ψ^* 2018 : TD 4 des 24 et 26 septembre
Suites vectorielles, topologie

1. Théorème de Cesaro.
   Soit u une suite dans un ev E. On lui associe la suite $v : n \mapsto \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n} u_k$.

   a. Prouver que si u converge vers 0_E, alors il en est de même pour v.
      Indication : utiliser les ε.

   b. Prouver que si u converge vers l, alors il en est de même pour v.

2. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ vérifiant $|||A||| < 1$, et $U : p \mapsto \sum_{k=0}^{p} A^k$.

   a. Montrer que :
   $$\forall X \in \mathbb{R}^n \ , \ \|AX\|_\infty \leq |||A||| \, \|X\|_\infty$$

   b. En déduire que $I - A$ est inversible.

   c. Montrer que :
   $$\forall p \in \mathbb{N} \ , \ (I - A)^{-1} - U_p = (I - A)^{-1} \, A^{p+1}$$

   d. Montrer que U converge, et préciser sa limite.

3. Soient A, B deux parties d'un ev E de dimension finie.

   a. Montrer que si A et B sont fermés, alors $A \times B$ l'est aussi.

   b. Montrer que si A et B sont ouverts, alors $A \times B$ l'est aussi.

   c. Que se passe-t-il si l'un est ouvert et l'autre fermé ?

4. Prouver que l'adhérence de $B(a, r)$ est $B_f(a, r)$.

5. Dans $E = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on considère la partie P (resp. Q) constituée des matrices à coefficients tous positifs ou nuls (resp. strictement positifs).

   a. P est-il ouvert, fermé, ou ni l'un ni l'autre ?

   b. Même question pour Q.

   c. Quelle est l'adhérence de Q ?