ψ^* 2020 : TD 2 des 14 et 16 septembre

Espaces vectoriels normés

1. Équivalence des normes usuelles sur $E = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

   a. Trouver $\alpha > 0$ vérifiant : $\forall A \in E\ ,\ \|A\|_2 \leq \alpha \|A\|_\infty$

   b. Trouver $\beta > 0$ vérifiant : $\forall A \in E\ ,\ \|A\|_\infty \leq \beta\, |||A|||$

   c. Trouver $\gamma > 0$ vérifiant : $\forall A \in E\ ,\ |||A||| \leq \gamma \|A\|_2$

   d. Trouver α', β', γ' vérifiant les inégalités inverses dans les propriétés précédentes.

2. Non équivalence des normes usuelles sur $E = \mathcal{C}^0([a,b])$.

   a. Existe-t-il $\alpha > 0$ vérifiant : $\forall f \in E\ ,\ \|f\|_1 \leq \alpha \|f\|_2$

   b. Existe-t-il $\beta > 0$ vérifiant : $\forall f \in E\ ,\ \|f\|_2 \leq \beta \|f\|_\infty$

   c. Existe-t-il $\gamma > 0$ vérifiant : $\forall A \in E\ ,\ \|f\|_\infty \leq \gamma \|f\|_1$

3. Sur $E = \mathcal{C}^1([a,b])$ on définit $\|\cdot\| : f \mapsto |f(a)| + \|f'\|_\infty$.

   a. Justifier que c'est bien une norme.

   b. Trouver une inégalité entre $\|\cdot\|_\infty$ et $\|\cdot\|$.
   Que peut-on en déduire concernant les parties bornées relativement à ces deux normes ?
   Même question pour la convergence des suites relativement à ces deux normes.

   c. Construire une suite dans E qui est convergente pour $\|\cdot\|_\infty$ mais pas pour $\|\cdot\|$.

4. Soit $(E, \|\cdot\|)$ un evn, B une partie non vide de E, a un élément de E.
   La **distance de** a **à** B est $d(a,B) =_{déf} \inf \{ d(a,x) \mid x \in B \}$.

   a. Justifier son existence.

   b. Calculer $d(a,B)$ dans le cas où B est la boule fermée de centre b et rayon r.

   c. Calculer $d(a,B)$ dans le cas où B est la boule ouverte de centre b et rayon r.

5. $E = \mathbb{R}[X]$ est muni des normes suivantes :

$$N : P \mapsto \max|\text{coeff}| \quad , \quad N' : P \mapsto \int_0^1 |P(t)|dt$$

   On note B l'ensemble des polynômes de coefficient dominant 1.

   a. Calculer $d(0_E, B)$ pour chacune des deux normes.

   b. Pour N, calculer $d(Q_i, B)$ où $Q_1 = X + 2X^2 + 3X^3$, $Q_2 = X + 2X^2 + \frac{1}{4}X^3$,
   $Q_3 = 2X + X^2 + \frac{1}{4}X^3$.

   c. Pour chacune des deux normes, trouver la formule générale donnant $d(Q,B)$.