PSI

SUITES NUMÉRIQUES

I - PROPRIÉTÉS DE $\mathbb{R}$

1) *Bornes supérieures et inférieures*

Soit A une partie de $\mathbb{R}$ et m et M deux réels.

- On dit que m minore A ou que A est minorée par m lorsque $\forall x \in A, \quad m \leqslant x$.
  On dit que M majore A ou que A est majorée par M lorsque $\forall x \in A, \quad x \leqslant M$.
- On dit que m est un plus petit élément de A (ou un élément minimum de A) lorsque $m \in A$ et m minore A.
  S'il existe , il y a unicité du plus petit élément et on le note $\min A$.

  On dit que M est un plus grand élément de A (ou un élément maximum de A) lorsque $M \in A$ et M majore A.
  S'il existe , il y a unicité du plus grand élément et on le note $\max A$.
- Le plus petit élément, s'il existe, de l'ensemble des majorants de A est appelé borne supérieure de A et noté $\sup A$.
  Le plus grand élément, s'il existe, de l'ensemble des minorants de A est appelé borne inférieure de A et noté $\inf A$.
- A est bornée lorsque A est majorée et minorée ie $\exists k \in \mathbb{R}_+^* \ / \ \forall x \in A, \quad |x| \leqslant k$.

th. **Théorème de la borne supérieure**
Toute partie non vide majorée de $\mathbb{R}$ admet une borne supérieure.
Toute partie non vide minorée de $\mathbb{R}$ admet une borne inférieure.

2) *Partie entière*

- Pour tout réel x il existe un unique entier p de $\mathbb{Z}$ tel que $p \leqslant x < (p+1)$.
  Cet entier s'appelle partie entière de x et se note $\mathrm{E}(x)$ ou $\lfloor x \rfloor$.
  Par définition, $\lfloor x \rfloor$ est le plus grand entier inférieur ou égal à x.
- On a : $\forall x \in \mathbb{R}, \quad \lfloor x \rfloor = x \iff x \in \mathbb{Z}$.
  $\forall x \in \mathbb{R}, \quad \lfloor x \rfloor \leqslant x < \lfloor x \rfloor + 1$ et $x - 1 < \lfloor x \rfloor \leqslant x$

3) *Valeur absolue*

déf. *On appelle valeur absolue du réel x et on note $|x|$ le réel* $\max\{-x, x\}$.
Si $x \geqslant 0$ *alors* $|x| = x$ *et si* $x \leqslant 0$ *alors* $|x| = -x$

prop.

$\forall x \in \mathbb{R}, \quad |x| \geqslant 0$ et $-|x| \leqslant x \leqslant |x|$. et $\forall x \in \mathbb{R}, \quad |x| = 0 \iff x = 0$.

$\forall a > 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad |x| \leqslant a \iff -a \leqslant x \leqslant a$

$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad |xy| = |x||y|$ et $\forall (x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^*, \quad \left|\dfrac{x}{y}\right| = \dfrac{|x|}{|y|}$

$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad |x+y| \leqslant |x| + |y|$ et $\Big||x| - |y|\Big| \leqslant |x - y|$

4) *Intervalles*

Les intervalles de $\mathbb{R}$ sont les ensembles suivants : pour (a,b) dans $\mathbb{R}^2$ tel que $a \leqslant b$:
$]a,b[, \quad [a,b[, \quad]a,b], \quad [a,b], \quad]-\infty,a], \quad]-\infty,a[, \quad [a,+\infty[, \quad]a,+\infty[, \quad \emptyset$ et $\mathbb{R} =]-\infty,+\infty[$.

Un segment est de la forme : $[a,b]$ pour $(a,b) \in \mathbb{R}^2$.

Une partie X de $\mathbb{R}$ est un intervalle si et seulement si $\forall (a,b) \in X, \quad [a,b] \subset X$

II - PROPRIÉTÉS DES SUITES RÉELLES

1) *Suites bornées*

- Une suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est dite majorée (minorée) lorsque : $\exists\, k \in \mathbb{R} \;/\; \forall\, n \in \mathbb{N}, \quad u_n \leqslant k \quad (k \leqslant u_n)$.
  Pour que la suite soit majorée (resp. minorée), il suffit qu'elle le soit à partir d'un certain rang.
- Une suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est dite bornée lorsque : $\exists\, M \in \mathbb{R}_+ \;/\; \forall\, n \in \mathbb{N}, \quad |u_n| \leqslant M.$

2) *Suites convergentes*

déf.
Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite réelle et* $\ell \in \mathbb{R}$.
On dit que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge vers* ℓ *ou admet pour limite* ℓ *lorsque*

$$\forall\, \varepsilon > 0, \quad \exists\, N_0 \in \mathbb{N} \;/\; \forall\, n \geqslant N_0, \quad |u_n - \ell| \leqslant \varepsilon.$$

On dit que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge lorsqu'elle admet une limite finie* ℓ. *Sinon elle diverge.*

Propriétés usuelles :

- Une suite admet au plus une limite finie.
- Une suite convergente est bornée.
- $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell \iff \lim\limits_{n\to+\infty} (u_n - \ell) = 0 \iff \lim\limits_{n\to+\infty} |u_n - \ell| = 0$
- Toutes les opérations sur les limites. En particulier :

  Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $\ell > a$ alors $\exists\, N_0 \in \mathbb{N} \;/\; \forall\, n \geqslant N_0, \quad u_n > a.$

  Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée et si $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0 alors $(u_n v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0.
- Les théorèmes liés à la relation d'ordre $\leqslant$ de $\mathbb{R}$: Tous les théorèmes d'encadrement.

4) *Suites tendant vers $+\infty$ ou $-\infty$*

déf.
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite réelle.*
$(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *tend vers* $+\infty$ *lorsque* $\forall\, A > 0, \quad \exists\, N_0 \in \mathbb{N} \;/\; \forall\, n \geqslant N_0, \quad u_n \geqslant A.$
$(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *tend vers* $-\infty$ *lorsque* $\forall\, A > 0, \quad \exists\, N_0 \in \mathbb{N} \;/\; \forall\, n \geqslant N_0, \quad u_n \leqslant -A$

Propriétés usuelles :

- Une suite tendant vers $+\infty$ ou $-\infty$ n'est pas bornée donc elle diverge.
  Mais la réciproque est fausse. Ex : $\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad u_n = (-1)^n$
- Toutes les opérations sur les limites. Attention aux formes indéterminées : $(+\infty) + (-\infty), \quad 0 \times (\pm\infty), \quad \dfrac{\pm\infty}{\pm\infty}$

5) *Suites monotones*

th. 1
Une suite croissante converge à la condition nécessaire et suffisante qu'elle soit majorée.
Si elle n'est pas majorée, elle diverge vers $+\infty$.

Une suite décroissante converge à la condition nécessaire et suffisante qu'elle soit minorée.
Si elle n'est pas minorée, elle diverge vers $-\infty$.

déf.
Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *et* $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *deux suites réelles.*

On dit qu'elles sont adjacentes lorsque $\begin{cases} (u_n)_{n\in\mathbb{N}} & \textit{est croissante} \\ (v_n)_{n\in\mathbb{N}} & \textit{est décroissante} \\ \lim\limits_{n\to+\infty} (v_n - u_n) = 0 \end{cases}$

th. 2 Deux suites adjacentes convergent et ont la même limite ℓ.
De plus $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n \leqslant \ell \leqslant v_n$ et $\forall (p,q) \in \mathbb{N}^2, \quad u_p \leqslant \ell \leqslant v_q$.

6) Suites extraites

déf. *On appelle suite extraite ou sous suite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ toute suite $(u_{\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ où φ est une application strictement croissante de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$.*

Propriétés

- Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ a une limite, finie ou infinie, alors toute suite extraite de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ a la même limite.
- Si les suites $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ ont la même limite finie ou infinie ℓ alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ a pour limite ℓ.

III - SUITES RÉELLES RÉCURRENTES

1) Suites arithmético-géométriques

On se donne $(a,b) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}$ et on considère la suite réelle définie par : $\begin{cases} u_0 \in \mathbb{R} \\ \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = au_n + b \end{cases}$

a) Si $a = 1$, on a une suite arithmétique : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = u_n + b$ donc $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = u_0 + nb$.

b) Si $b = 0$, on a une suite géométique : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = au_n$ donc $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = u_0\, a^n$.

c) Si $a \neq 1$ et $b \neq 0$, on a une suite arithméticogéométique
Le réel $\ell = \dfrac{b}{1-a}$ vérifie $a\ell + b = \ell$.
Donc $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} - \ell = (au_n + b) - (a\ell + b) = a(u_n - \ell)$. Donc $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n - \ell = (u_0 - \ell).a^n$.

2) Suites récurrentes linéaires d'ordre 2 à coefficients CONSTANTS

On se donne $(a,b) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}^*$ et considère la suite réelle définie par : $\begin{cases} (u_0, u_1) \in \mathbb{R}^2 \\ \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n \end{cases}$

L'équation caractéristique est $(*)\quad z^2 - az - b = 0$

a) Si $(*)$ admet 2 racines réelles distinctes z_1 et z_2 alors , $\exists (\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2 \;/\; \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = \alpha z_1^n + \beta z_2^n$
α et β étant déterminés en fonction de u_0 et u_1.
L'ensemble des suites réelles vérifiant la relation de récurrence est donc un espace vectoriel de dimension 2 dont une base est formée des deux suites : $((z_1^n)_{n\in\mathbb{N}}, (z_2^n)_{n\in\mathbb{N}})$

b) Si $(*)$ admet 1 racine réelle double z_0 alors $\exists (\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2 \;/\; \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = \alpha z_0^n + \beta n z_0^n$.
α et β étant déterminés en fonction de u_0 et u_1.
L'ensemble des suites réelles vérifiant la relation de récurrence est donc un espace vectoriel de dimension 2 dont une base est est formée des deux suites : $((z_0^n)_{n\in\mathbb{N}}, (nz_0^n)_{n\in\mathbb{N}})$

c) Si $(*)$ admet 2 racines complexes non réelles, donc conjuguées, $z_1 = \rho\, e^{\,i\,\theta}$ et $z_2 = \overline{z_1} = \rho\, e^{\,-\,i\,\theta}$
où $\rho \in \mathbb{R}_+^*$ et $\theta \in \mathbb{R} - \{k\pi \;/\; k \in \mathbb{Z}\}$
alors $\exists (\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2 \;/\; \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = \alpha\, \mathrm{Re}\, \left(\rho^n\, e^{\,i\,n\theta}\right) + \beta\, \mathrm{Im}\, \left(\rho^n\, e^{\,i\,n\theta}\right) = \alpha\rho^n\cos(n\theta) + \beta\rho^n\sin(n\theta)$.
α et β étant déterminés en fonction de u_0 et u_1.
L'ensemble des suites réelles vérifiant la relation de récurrence est donc un espace vectoriel de dimension 2 dont une base est est formée des deux suites : $((\rho^n\cos(n\theta))_{n\in\mathbb{N}}, (\rho^n\sin(n\theta))_{n\in\mathbb{N}})$

IV - COMPARAISON DE SUITES

On obtient des équivalents de suites à l'aide de développements limités.

th. 1 Soient α et β deux réels strictement positifs et k dans $]1,+\infty[$.
Alors : $(\ln n)^\alpha = \circ(n^\beta), \quad n^\beta = \circ(k^n), \quad k^n = \circ(n!)$

th. 2 **Formule de Stirling** (à savoir) : $\boxed{n! \sim n^n\; e^{\,-n}\; \sqrt{2\pi n}}$

V - EXTENSION AUX SUITES COMPLEXES

1) Définitions

déf. 1 *Une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ à valeurs dans $\mathbb{C}$ est une application de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{C}$.*
On note $\mathcal{S}(\mathbb{C})$ l'ensemble des suites à valeurs dans $\mathbb{C}$.

Comme pour les suites réelles, on définit la somme et le produit de deux suites complexes.

déf. 2 *Une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de $\mathcal{S}(\mathbb{C})$ est dite bornée lorsque :* $\exists\, M \in \mathbb{R}_+ \;/\; \forall\, n \in \mathbb{N},\quad |u_n| \leqslant M$.

déf. 3 *Soit $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de $\mathcal{S}(\mathbb{C})$. On définit alors*
les parties réelle et imaginaire de u : $\forall\, n \in \mathbb{N},\quad (\mathrm{Re}\,(u))_n = \mathrm{Re}\,(u_n)$ *et* $(\mathrm{Im}\,(u))_n = \mathrm{Im}\,(u_n)$
le module et la suite conjuguée de u, $|u|$ et $\overline{u}$: $\forall\, n \in \mathbb{N},\quad |u|_n = |u_n|$ *et* $(\overline{u})_n = \overline{u_n}$.

2) Suites convergentes

déf. *Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{S}(\mathbb{C})$ et $\ell \in \mathbb{C}$.*
On dit que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers ℓ ou admet pour limite ℓ lorsque $\forall\,\varepsilon > 0,\quad \exists\, N_0 \in \mathbb{N} \;/\; \forall\, n \geqslant N_0,\quad |u_n - \ell| \leqslant \varepsilon$
On dit que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge lorsqu'elle admet une limite finie ℓ, sinon elle diverge.

Propriétés usuelles :

- Une suite admet au plus une limite finie.
- Une suite convergente est convergente est bornée.
- $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell \iff \lim\limits_{n\to+\infty} (u_n - \ell) = 0 \iff \lim\limits_{n\to+\infty} |u_n - \ell| = 0$.
- Les opérations sur les limites, somme, produit , quotient (quand c'est possible) sont encore valables.
  Par exemple : Pour $a \in \mathbb{C}$, $(a^n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers $0 \iff |a| < 1$.
- Ce qui concerne les suites extraites est encore valable.
  Mais ce qui concerne les limites $\pm\infty$ ou les inégalités n'a plus de sens dans $\mathbb{C}$.

3) Utilisation des suites réelles

th. 1 Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite complexe. Notons $x = \mathrm{Re}\,(u)$ et $y = \mathrm{Im}\,(u)$.
Soit $\ell \in \mathbb{C}$ tel que $\ell_1 = \mathrm{Re}\,(\ell)$ et $\ell_2 = \mathrm{Im}\,(\ell)$.

$$(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell \iff (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell_1 \quad \textbf{et} \quad (y_n)_{n\in\mathbb{N}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell_2.$$

Démonstration :

- Supposons que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell$. Alors $\lim\limits_{n\to+\infty} |u_n - \ell| = 0$.
  Or, $\forall\, n \in \mathbb{N},\quad 0 \leqslant |x_n - \ell_1| = |\,\mathrm{Re}\,(u_n - \ell)| \leqslant |u_n - \ell|$.
  Donc, par th. d'encadrement : $\lim\limits_{n\to+\infty} |x_n - \ell_1| = 0$, et ainsi , $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = \ell_1$.
  On montre de même que $\lim\limits_{n\to+\infty} y_n = \ell_2$.
- Supposons que $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = \ell_1$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} y_n = \ell_2$.
  Alors, par opérations sur les limites, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \lim\limits_{n\to+\infty} (x_n + \mathrm{i}\, y_n) = \lim\limits_{n\to+\infty} x_n + \mathrm{i} \lim\limits_{n\to+\infty} y_n = \ell_1 + \mathrm{i}\,\ell_2 = \ell$.

th. 2 Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite complexe et $(r, \theta) \in \mathbb{C}^2$.
Soient $(r_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(\theta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites réelles telles que : $\forall\, n \in \mathbb{N},\quad u_n = r_n\,\mathrm{e}^{\,\mathrm{i}\,\theta_n}$.

Si $(r_n)_{n\in\mathbb{N}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} r$ **et** $(\theta_n)_{n\in\mathbb{N}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \theta$ **alors** $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} r\,\mathrm{e}^{\,\mathrm{i}\,\theta}$.

Démonstration :
$\forall\, n \in \mathbb{N},\quad u_n = r_n(\cos\theta_n + \mathrm{i}\sin\theta_n) = r_n\cos\theta_n + \mathrm{i}\, r_n\sin\theta_n$.
Alors, par opérations sur les limites et propriétés des fonctions sinus et cosinus, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = r\cos\theta + \mathrm{i}\, r\sin\theta = r\,\mathrm{e}\ \mathrm{i}\,\theta$.