ψ^* 2020 : TD 1 des 7 et 9 septembre
Séries numériques

1. Déterminer la nature des séries de terme général :
   a. $u_n = \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n - e$
   b. $u_n = \dfrac{\ln n}{1 + n^\alpha}$
   c. $u_n = \dfrac{1}{n\,(\ln n)^\alpha}$

2. Équivalent de $U_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$.
   a. On pose $v_n = U_n - \ln n$ et $d_n = v_n - v_{n-1}$ pour $n \geq 2$, $d_1 = v_1$.
   Trouver un équivalent simple de d_n .
   b. Montrer que la suite v converge.
   c. Montrer que $U_n \sim_{n\infty} \ln n$.

3. Prouver l'existence et calculer par télescopage la valeur de :
   a. $S = \sum_{k=1}^{\infty} (\arctan(k+1) - \arctan k)$
   b. $T = \sum_{k=1}^{\infty} \dfrac{1}{k(k+1)(k+2)}$
   c. $P = \prod_{k=2}^{\infty} \left(1 - \dfrac{1}{k^2}\right)$

4. Nature de $\sum \sin\left(\pi\sqrt{n^2+1}\right)$.

5. On définit $u : n \mapsto (-1)^{n-1} \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)$.
   a. Nature de la série associée à u.
   b. Trouver le premier n pour lequel on est sûr que U_n soit une approximation à 10^{-3} de $S = \sum_{n=1}^{\infty} u_n$.
   c. Calculer U_{2p} et le mettre sous la forme $\ln(V_p)$, où V_p s'exprime à l'aide de factorielles.
   d. En utilisant la formule de Stirling, trouver la valeur exacte de S.

6. On fixe un complexe z et on pose $a_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!}$.
   a. Que vaut $\lim_{n\infty} a_n$?
   b. Quelle est la nature de $\sum a_n z^n$?
   c. Pour $|z| < 1$, trouver l'expression explicite de $S = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$.

7. Règle d'Abel (hors programme).
   u est une suite complexe vérifiant :
   i. $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = a_n b_n$;
   ii. a est réelle et décroît vers 0 ;
   iii. B (série associée à b) est bornée.

   a. Calculer U_n à l'aide des $v_k = (a_{k+1} - a_k)B_k$.

   b. Montrer que v est sommable.

   c. Montrer que $\sum u_n$ converge.

8. $u : n \mapsto n^{-\alpha} \cos(n\theta)$ où $\theta \in]0, \pi[$.

   a. En utilisant $\cos(\theta) = \Re\left(e^{i\theta}\right)$, expliciter $\sum_{k=0}^{n} \cos(k\theta)$.

   b. Nature de $\sum u_n$ (il y a un cas où on doit utiliser Abel).

   c. Nature de $\sum |u_n|$ dans le cas $\alpha \in]0, 1]$.
   Indication : utiliser, après l'avoir justifié, $|\cos x| \geq (\cos x)^2$.