TABLE ELEVATRICE (statique)

Q1) Le torseur relatif à la liaison sphère-cylindre d'axe $\left(B\,\vec{z}_1\right)$ est de la forme :

$$\left\{T_{3\to4}\right\}=\left\{\begin{pmatrix}X_{34}\\Y_{34}\\0\end{pmatrix};\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}\right\}_{B,\ B2}$$

Dans le cas de l'hypothèse d'un problème plan, dans le plan $\left(O\ \vec{x}_1\ \ \vec{y}_1\right)$, on a la même forme puisque la résultante est déjà dans le plan $\left(O\ \vec{x}_2\ \ \vec{y}_2\right)$ et il n'y a pas de moment porté par $\vec{x}_2$ ou $\vec{y}_2$.

$$\left\{T_{3\to4}\right\}=\left\{\begin{pmatrix}X_{34}\\Y_{34}\\0\end{pmatrix};\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}\right\}_{B,\ B2}$$

Q2)

- *Isoler :* le bras ***2***.
- *BAME :* poids négligé, action du châssis (pivot en ***O***), action de la plateforme (pivot en ***A***).
- *PFS :* on a un solide en équilibre sous l'action de deux glisseurs (un appliqué en ***O*** et l'autre appliqué en ***A***), ces deux glisseurs sont donc égaux en norme et directement opposés.

⇨ La ligne d'action du glisseur de **3** sur **2** est la droite ***(OA)***.

Q3)

- *Isoler :* la jambe ***4***.
- *BAME :* poids négligé, action du châssis (pivot en ***C***), action de la plateforme (sphère-cylindre en ***B***) et action du moteur (couple $\boldsymbol{C_m}$ en ***C***).
- *PFS :* on a un solide en équilibre sous l'action de deux glisseurs (un appliqué en ***C*** et l'autre appliqué en ***B***) et d'un couple moteur $\boldsymbol{C_m}$. On n'a plus simplement deux glisseurs comme pour l'isolement du bras ***2***, donc celui appliqué en ***B*** n'est pas porté par la droite ***(BC)***.
  En effet s'il était porté par la droite ***(BC)***, son moment au point ***C*** serait nul (puisque sa ligne d'action passerait par le point ***C***) et l'équation des moments en ***C*** ne pourrait pas s'annuler (présence du couple moteur $\boldsymbol{C_m}$).

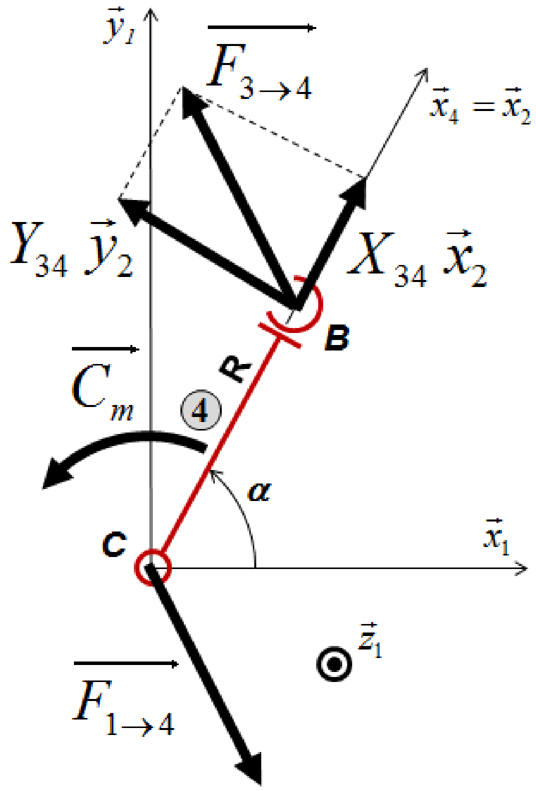
⇨ La ligne d'action du glisseur de **3** sur **4** n'est pas la droite ***(BC)***.

Q4) Equilibre de la jambe ***4*** :

- ***Isoler :*** la jambe ***4***.
- ***BAME :***
  - *poids :* négligé.
  - *action du châssis **1** (pivot en **C**) :* glisseur inconnu (norme et direction) et de point d'application ***C*** (car liaison pivot parfaite).
  - *action de la plateforme **3** (sphère-cylindre centrée en **B**) :* glisseur appliqué en ***B***

$$\{T_{3\to4}\} = \left\{ \begin{pmatrix} X_{34} \\ Y_{34} \\ 0 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}_{B,\ B2}$$

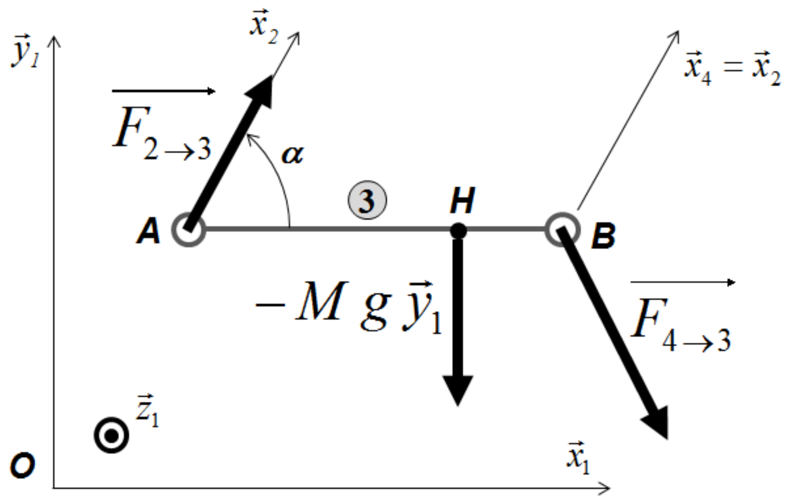
  - *action du moteur :* couple C_m appliqué en ***C***.
- *PFS :* équation des moments (***TMS***) au point ***C*** et en projection sur $\vec{z}_1$.



$\Rightarrow$ $\boxed{Cm + R \times Y_{34} = 0}$

Nota : on choisit d'écrire l'équation des moments en ***C*** afin de ne pas faire apparaître l'action $\overrightarrow{F_{1\to4}}$ du châssis ***1*** sur la jambe ***4*** qu'on ne connait pas et qu'on ne demande pas.

Q5) Equilibre de la plateforme ***3*** :



- ***Isoler :*** la plateforme ***3***.
- ***BAME :***
  - *poids :* négligé.
  - *action de la charge :* glisseur vertical appliqué en ***H***.
  - *action du bras **2** :* glisseur appliqué en ***A*** et porté par $A\ \vec{x}_2$.
  - *action de la jambe **4** :* glisseur appliqué en ***B*** avec $\overrightarrow{F_{4\to3}} = -\overrightarrow{F_{3\to4}} = \begin{pmatrix} -X_{34} \\ -Y_{34} \\ 0 \end{pmatrix}_{B2}$.

- ***PFS :*** équation des moments (***TMS***) au point ***A*** et en projection sur $\vec{z}_1$.

Calculons le moment en ***A*** du glisseur dû à la charge $-M\,g\,\vec{y}_1$ appliqué en ***H*** (avec $\overrightarrow{AH} = \lambda\,\vec{x}_1$) :

$$\Rightarrow \quad \boxed{-M\,g\,\lambda\,\vec{z}_1}$$

Calculons le moment en ***A*** du glisseur $\overrightarrow{F_{4\to3}}$ appliqué en ***B*** :

$$\overrightarrow{M(A\,;\overrightarrow{F_{4\to3}})} = \overbrace{\cancel{\overrightarrow{M(B\,;\overrightarrow{F_{4\to3}})}}}^{=\vec{0}} + \overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{F_{4\to3}} = L\,\vec{x}_1 \wedge \begin{pmatrix} -X_{34} \\ -Y_{34} \\ 0 \end{pmatrix}_{B2} = L\begin{pmatrix} \cos\alpha \\ -\sin\alpha \\ 0 \end{pmatrix}_{B2} \wedge \begin{pmatrix} -X_{34} \\ -Y_{34} \\ 0 \end{pmatrix}_{B2}$$

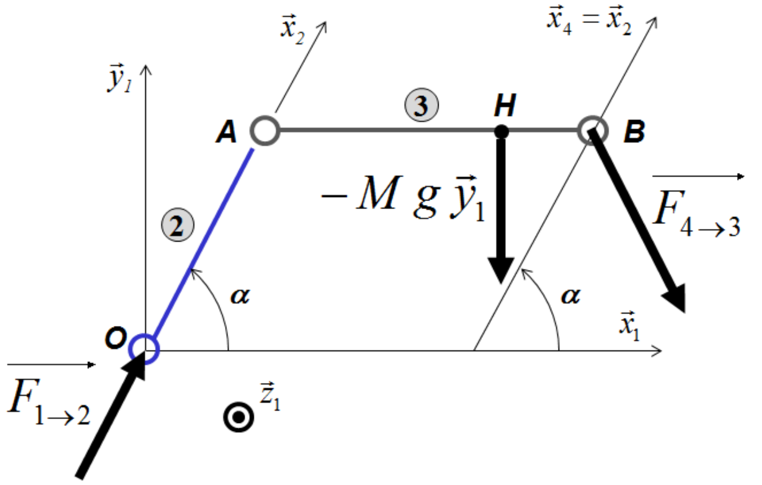
$$\Rightarrow \quad \boxed{\overrightarrow{M(A\,;\overrightarrow{F_{4\to3}})} = -L\,(Y_{34}\cos\alpha + X_{34}\sin\alpha)\,\vec{z}_2}$$

D'où l'écriture du ***TMS*** en ***B*** en projection sur $\vec{z}_1 = \vec{z}_2$: $\quad -M\,g\,\lambda - L\,(Y_{34}\cos\alpha + X_{34}\sin\alpha) = 0$

$$\Rightarrow \quad \boxed{L\,(Y_{34}\cos\alpha + X_{34}\sin\alpha) = -M\,g\,\lambda}$$

Nota : on choisit d'écrire l'équation des moments en ***A*** afin de ne pas faire apparaître l'action $\overrightarrow{F_{2\to3}}$ du bras ***2*** sur la plateforme ***3*** qu'on ne connait pas et qu'on ne demande pas.

Q6) Equilibre de l'ensemble **[2+3]** :



- ***Isoler :*** l'ensemble **[2+3]**.
- ***BAME :***
  - *poids des deux pièces :* négligé.
  - *action de la charge :* glisseur vertical appliqué en ***H***.
  - *action du châssis **1** :* glisseur appliqué en ***O*** et porté par $O\,\vec{x}_2$.
  - *action de la jambe **4** :* glisseur appliqué en ***B*** avec $\overrightarrow{F_{4\to3}} = -\overrightarrow{F_{3\to4}} = \begin{pmatrix} -X_{34} \\ -Y_{34} \\ 0 \end{pmatrix}_{B2}$.

  L'action en ***A*** entre ***2*** et ***3*** n'est pas prise en compte car c'est une action mécanique interne à l'ensemble **[2+3]**.
- ***PFS :*** équation des moments (***TMS***) au point ***O*** et en projection sur $\vec{z}_1$.

Le moment en ***O*** de $\overrightarrow{F_{1\to2}}$ est nul puisqu'il s'agit d'un glisseur appliqué en ***O***.

Calculons le moment en ***O*** du glisseur dû à la charge $-M\,g\,\vec{y}_1$ appliqué en ***H*** (avec $\overrightarrow{AH} = \lambda\,\vec{x}_1$) : le bras de levier vaut $(R\cos\alpha + \lambda)$ d'où :

$$\Rightarrow \boxed{-M\,g\,(R\cos\alpha + \lambda)\,\vec{z}_1}$$

Calculons le moment en ***O*** du glisseur $\overrightarrow{F_{4\to3}}$ appliqué en ***B*** :

$$\overrightarrow{M(O\,;\overrightarrow{F_{4\to3}})} = \underbrace{\cancel{\overrightarrow{M(B\,;\overrightarrow{F_{4\to3}})}}}_{=\vec{0}} + \overrightarrow{OB} \wedge \overrightarrow{F_{4\to3}} = \begin{pmatrix} R\cos\alpha + L \\ R\sin\alpha \\ 0 \end{pmatrix}_{B1} \wedge \begin{pmatrix} -X_{34} \\ -Y_{34} \\ 0 \end{pmatrix}_{B2}$$

Faisons les calculs dans la base $\boldsymbol{B_1}$:

$$\overrightarrow{M(O\,;\overrightarrow{F_{4\to3}})} = \begin{pmatrix} R\cos\alpha + L \\ R\sin\alpha \\ 0 \end{pmatrix}_{B1} \wedge \begin{pmatrix} -X_{34}\cos\alpha + Y_{34}\sin\alpha \\ -X_{34}\sin\alpha - Y_{34}\cos\alpha \\ 0 \end{pmatrix}_{B1}$$

$$\Rightarrow \boxed{\overrightarrow{M(O\,;\overrightarrow{F_{4\to3}})} = (R\cos\alpha + L)\times(-X_{34}\sin\alpha - Y_{34}\cos\alpha) - R\sin\alpha\times(-X_{34}\cos\alpha + Y_{34}\sin\alpha)\,\vec{z}_1}$$

D'où l'écriture du ***TMS*** en ***O*** en projection sur $\vec{z}_1 = \vec{z}_2$:

$$-M\,g\,(R\cos\alpha + \lambda) + (R\cos\alpha + L)\times(-X_{34}\sin\alpha - Y_{34}\cos\alpha) - R\sin\alpha\times(-X_{34}\cos\alpha + Y_{34}\sin\alpha) = 0$$

$$\Rightarrow \cancel{-R\cos\alpha\sin\alpha\,X_{34}} - R\cos^2\alpha\,Y_{34} - L\,(X_{34}\sin\alpha + Y_{34}\cos\alpha) + \cancel{R\cos\alpha\sin\alpha\,X_{34}} - R\sin^2\alpha\,Y_{34} = M\,g\,(R\cos\alpha + \lambda)$$

$$\Rightarrow -R\underbrace{(\cos^2\alpha + \sin^2\alpha)}_{=1}Y_{34} - L\,(X_{34}\sin\alpha + Y_{34}\cos\alpha) = M\,g\,(R\cos\alpha + \lambda)$$

$$\Rightarrow \boxed{-R\,Y_{34} - L\,(X_{34}\sin\alpha + Y_{34}\cos\alpha) = M\,g\,(R\cos\alpha + \lambda)}$$

Q7) On obtient finalement les trois équations suivantes :

$$\begin{cases} Cm + R\times Y_{34} = 0 & 1 \\ L\,(Y_{34}\,cos\,\alpha + X_{34}\,sin\,\alpha) = -M\,g\,\lambda & 2 \\ -R\,Y_{34} - L\,(X_{34}\,sin\,\alpha + Y_{34}\,cos\,\alpha) = M\,g\,(R\,cos\,\alpha + \lambda) & 3 \end{cases}$$

Faisons la somme des équations ***2*** et ***3*** :

$$2 + 3 \Rightarrow -R\,Y_{34} = -M\,g\,\lambda + M\,g\,(R\cos\alpha + \lambda) = M\,g\,R\cos\alpha$$

On en déduit avec l'équation ***1*** : $Cm = -R\times Y_{34} = M\,g\,R\,cos\,\alpha \Rightarrow \boxed{Cm = M\,g\,R\,cos\,\alpha}$

Le couple moteur $\boldsymbol{C_m}$ (soit l'action du vérin hydraulique ***VH***) ***<u>ne dépend pas de la position de la charge</u>*** sur la plateforme puisque la longueur λ n'intervient pas.