \left(\sum u_n\right) & \text{est une série alternée} \\ \lim\limits_{n \to +\infty} |u_n| = 0 & \\ (|u_n|)_{n \in \mathbb{N}} & \text{est décroissante} \end{cases}$ **alors** $\left(\sum u_n\right)$ est convergente.

th. 2 Séries alternées : majoration du reste

On suppose la série $\left(\sum u_n\right)$ vérifie les hypothèses du TSSA.
On note S la somme de la série, et S_n et R_n respectivement les sommes partielles et restes d'ordre n. Alors

- Le réel S est compris entre deux sommes partielles consécutives.
- Le réel S est du signe de u_0 et $|S| \leqslant |u_0|$.
- $\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad R_n = S - S_n = \sum\limits_{k=n+1}^{\infty} u_k$ est du signe de u_{n+1} et $|R_n| \leqslant |u_{n+1}|$.

Remarque : Il se peut que la série ne vérifie les hypothèses du TSSA qu' à partir d'un certain rang n_0.
$\left(\sum u_n\right)$ converge de toute façon, mais le résultat précédent ne s'applique qu'à la série $\left(\sum\limits_{n \geqslant n_0} u_n\right)$

IV - ABSOLUE CONVERGENCE

1) *Généralités*

déf. *On dit que la série numérique* $\left(\sum u_n\right)$ *est absolument convergente lorsque la série* $\left(\sum |u_n|\right)$ *converge.*

th. **Si** la série $\left(\sum u_n\right)$ est absolument convergente **alors** elle est convergente.

Dans ce cas , on a alors : $\left|\sum_{n=0}^{\infty} u_n\right| \leqslant \sum_{n=0}^{\infty} |u_n|$

La réciproque est fausse : Exemple : $\left(\sum \frac{(-1)^n}{n}\right)$

Démonstration :

* Cas 1 : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n \in \mathbb{R}$

  $\forall n \in \mathbb{N}, \quad -|u_n| \leqslant u_n \leqslant |u_n|$ donc $\forall n \in \mathbb{N}, \quad 0 \leqslant u_n + |u_n| \leqslant 2|u_n|$

  Or par hypothèse $\left(\sum |u_n|\right)$ converge, donc grâce au th de comparaison sur les séries à termes positifs, $\left(\sum (u_n+|u_n|)\right)$ converge.

  On a $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = (u_n + |u_n|) - |u_n|$. Donc, en tant que somme de séries convergentes, $\left(\sum u_n\right)$ converge.

* Cas 2 : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n \in \mathbb{C}$

  Alors $\forall n \in \mathbb{N}, \quad |\text{Re }(u_n)| \leqslant |u_n|$ et $|\text{Im }(u_n)| \leqslant |u_n|$.

  Or par hypothèse $\left(\sum |u_n|\right)$ converge, donc grâce au th de comparaison, $\left(\sum \text{Re }(u_n)\right)$ et $\left(\sum \text{Im }(u_n)\right)$ sont absolument convergentes et réelles, donc convergentes d'après le Cas 1.

  On a $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = \text{Re }(u_n) + i \ \text{Im }(u_n)$. Donc, en tant que somme de séries convergentes, $\left(\sum u_n\right)$ converge.

* Dans les deux cas :

  $\forall n \in \mathbb{N}, \quad \left|\sum_{k=0}^{n} u_k\right| \leqslant \sum_{k=0}^{n} |u_k|$. Donc en passant à la limite : $\left|\sum_{n=0}^{\infty} u_n\right| \leqslant \sum_{n=0}^{\infty} |u_n|$

2) *Conséquences*

- Tous les **théorèmes de comparaison** peuvent s'appliquer aux séries $\left(\sum |u_n|\right)$ et $\left(\sum |v_n|\right)$.
  Ils permettent éventuellement de conclure à l'absolue convergence des séries concernées.

- **Règle de D'Alembert pour la convergence absolue** :

  Soient (u_n) une suite de $\mathbb{K}^*$. On suppose que $\lim_{n \to +\infty} \left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \ell$ où $\ell \in [0, +\infty]$.

  * si $\ell < 1$, la série de terme général u_n est absolument convergente.
  * si $\ell > 1$, la série de terme général u_n diverge grossièrement.
  * si $\ell = 1$, on ne peut rien dire.

3) *Produit de Cauchy de deux séries*

A partir de deux suites numériques $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$, on définit une nouvelle suite $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ainsi :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad w_n = u_0 v_n + u_1 v_{n-1} + \cdots + u_{n-1} v_1 + u_n v_0 = \sum_{k=0}^{n} u_k v_{n-k} = \sum_{k=0}^{n} u_{n-k} v_k$$

La suite $(w_n)_n$ s'appelle la suite **produit de Cauchy** des suites $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$.

La série $\left(\sum w_n\right)_n$ s'appelle la série **produit de Cauchy** des séries $\left(\sum u_n\right)_n$ et $\left(\sum v_n\right)_n$.

th. **Si** les séries $\left(\sum u_n\right)_n$ et $\left(\sum v_n\right)_n$ sont absolument convergentes

alors $\left(\sum w_n\right)_n$ est absolument convergente et $\sum_{n=0}^{+\infty} w_n = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n \times \sum_{n=0}^{+\infty} v_n$